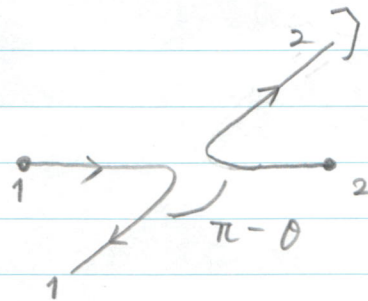
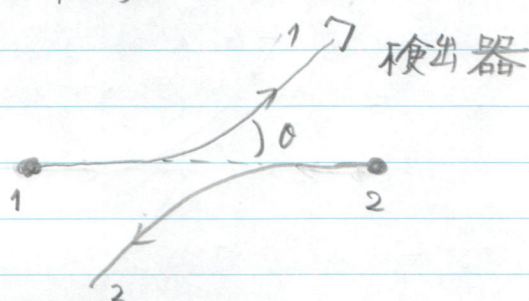


§. 同種粒子による散乱

同種粒子 : 区別できない



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
(こういう場合)

同種粒子: 粒子を入れかえに対し波動関数は
対称 / 反対称

$$\downarrow \quad \Psi_{\pm}(r) = \Psi(r) \pm \Psi(-r)$$

$$\rightarrow (e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r})$$

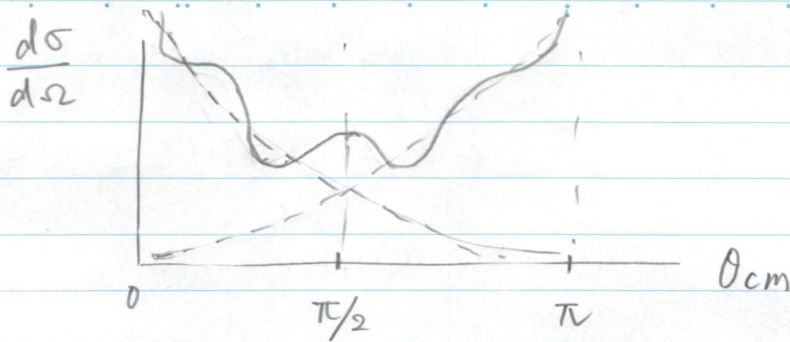
空間部分に
対称性

$$+ \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi - \theta)]}_{\text{III } f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm \underbrace{2 \operatorname{Re}[f^*(\theta) f(\pi - \theta)]}_{\text{干渉項}}$$

↑
実際に $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反応などで観測



- ・ 断面積は $\theta_{cm} = \pi/2$ で対称
- ・ 干渉項のために振動する

- ・ $s \ll 0$ の粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

- ・ $s \ll 1/2$ の粒子 (フェルミオン)

$$\Psi(1,2) = \underbrace{\Psi(r_1, r_2)}_{\text{対称}} \underbrace{\chi_{spin}}_{\text{反対称}}$$

又は 反対称 対称

$$S=0$$

$$\chi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) : \text{反対称}$$

→ 空間部分は対称

$$\Downarrow \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

$$S=1$$

$$\chi_{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle : \text{対称}$$

$$\Downarrow \frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(0)|^2$$

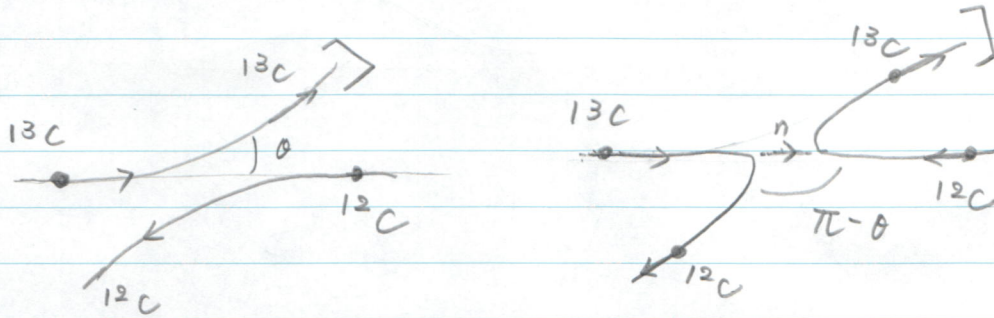
→ 空間部分は反対称

$s \ll 0$ 偏極光のとき

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(0)|^2 + |f(\pi-0)|^2 - \text{Re}[f^*(0)f(\pi-0)]$$

(note) 弾性的粒子移行反応

例) $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ ($^{13}\text{C} = ^{12}\text{C} + n$)



^{13}C を検出する検出器は上の2つのプロセスを
原理的に区別できない

$$\rightarrow f(\theta) = f_{el}(\theta) + f_{trans}(\pi - \theta)$$

粒子移行過程
の振幅

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = |f_{el}(\theta)|^2 + |f_{trans}(\pi - \theta)|^2 \\ + 2 \operatorname{Re} [f_{el}^*(\theta) f_{trans}(\pi - \theta)]$$

干渉項

↓
振動

§. WKB 近似 による 散乱問題

• WKB 波動関数

1次元のシュレディンガー方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))}_{m k(x)^2} \psi(x) = 0$$

もし $V(x) = \text{const.}$ ならば $\psi(x) \propto e^{\pm i k x}$

WKB Ansatz: $\psi(x) = \exp\left[i \int^x \eta(x') dx'\right]$

cf. $k x \rightarrow \int^x k(x') dx'$
+ 補正

$$\psi' = i \eta \psi$$

$$\psi'' = i (\eta' \psi + \eta \psi')$$

$$= i \eta' \psi - \eta^2 \psi = -k^2 \psi$$

↑

シュレディンガー方程式

↓

$$\eta^2 = k^2 + i \eta'$$

半古典近似: η が ゆっくりと変化

$$\leftrightarrow |\eta'| \ll |\eta|^2$$

↓ $\eta_0(x)^2 = k(x)^2 \rightarrow \eta_0(x) = \pm k(x)$

補正の見積り:

$$\eta(x)^2 \sim \eta_0(x)^2 + i\eta_0'(x)$$

$$= k(x)^2 \pm i k'(x) = k(x)^2 \left(1 \pm i \frac{k'(x)}{k(x)^2}\right)$$

$$\Downarrow \quad \eta(x) \sim \pm k(x) \left(1 \pm \frac{i}{2} \frac{k'(x)}{k(x)^2}\right) = \pm k(x) + \frac{i}{2} \frac{k'(x)}{k(x)}$$

$$(\text{note}) \quad e^{i \int^x dx' \cdot \frac{i}{2} \frac{k'(x')}{k(x')}} = e^{-\frac{1}{2} \int^x (\ln k)' dx'} = \frac{C}{\sqrt{k(x)}}$$

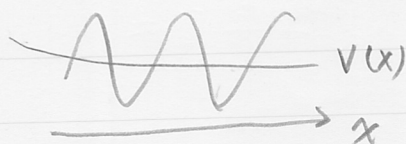
$$\Downarrow \quad \boxed{\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{k(x)}} e^{i \int^x k(x') dx'} + \frac{C_2}{\sqrt{k(x)}} e^{-i \int^x k(x') dx'}}$$

古典的に許されない領域では $k(x) \rightarrow i\gamma(x)$

• WKB近似の妥当性

$$|\eta'| \ll |\eta|^2 \rightarrow |k'(x)| \ll |k(x)|^2$$

$$\Downarrow \quad \left| \frac{d\gamma(x)}{dx} \right| \ll 1 \quad \left(\gamma(x) = \frac{1}{k(x)} \right)$$



波長の変化が非常にゆるやか

$\leftrightarrow$ - 波長内でポテンシャルの変化が非常にゆるやか



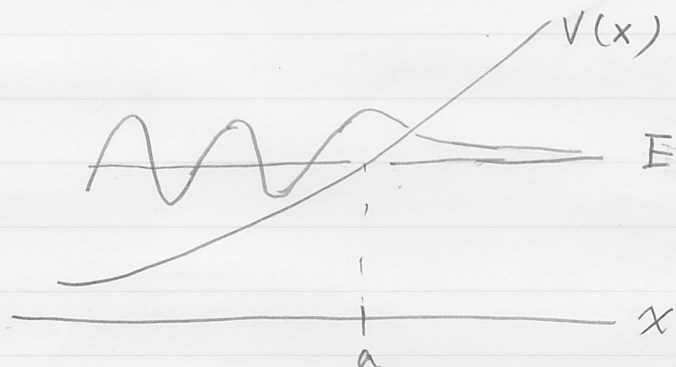
高エネルギー または m が大きい

• WKB 接続公式

WKB 近似：古典的転回点 ($E = V(x)$) のまわりでは成り立たない。

cf. $\frac{1}{\sqrt{k(x)}} = \text{発散}$

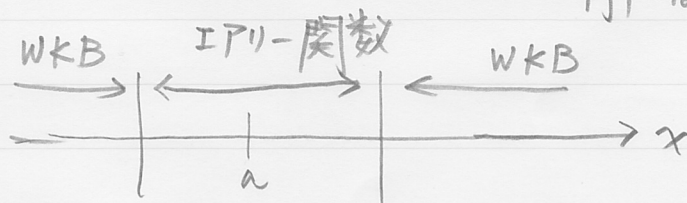
転回点をうまく避ける $\rightarrow$ WKB 接続公式



$x=a$ のまわりでポテンシャルを展開

$$V(x) \sim V(a) + \underbrace{V'(a)}_{\downarrow} (x-a)$$

解はエアリ関数



エアリ関数の漸近形と一致するように $x=a$ の右側と左側の WKB 波動関数をつなぐ

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta(x)}} e^{-\int_a^x \delta(x') dx'} & (x > a) \\ \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4}\right) & (x < a) \end{cases}$$

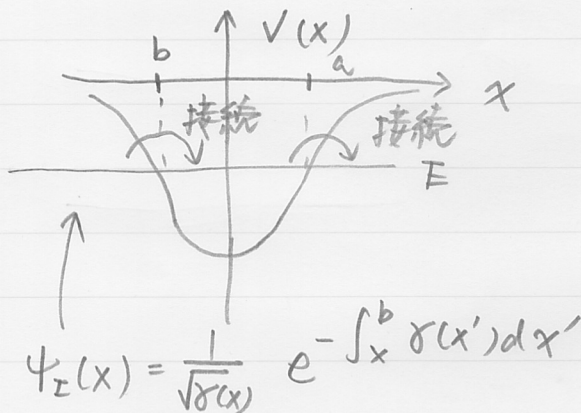
※ 指数関数的に増大する解に關しては

$$\frac{D}{\sqrt{\delta(x)}} e^{+\int_a^x \delta(x') dx'}$$

$$\rightarrow -\frac{D}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4}\right)$$

応用例

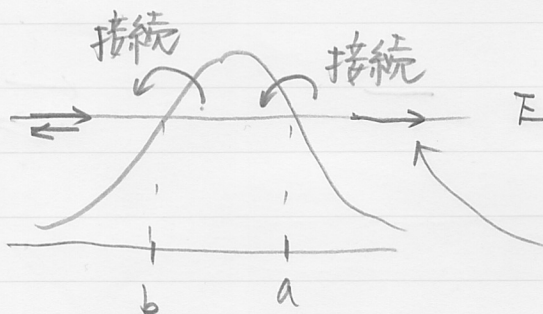
✓ ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件



波動関数が $x \rightarrow \infty$ で発散しない

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_b^a dx' k(x') \\ = (n + \frac{1}{2})\pi \\ (n=0, 1, \dots) \end{aligned}$$

✓ トンネル確率



$$\psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{i \int_a^x k(x') dx'}$$

入射フラックスと透過フラックスの比を計算すると

$$P = e^{-2 \int_b^a \delta(x) dx}$$

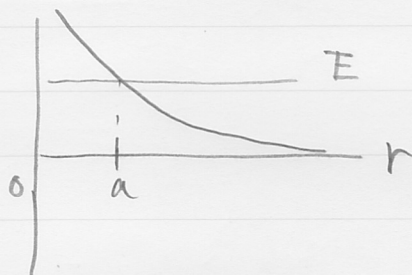
• 3次元への拡張

$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(r)$$

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{\text{III}} - E \right) u_l(r) = 0$$

$$V_{\text{eff}}(r)$$

実質的には - 次元と同じ取り扱い



$$r > a \quad r'' \quad u_l(r) = \frac{C}{\sqrt{k(r)}} \cos\left(\int_a^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{C}{\sqrt{k(r)}} \sin\left(\int_a^r k(r') dr' + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$r < a \quad r'' \quad u_l(r) = \frac{C}{2\sqrt{\gamma(r)}} e^{-\int_r^a \gamma(r') dr'}$$

(note) $r \sim 0 \quad r''$

$$\gamma(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right)} \sim \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}$$

↓

$$u_l(r) \sim \sqrt{r} e^{\sqrt{l(l+1)} \ln r} = r^{\sqrt{l(l+1)} + \frac{1}{2}}$$

exact な解は $u_e(r) \sim r^{l+1}$

→ ランガ-の補正 $l(l+1) \rightarrow (l+\frac{1}{2})^2$

(数学上は $r = e^{\xi}$, $u_e(r) = g(\xi) e^{\xi/2}$
という変換をして $g(\xi)$ に対して WKB 近似
を使うとこの補正がでてくる。)

四 WKB 位相差

$$u_e(r) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \sin \left(\underbrace{\int_a^r k(r') dr'}_{\parallel} + \frac{\pi}{4} \right)$$
$$\int_a^r (k(r') - k) dr' + kr - ka$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{\sqrt{k}} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)$$

↓

$$\delta_l = \int_a^\infty (k(r) - k) dr - ka + \frac{\pi}{2} \underbrace{\left(l + \frac{1}{2} \right)}_{\nearrow \text{ランガ-}}$$

ポテンシャルがないとき:

$$\frac{(\ell + \frac{1}{2})^2 \hbar^2}{2\mu a_0^2} = E = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu}$$

$$\int_{a_0}^r k_0(r') dr' = \int_{(\ell + \frac{1}{2})/k}^r \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2 \hbar^2}{2\mu r'^2})} dr'$$

$$= \int_{\ell + \frac{1}{2}}^{kr} \sqrt{1 - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{k^2 r'^2}} d(kr')$$

$$\rightarrow \sqrt{(kr)^2 - (\ell + \frac{1}{2})^2} + (\ell + \frac{1}{2}) \sin^{-1} \frac{\ell + \frac{1}{2}}{kr} - (\ell + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int dx \frac{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}{x}$$

$$\rightarrow kr - (\ell + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$= \sqrt{x^2 - \alpha^2} + \alpha \left| \sin^{-1} \frac{\alpha}{x} \right|$$

↓

$$S_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_a^r k(r') dr' - \int_{a_0}^r k_0(r') dr' \right]$$