

§. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi = \underbrace{E}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}} \psi$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} \quad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・ 部分波展開

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \underbrace{j_l(kr)}_{\text{球バessel関数}} \underbrace{P_l(\cos \theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}$$

(証明) $e^{ikr \cos \theta} = \sum_l a_l(r) P_l(\cos \theta)$ と展開する。

$$(\text{note}) \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$\downarrow a_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} P_l(\cos \theta)$$

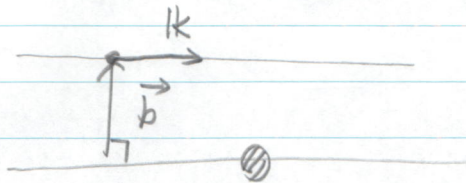
$$(\text{note}) j_l(y) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^1 dx e^{ixy} P_l(x)$$

$$\downarrow a_l(r) = (2l+1) i^l j_l(kr)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

↓ 平面波には全ての部分波 (角運動量) l が混ざっている。

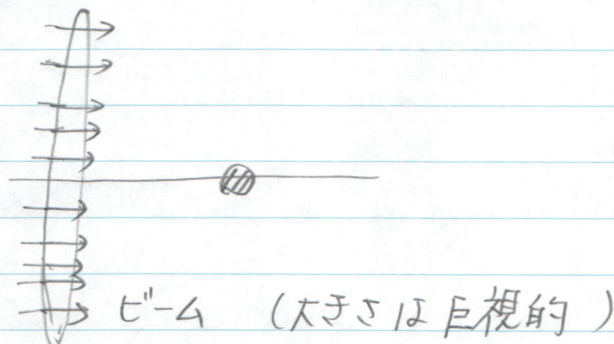
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow l = \textcircled{b} k \hbar$$

衝突係数

↓ $\sum_{l=0}^{\infty} \dots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合わさっている。



高エネルギー : ホールン近似が OK
平面波を使って角運動量が陽に
現れない議論ができた。

低エネルギー : 各 l ごとに考える必要がある
→ 部分波解析

・部分波解析

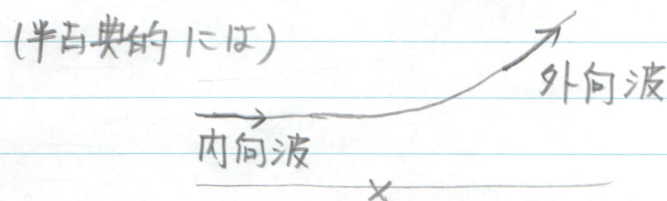
$$\psi(r) = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

$r \rightarrow \infty$ を考える (検出器のあたりにおける振るまい)

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \quad (kr \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr} (e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})})$$

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}} \right] P_l(\cos \theta)$$



(短距離)

ポテンシャルがある場合

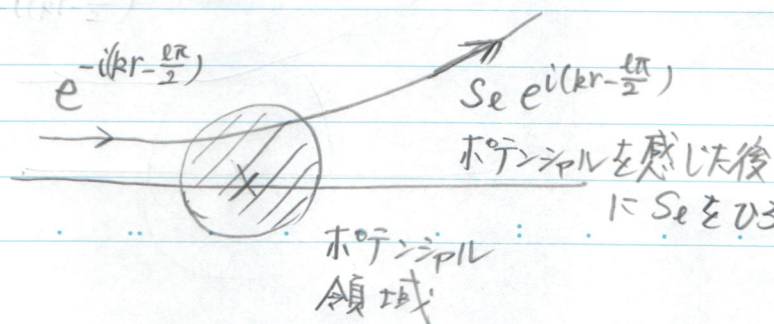
$r \rightarrow \infty$ では $V(r) \rightarrow 0$

↓ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \underbrace{S_l}_{\text{S行列}} e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] P_l(\cos \theta)$$

「S行列」

ポテンシャルの効果を反映



※ 実ポテンシャルなら

$$|S_l| = 1$$

(フックルの保存.)

$$\begin{aligned}
 \psi(r) &\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] P_l(\cos\theta) \\
 &\quad \underbrace{- e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{=0} \\
 &= e^{ik \cdot r} + \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) \underbrace{i^l e^{-i\frac{l\pi}{2}}}_{i^l \cdot (-i)^l = 1} e^{ikr} (1 - S_l) P_l(\cos\theta) \\
 &= e^{ik \cdot r} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right]}_{\substack{|| \\ f(\theta)}} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}
 \end{aligned}$$

・ 全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \cdot \frac{S_{l'} - 1}{-2ik} \underbrace{\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)}_{\substack{|| \\ \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l, l'}}} \\
 &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2
 \end{aligned}$$

◦ 位相のずれ (phase shift)

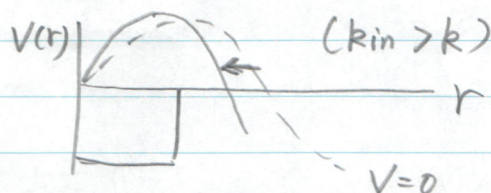
弾性散乱しか考えないときは $|S_l| = 1$ (フラックスの保存)

→ $S_l = e^{2i\delta_l}$ と書くと:

$$\begin{aligned} e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \\ = e^{i\delta_l} \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} \right] \\ = -2i e^{i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \end{aligned}$$

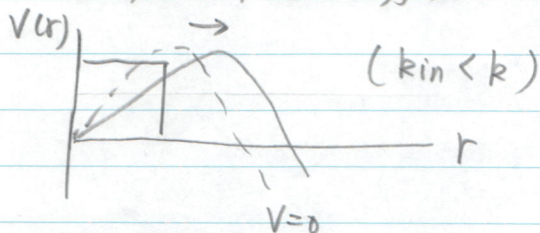
(自由粒子とくらべて
だけだけ位相がずれた)

引力ポテンシャルの場合



$$\delta_l > 0$$

斥力ポテンシャルの場合



$$\delta_l < 0$$

(note) $j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

遠くポテンシャル $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ による
位相のずれ
(マイナス符号に注目)

・光学定理 (再)

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |e^{2i\delta_l} - 1|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left| e^{i\delta_l} \underbrace{(e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l})}_{2i \sin \delta_l} \right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l\end{aligned}$$

$$f(\theta=0) = \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \underbrace{P_l(1)}_1 = \sum_l (2l+1) \frac{\cos 2\delta_l + i \sin 2\delta_l - 1}{2ik}$$

$$\begin{aligned}\Downarrow \quad \text{Im } f(0) &= \sum_l (2l+1) \frac{1 - \cos 2\delta_l}{2k} = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \\ &= \frac{k}{4\pi} \sigma\end{aligned}$$

§. 7-ロン波動関数

7-ロンポテンシャル: $V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$

長距離力 $\rightarrow$ r がいくら大きくても影響を受ける (波動関数が平面波にならない)



$S_e = 1$ になることはない



$$f(0) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

は収束しない

$\rightarrow$ 別な取扱いが必要

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - E\right) \psi(r) = 0$$

放物線座標 $\xi = r(1 - \cos\theta) = r - z$
 $\eta = r(1 + \cos\theta) = r + z$

を使ってこの方程式を解く

$$\psi(\xi, \eta) = c e^{ikz} F(-i\eta, 1, ik\xi)$$



合流超幾何関数

$$\eta = \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v} \quad (\psi \rightarrow \psi - z_1 L + \psi_0 \rightarrow \psi - \psi_0)$$

漸近形:

$$\psi(\xi, \eta) \rightarrow \frac{C e^{\frac{3\pi}{2}}}{T(1+i\eta)} \left\{ e^{i(kz + \eta \ln(r-z))} + f_c(0) \frac{e^{ikr - i\eta \ln 2kr}}{r} \right\}$$

$$f_c(0) = - \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0}$$

$$\sigma_0 = \arg T(1+i\eta)$$

$$(note) \quad \frac{d\sigma_c}{d\Omega} = |f_c(0)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$$

(ボールの近似で求めた
ものと一致)

~~~~~

各  $l$  に対して  $\eta$  は  $l$  の関数として方程式を解く:

$$\psi_{lm}(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r})$$

$$\downarrow \quad \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - E \right) u_l(r) = 0$$

解はポイッタカ関数

線形独立な解

$$u_l(r) = \begin{cases} F_l(kr) \rightarrow \sin(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \\ G_l(kr) \rightarrow \cos(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\gamma\text{-ray phase shift: } \sigma_l = \arg T(l+1+i\eta)$$