§. リップマン-シュウィンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\right.}_{\hat{H}_0}\left. - E\right)\psi = -V\psi$$

形式解

$$\boxed{\psi = \phi - \frac{1}{\hat{H}_0 - E - i\eta} V\psi}$$

リップマン-シュウィンガー方程式

$$(\hat{H}_0 - E)\phi = 0$$

正の微小量
(波動関数の境界条件を与える。)

・グリーン関数

$$\hat{G}_0^{(+)} = \frac{1}{\hat{H}_0 - E - i\eta}$$

座標表示では

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{\hat{H}_0 - \underbrace{E}_{\frac{k^2\hbar^2}{2\mu}} - i\eta} | \mathbf{r}' \rangle$$

$$= \int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{r} | \mathbf{k}' \rangle \cdot \frac{1}{\frac{k'^2\hbar^2}{2\mu} - \frac{k^2\hbar^2}{2\mu} - i\eta} \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle$$

$$\int \frac{d\mathbb{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbb{k}\cdot(\mathbb{r}-\mathbb{r}')} = \delta(\mathbb{r}-\mathbb{r}')$$

$$= \int \frac{d\mathbb{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbb{k}'\cdot\mathbb{r}} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k'^2 - k^2 - i\eta'} e^{-i\mathbb{k}'\cdot\mathbb{r}'}$$

$$\left(\eta' = \frac{2\mu}{\hbar^2}\eta\right)$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int k'^2 dk' d\hat{\mathbb{k}}' \, e^{ik's\cos\theta} \frac{1}{k'^2 - k^2 - i\eta'}$$

$$(\mathbb{s} \equiv \mathbb{r} - \mathbb{r}')$$

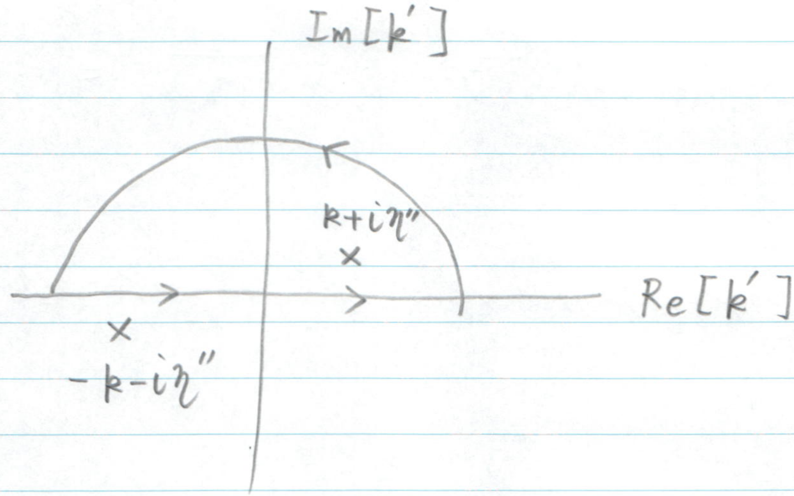
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty k'^2 dk' \cdot \underbrace{2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{e^{ik's\cos\theta}}{k'^2 - k^2 - i\eta'}}_{= \frac{2\pi}{k'^2 - k^2 - i\eta'} \frac{1}{ik's}\left(e^{ik's} - e^{-ik's}\right)}$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^\infty dk' \frac{k' dk'}{k'^2 - k^2 - i\eta'} \left(\frac{e^{ik's}}{s} - \frac{e^{-ik's}}{s}\right)}_{= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k' dk'}{k'^2 - k^2 - i\eta'} \cdot \frac{e^{ik's}}{s}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k' dk'}{(k' + k + i\eta'')(k' - k - i\eta'')} \cdot \frac{e^{ik's}}{s}$$

$$\left(\eta'' = \frac{\eta'}{2k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \left(\frac{1}{k' + k + i\eta''} + \frac{1}{k' - k - i\eta''}\right) \times \frac{e^{ik's}}{s}$$



$\downarrow$

$$G^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\cancel{i}} \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cancel{i} \, \frac{e^{iks}}{s}$$

$$= \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \cdot \frac{e^{iks}}{s}$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{+ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$ (外向き波)

↓

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \, G^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, V(\mathbf{r}') \, \psi(\mathbf{r}')$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \, \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, V(\mathbf{r}') \, \psi(\mathbf{r}')$$

(note) $r \to \infty$ では

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = k\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2}$$

$$\sim kr - \underbrace{k\frac{\mathbf{r}}{r}}_{=\ \mathbf{k}'} \cdot \mathbf{r}'$$

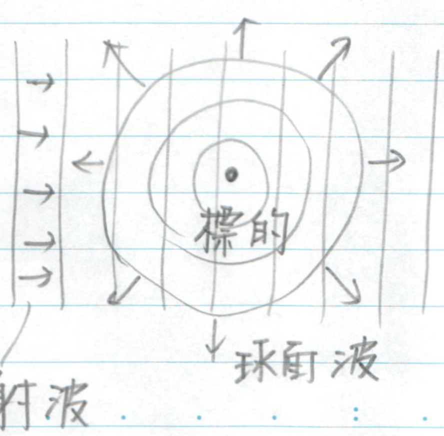
↓

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underbrace{- \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \, V(\mathbf{r}') \, \psi(\mathbf{r}')}_{=\ f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \sim r$

$f(\theta)$ 散乱振幅

$$= \underbrace{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{\text{入射波}} + \underbrace{f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{散乱波(球面波)}}$$



§. 散乱振幅と散乱断面積

散乱波 $\psi_{sc}(r) = f(\theta)\cdot\dfrac{e^{ikr}}{r}$ に対するフラックス

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi_{sc}^{*}\nabla\psi_{sc} - \psi_{sc}\nabla\psi_{sc}^{*}\right)$$

を計算する。

(note) $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\downarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$z = r\cos\theta \;\rightarrow\; \overset{\frac{\partial z}{\partial x}}{0} = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x\cos\theta}{r^2\sin\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \;\rightarrow\; 0 = \frac{x}{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\cdot\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \times\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \sin^2\theta\,\underline{\sin\varphi\cos\varphi} + \cos^2\theta\,\underline{\cos\varphi\sin\varphi} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \sin\varphi\cos\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$\Rightarrow$

$$\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x}\partial_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\partial_\varphi$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi$$

同様に

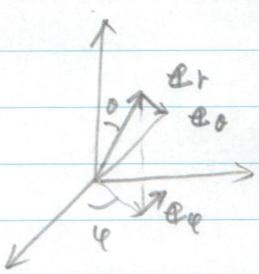
$$\partial_y = \sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi$$

$$\partial_z = \cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\nabla = &\left[\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right]\mathbf{e}_x \\ &+\left[\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right]\mathbf{e}_y \\ &+\left[\cos\theta\,\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\,\partial_\theta\right]\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

(note)



$$\begin{cases}\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y\end{cases}$$

(note) $\quad \nabla\cdot\mathbf{e}_r = \partial_r, \quad \nabla\cdot\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta, \quad \nabla\cdot\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla = \partial_r\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi}$$

$$\therefore\ \mathbf{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left[f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right)f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} - c.c.\right]$$

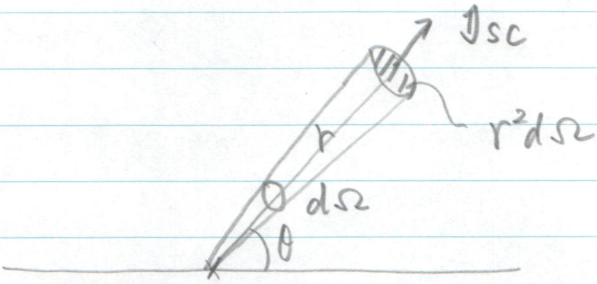
$$= \frac{\hbar}{2i\mu}\left[f^*(\theta)\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\left\{f(\theta)\left(\frac{ik}{r}e^{ikr} - \frac{1}{r^2}e^{ikr}\right)\mathbf{e}_r + \frac{e^{ikr}}{r^2}f'(\theta)\,\mathbf{e}_\theta\right\} - c.c.\right]$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu}\cdot 2ik\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (r\to\infty)$$

$$= \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\mathbf{e}_r$$

検出器
↑
非常に遠い

$\frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2}$



単位時間に立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子数

$$= r^2 d\Omega\cdot\mathbf{j}_{sc}\cdot\mathbf{e}_r = \frac{k\hbar}{\mu}|f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{in}}\cdot\frac{k\hbar}{\mu}|f(\theta)|^2 = |f(\theta)|^2}$$

・ボルン近似

$$\psi = \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \psi$$

$$\sim \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \phi$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{q})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

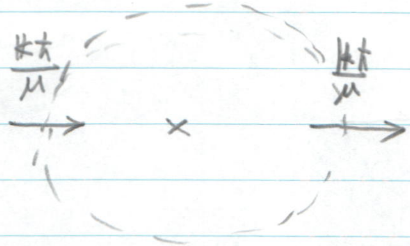
← フェルミの黄金則によるものと
一致

§. 散乱波はどこから現われる？ ー光学定理ー

cf. L. I. Schiff PTP 11 ('54) 288

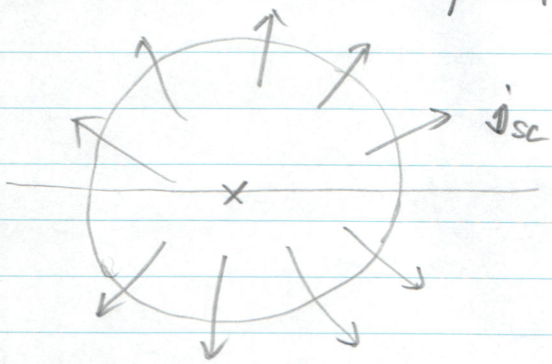
$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r\to\infty)$$

入射波のフラックス : $\mathbf{j}_{in} = \dfrac{\hbar\mathbf{k}}{\mu}$



ポテンシャルがないときはこれだけ

ここに散乱波のフラックス : $\mathbf{j}_{sc} = \dfrac{k\hbar}{\mu}\dfrac{|f(\theta)|^2}{r^2}\mathbf{e}_r$ が加わる



このフラックスはどこから現れた？

標的を中心とする大きな球を考えたときに
$\mathbf{j}_{in}$ と $\mathbf{j}_{sc}$ だけではフラックスが保存されていない。
（球に入った以上のフラックスが球から出ている。）

↓

$\psi_{in}(\mathbf{r})$ と $\psi_{sc}(\mathbf{r})$ の干渉が key point.

$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu}\Big[\left(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

$$\times\Big(i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\underbrace{\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)}_{=\,ik\frac{e^{ikr}}{r} - \cancel{\frac{e^{ikr}}{r^2}}\ \sim 0\ (r\to\infty)}\mathbf{e}_r + \overbrace{\frac{1}{r^2}e^{ikr}\mathbf{e}_\theta\frac{d}{d\theta}f(\theta)}^{\sim 0\ (r\to 0)}\Big)$$

$$-\text{c.c.}\Big]$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu}\Big[i\mathbf{k} + ik|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

$$+ i\mathbf{k}f^*(\theta)\frac{e^{-ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik\mathbf{e}_r f(\theta)\frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r}$$

$$-\text{c.c.}\Big]$$

$$= \frac{\hbar\mathbf{k}}{\mu} + \frac{k\hbar}{\mu}\mathbf{e}_r|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{+\frac{k\hbar}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_k)\left[f^*(\theta)e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta)e^{ikr(1-\cos\theta)}\right]}$$

干渉項

$r\to\infty$, $\cos\theta \neq 1$ で激しく振動
→ 角度積分をすると $\theta\sim 0$ を除きゼロ

(note) $\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + (V-E)\psi = 0 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^* + (V-E)\psi^* = 0 \end{cases}$

$$\downarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

ガウスの定理 ： $\displaystyle\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{e}_r\, \underbrace{dS}_{r^2 d\hat{\boldsymbol{r}}}$

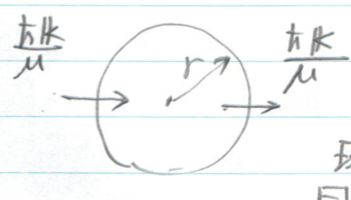
(半径 r の球面上で面積分)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{j}\; r^2 d\hat{\boldsymbol{r}} = 0}$$

$\boldsymbol{j} = \dfrac{\hbar\boldsymbol{k}}{\mu} + \dfrac{k\hbar}{\mu}\boldsymbol{e}_r\, |f(\theta)|^2 \dfrac{1}{r^2}$ + (干渉項)

$\displaystyle\int \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{j}\; r^2 d\hat{\boldsymbol{r}}$ を計算する

第1項： $\displaystyle N_1 = \int \frac{\hbar}{\mu} \underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_r}_{= k\cos\theta} r^2 d\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot r^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cos\theta = 0$



球面に入ったのと
同じ量が出ていく

第2項： $\displaystyle N_2 = \frac{k\hbar}{\mu}\int d\hat{\boldsymbol{r}}\, |f(\theta)|^2$

$$= \frac{k\hbar}{\mu}\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k\hbar}{\mu}\sigma$$

第3項：

$$N_3 = \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}\int \underbrace{r^2 d\hat{r}}_{= 2\pi r^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)} (1+\cos\theta)\left[f^*(\theta)\, e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta)\, e^{ikr(1-\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot 2\pi r\left\{ -\frac{1}{ikr} f(\theta)(1+\cos\theta)\, e^{ikr(1-\cos\theta)}\Big|_{\cos\theta=-1}^{1} + \frac{1}{ikr}\underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\left[\frac{d}{d(\cos\theta)} f(\theta)(1+\cos\theta)\right] e^{ikr(1-\cos\theta)}}_{\sim O(\frac{1}{r})} + c.c. \right\} \quad \sim 0$$

（もう一度部分積分をすると $1/r$ が出てくる。）

$$\sim \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot 2\pi \cancel{r}\left(-\frac{2}{ik\cancel{r}} f(0) + \frac{2}{ik\cancel{r}} f^*(0)\right)$$

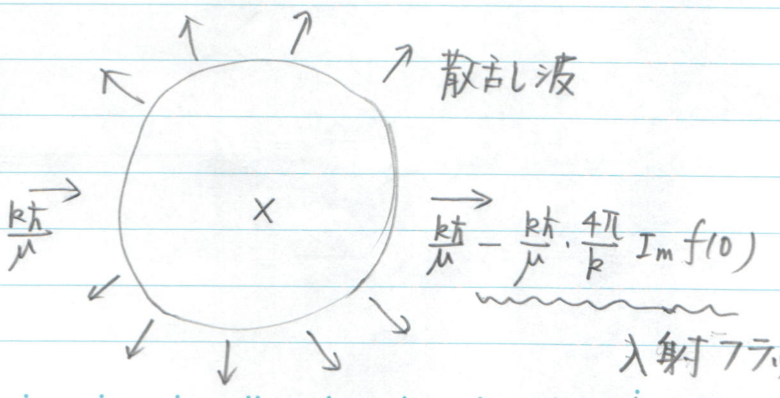
$$= -\frac{2\pi\hbar}{\mu}\cdot\frac{1}{i}\left(f(0) - f^*(0)\right)$$

$$= -\frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{4\pi}{k}\, \mathrm{Im}\, f(0)$$

$$\Downarrow \quad 0 = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{k\hbar}{\mu}\sigma - \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(0)$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(0)}$$

光学定理



入射フラックスの減少分が
散乱波のフラックスになる.