

§. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi = \underbrace{E}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}} \psi$$

$$\psi(r) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta} \quad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・ 部分波展開

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \underbrace{j_l(kr)}_{\text{球ハルメル関数}} \underbrace{P_l(\cos\theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}$$

(証明) $e^{ikr\cos\theta} = \sum_l a_l(r) P_l(\cos\theta)$ と展開する。

(note) $\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$

↓ $a_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr\cos\theta} P_l(\cos\theta)$

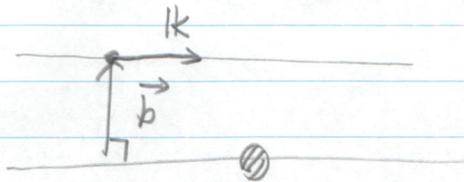
(note) $j_l(y) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^1 dx e^{ixy} P_l(x)$

↓ $a_l(r) = (2l+1) i^l j_l(kr)$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

↓ 平面波には全ての部分波 (角運動量) l が混ざっている。

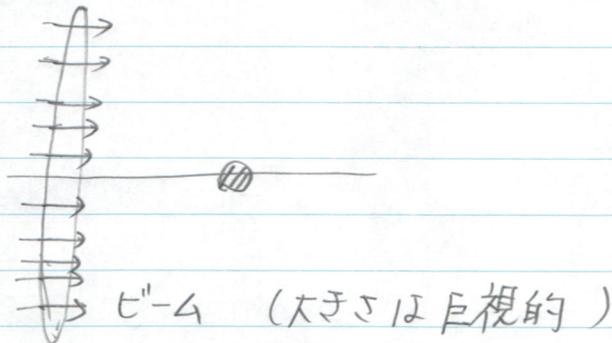
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow l = \textcircled{b} k \hbar$$

衝突係数

↓ $\sum_{l=0}^{\infty} \dots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合わさっている。



高エネルギー: ホール近似がOK
平面波を使って角運動量が陽に
現れない議論ができた。

低エネルギー: 各 l ごとに考える必要がある
→ 部分波解析

・部分波解析

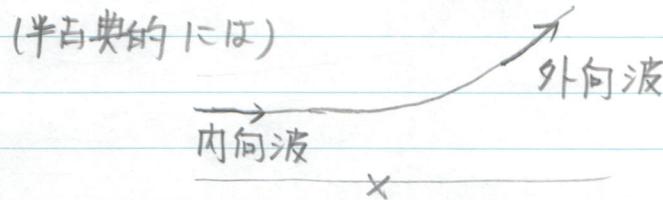
$$\psi(r) = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

$r \rightarrow \infty$ を考える (検出器のあたりにおける振るまい)

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \quad (kr \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr} (e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})})$$

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}} \right] P_l(\cos \theta)$$



(短距離)

ポテンシャルがある場合

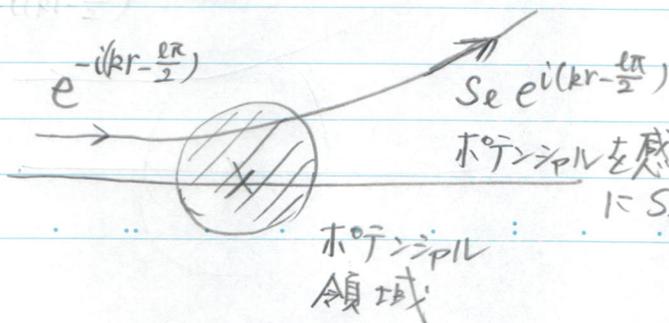
$r \rightarrow \infty$ ならば $V(r) \rightarrow 0$

↓ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] \times P_l(\cos \theta)$$

「S行列」

ポテンシャルの効果を反映



* 実ポテンシャルならば

$$|S_l| = 1$$

(77-77の保存)

$$\begin{aligned}
 \psi(r) &\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] P_l(\cos\theta) \\
 &\quad \underbrace{- e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}} \\
 &= e^{ik \cdot r} + \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l e^{-i\frac{l\pi}{2}} e^{ikr} (1 - S_l) P_l(\cos\theta) \\
 &\quad \underbrace{i^l \cdot (-i)^l = 1} \\
 &= e^{ik \cdot r} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right]}_{f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}
 \end{aligned}$$

・ 全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \cdot \frac{S_{l'} - 1}{-2ik} \underbrace{\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)}_{\frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l, l'}} \\
 &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2
 \end{aligned}$$

◦ 位相のずれ (phase shift)

弾性散乱しか考えないときは $|S_e| = 1$ (フラックスの保存)

→ $S_e = e^{2i\delta_e}$ と書くと:

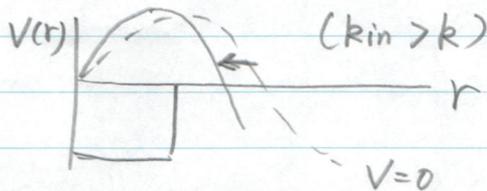
$$e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_e e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

$$= e^{i\delta_e} [e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_e)} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_e)}]$$

$$= -2i e^{i\delta_e} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_e)$$

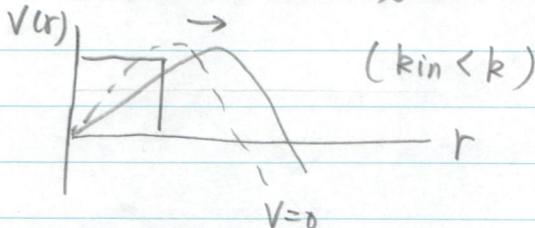
(自由粒子とくらべて
 δ_e だけ位相がずれた)

引力ポテンシャルの場合



$\delta_e > 0$

斥力ポテンシャルの場合



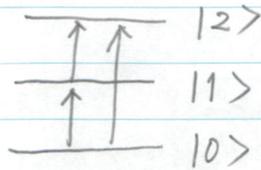
$\delta_e < 0$

(note) $\delta_e(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

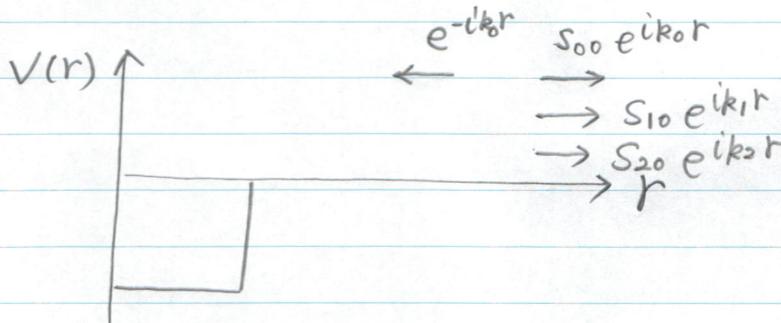
遠心力ポテンシャル $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ による
位相のずれ
: (マイナス符号に注目)

• なぜ「S 行列」とよぶのか

非弾性散乱があるとき



散乱の途中で標的粒子が励起される
(入射粒子でもよい)



$S_{\alpha\alpha}$: "チャンネル" α で入射してチャンネル α' で出ていく振幅

弾性散乱しか考えないときには $S_{\alpha\alpha}$ のみ。

(note) 非弾性散乱を考えると $|S_{00}| < 1$

↑ 弾性散乱の S 行列

* フラックスの保存は $\sum_{\alpha'} |S_{\alpha 0}|^2 = 1$

(S 行列のユニタリー性)

これを表現するのに光学ポテンシャルがよく用いられる

$$V_{opt}(r) = V(r) - iW(r) \quad (W > 0)$$

弾性チャンネルに対する有効ポテンシャル

(note) $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

$\downarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* \nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \psi \nabla^2 \psi^*)$

$$\begin{cases} (-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V - iW) \psi = E \psi \\ (-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V + iW) \psi^* = E \psi^* \end{cases}$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu} \cdot \left(-\frac{2\mu}{\hbar^2}\right) \left\{ \psi^* (E - V + iW) \psi - \psi (E - V - iW) \psi^* \right\}$$

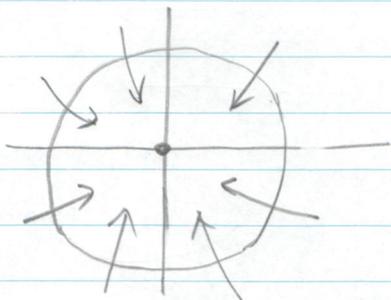
$$= -\frac{2}{\hbar} |\psi(r)|^2 W(r) < 0 \quad (\text{for } W > 0)$$

$\downarrow \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV < 0$ (フラックスの減少)

・吸収断面積

$$\psi(r) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \left[\frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - S_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \right] P_l(\cos\theta)$$

半径 r の球面に入る全内向フラックス:



$$\psi_{in}(r) \equiv \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) (-)^l e^{-ikr} P_l(\cos\theta)$$

$$\mathbf{j}_{in} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \left| \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) (-)^l P_l(\cos\theta) \right|^2 \mathbf{e}_r$$

$\downarrow \mathbf{j}_{in}^{(net)} = \int r^2 d\Omega \mathbf{j}_{in} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{4k^2} \sum_l (2l+1) \cdot 4\pi$

$$= \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス.

$$\Psi_{out}(r) = \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) i^l S_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos\theta)$$

$$\downarrow \quad j_{out}^{net} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l|^2$$

$$\downarrow \quad \Delta j = j_{in}^{net} - j_{in}^{out} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

$$\downarrow \quad \text{吸収断面積: } \boxed{\sigma_{abs} = \frac{\Delta j}{j_{inc}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)}$$

(note) $|S_l| = 1$ ならば $\sigma_{abs} = 0$.

(note)

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_l|^2 + \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - S_l - S_l^* + |S_l|^2 + 1 - |S_l|^2) \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } f(0) &= \text{Im} \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \\ &= - \sum_l (2l+1) \frac{\text{Re}(S_l) - 1}{2k} = \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2}\right) \\ &= \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \quad (\text{拡張された光学定理}) \end{aligned}$$