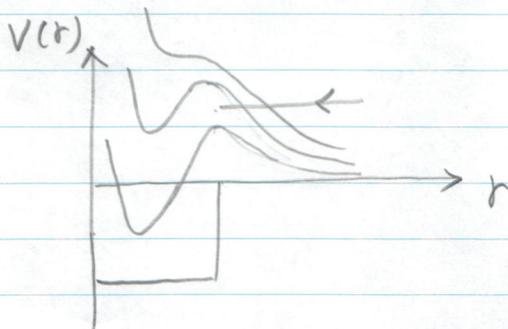


§ 低エネルギー - 散乱 と 散乱長

$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \quad \text{と書くと}$$

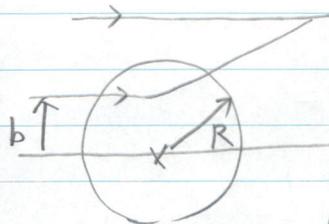
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力ポテンシャル}} - E \right) u_l(r) = 0$$

遠心力ポテンシャル



反射が起きるためには
ポテンシャルのレンジで
トンネルしなければなら
ない

↓
大きな l は 寄与しない。



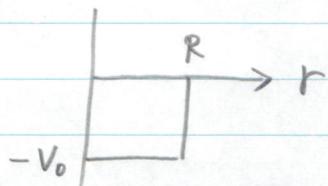
古典的には標的から
相互作用レンジ R の内側
に入る部分波 (b ≤ R) のみ
が寄与 → l_{max} = kR

↓ 部分波解析は低エネルギー
で特に有効。

E ~ 0 時は l=0 のみが寄与

以下, E ~ 0, l=0 を考える。

(例) 井戸型ポテンシャル



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

波動関数:
$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin \tilde{k} r & (r \leq R) \\ B \sin kr + C \cos kr & (r > R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

(note)

$$B \sin kR + C \cos kR = B \left(\sin kR + \frac{C}{B} \cos kR \right)$$

||

$$\begin{aligned} B' \sin(kR + \delta) &= B' (\sin kR \cos \delta + \cos kR \sin \delta) \\ &= B' \cos \delta (\sin kR + \tan \delta \cos kR) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B}$$

$r = R$ の波動関数の接続

$$\begin{cases} A \sin \tilde{k} R = B \sin kR + C \cos kR \\ A \tilde{k} \cos \tilde{k} R = B k \cos kR - C k \sin kR \end{cases}$$

↓

$$\frac{1}{\tilde{k}} \frac{\sin \tilde{k} R}{\cos \tilde{k} R} = \frac{\sin kR + \frac{C}{B} \cos kR}{k \cos kR - \frac{C}{B} k \sin kR}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B} = \frac{k \cos kR \sin \tilde{k} R - \tilde{k} \sin kR \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R \cos kR + k \sin kR \sin \tilde{k} R}$$

$$\sim \frac{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R} \cdot k \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow k \cot \delta = \frac{\tilde{k} \cos \tilde{k} R}{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R} = \text{const.}$$

$$\equiv -\frac{1}{a} \quad (a: \text{散乱長})$$

(note) $l \neq 0$ のときは $\delta_l \propto k^{2l+1}$ となる。

(note) $E \ll |V_0|$ のとき, $k \rightarrow -k$ に δ は
 $\tan \delta \rightarrow -\tan \delta$

$$\Rightarrow k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} \underbrace{r_{\text{eff}}}_{\text{有効距離}} k^2 + \dots$$

cf. 剛体球による散乱 (s-wave)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr + \delta)$$

$$u(r=a) = 0 \quad \leadsto \quad ka + \delta = 0$$

$$\leadsto \quad \underbrace{\frac{k}{\delta}}_S = -\frac{1}{\underbrace{a}_{\text{散乱長}}}$$

$$k \cot \delta$$

散乱長 \leftrightarrow 剛体球の半径.

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

↓ 低エネルギー- 散乱は a, r_{eff} の 2 つの パラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー- 散乱が必要。)

• 散乱長の意味

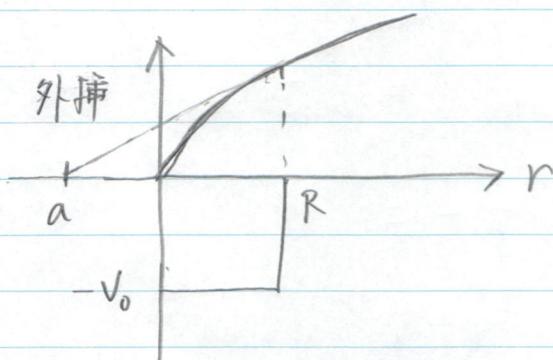
$$r \geq R \quad U_0(r) \propto \sin(kr + \delta) \sim kr + \delta \quad (k \rightarrow 0)$$

$$= k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$$

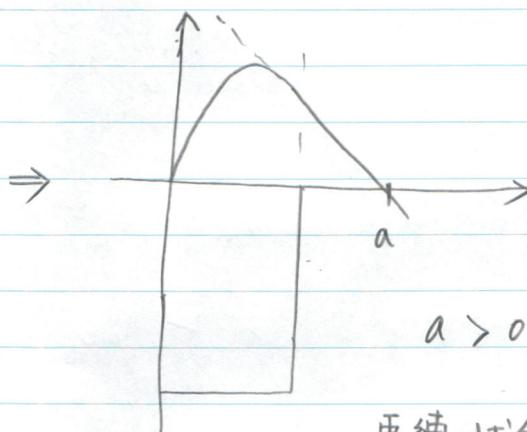
$$-\frac{1}{a} = k \cot \delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Downarrow U_0(r) \propto (r - a) \quad (k \rightarrow 0)$$

これは $r = a$ でゼロ。



$a < 0$



$a > 0$

束縛状態があるとき

ゼロ-エネルギー- で束縛するとき
 $a = \infty$ (ユ=タリ- 極限)

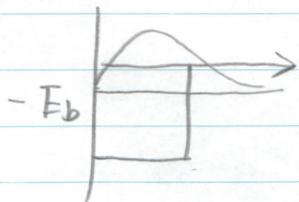
・束縛状態からの反射係数

戸型ポテンシャル

$$a = (\tilde{k}R - \tan \tilde{k}R) \cdot \frac{1}{\tilde{k}} = R \left(1 - \frac{\tan \tilde{k}R}{\tilde{k}R} \right)$$

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

束縛状態がある時



$$u_B(r) = \begin{cases} A \sin \tilde{k}'r & (r \leq R) \\ B e^{-\tilde{\kappa}r} & (r > R) \end{cases}$$

$$\tilde{k}' = \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} (V_0 - E_b)}$$

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} E_b}$$

(note) 弱束縛であれば $E_b \sim 0$,
 $\tilde{k}' \sim \tilde{k}$

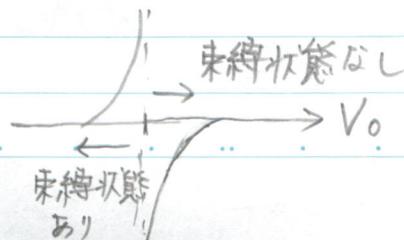
波動関数の接続: $\frac{\tilde{k}' \cos \tilde{k}'R}{\sin \tilde{k}'R} = \frac{-\tilde{\kappa} e^{-\tilde{\kappa}R}}{e^{-\tilde{\kappa}R}}$

$$\Downarrow a = R \left(1 - \frac{\tan \tilde{k}'R}{\tilde{k}'R} \right) \sim R \left(1 - \frac{\tan \tilde{k}R}{\tilde{k}R} \right)$$

$$= R + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \sim \frac{1}{\tilde{\kappa}} (> 0)$$

$$E_b \rightarrow 0 \text{ ならば } \tilde{\kappa} \rightarrow 0$$

$$\Downarrow a \rightarrow +\infty$$



• 有効ポテンシャル

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} v_{\text{eff}} k^2$$

低エネルギーではポテンシャルの詳細は重要ではない。

$$\rightarrow v_{\text{eff}}(r) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a \delta(r) \leftarrow \text{係数は散乱長が } a \text{ になるように決定}$$

を使えば解析をしても答えは変わらない。
(ゼロ・レンジなので解析がしやすい。)

※ 低エネルギーでは波長が長くなる

→ ポテンシャルのレンジの(多少の)違いは見えない。

cf. 冷却原子の研究など (BEC)

$$\begin{aligned} \text{(note)} \quad f(\theta) &\equiv f(k, k') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \underbrace{v(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}')}_{g \delta(\mathbf{r}')} \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \cdot g \psi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{リッポマン・シュウィンガー方程式} : \psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int d\mathbf{r}' G^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad \times v(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - g G^{(+)}(\mathbf{r}, 0) \psi(0) \end{aligned}$$

$$\sim \psi(0) = 1 - g G^{(+)}(0, 0) \psi(0)$$

$$\rightarrow f(k, k') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} g (1 - g G^{(+)}(0,0) \chi(0))$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} g - g G^{(+)}(0,0) f(k, k')$$

$$\text{(note)} G^{(+)}(k, k') = \int \frac{dk''}{(2\pi)^3} e^{ik'' \cdot r} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k''^2 - k^2 - i\eta}$$

$$\rightarrow f(k, k') = -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu g}{\hbar^2} f(k, k') \int \frac{dk''}{(2\pi)^3} \frac{1}{k''^2 - k^2 - i\eta} \times e^{-ik'' \cdot r}$$

$$= -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu g}{\hbar^2} f(k, k') \cdot \underbrace{\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{kc} k''^2 dk'' \frac{1}{k''^2 - k^2 - i\eta}}_{(k \sim 0)}$$

$$\int_0^{kc} k''^2 dk'' \frac{1}{k''^2} = kc$$

$$= -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu g}{\hbar^2} \cdot \frac{kc}{2\pi^2} f(k, k')$$

部分波展開

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{k}') \cdot \frac{4\pi}{2l+1}$$

$$\sim \frac{S_0 - 1}{2ik} \quad (E \sim 0)$$

$$= \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik} \sim \frac{2i\delta}{2ik} = \frac{\delta}{k} \sim -a$$

$$\uparrow$$

$$k \cot \delta \sim \frac{k}{a} \sim -\frac{1}{a}$$

$$\rightarrow -a = -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2} + \frac{2\mu g}{\hbar^2} \cdot \frac{kc}{2\pi^2} a = -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{2kc}{\pi} a\right)$$

$$\rightarrow g = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a \cdot \frac{1}{1 - \frac{2kc}{\pi} a} \sim \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a \quad (kca \ll 1 \text{ 近似})$$

cf. H. Esbensen et al., PRC 56 (97) 3054
Fetter - Walecka, Eqs. (11.14), (11.53)

§. 共鳴散乱

ある E だけ

S 行列が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ に一位の極 (ポールの) を持つとする。

このとき、

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} = e^{2i\delta_{bg}} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} \right)$$

とする。 $\delta_{bg}(E)$ は E のゆるやかな関数 (バックグラウンド位相差)。 $|S_l(E)| = 1$ に注意。

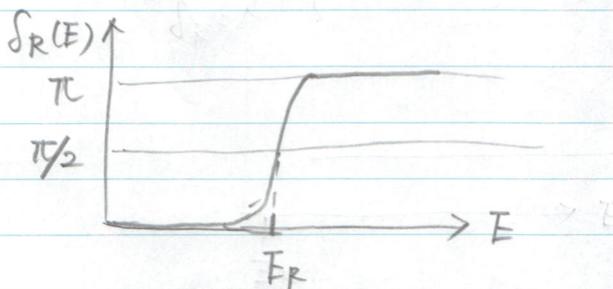
(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R(E)}$ とすると (c は実数)

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \frac{c e^{i\delta_R(E)}}{c e^{-i\delta_R(E)}} = e^{2i(\underbrace{\delta_{bg}(E) + \delta_R(E)}_{\delta_l(E)})}$$

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R} = c (\cos \delta_R + i \sin \delta_R)$

$$\Rightarrow \tan \delta_R = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_l(E) = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R} \right) + \delta_{bg}(E)}$$

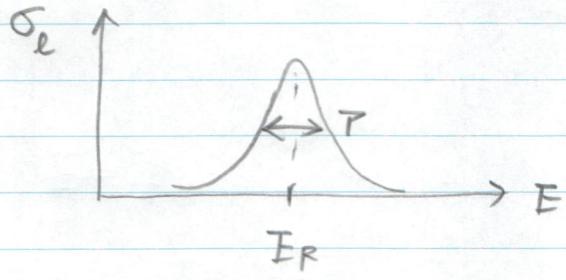


$\delta_R(E)$ は $E = E_R$ で $\pi/2$ を切る。

今、簡単のため $\delta_{bg}(E) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}}{1 + \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2 + \frac{P^2}{4}} \end{aligned}$$

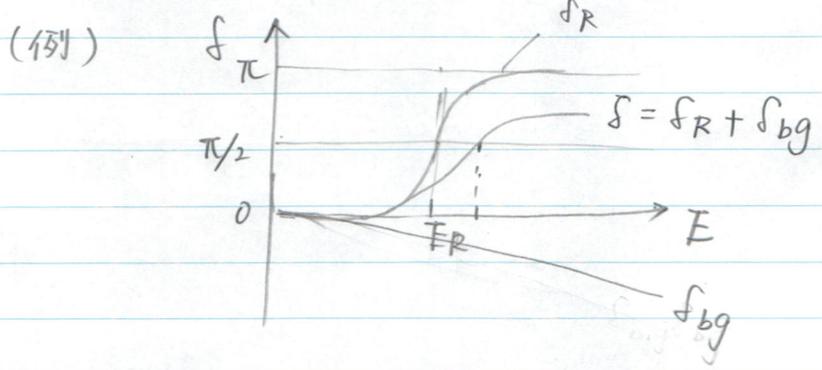
(Breit-Wigner の公式)



共鳴散乱

共鳴は $\delta_R(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す。

(note) よくある誤解。「共鳴エネルギー」は $\delta(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す → これは間違っている。一般的に $\delta_{bg}(E)$ のために $E = E_R$ で $\delta = \frac{\pi}{2}$ になるとは限らない。

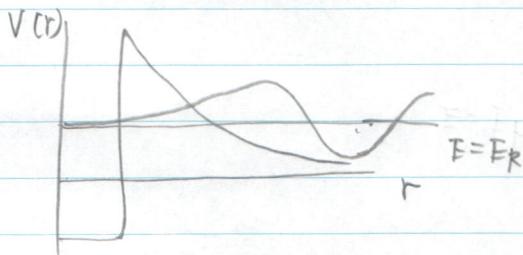


- $\delta_R = \pi/2$ 時は何が起こっているのか?
再び $\delta_{bg} = 0$ とする。

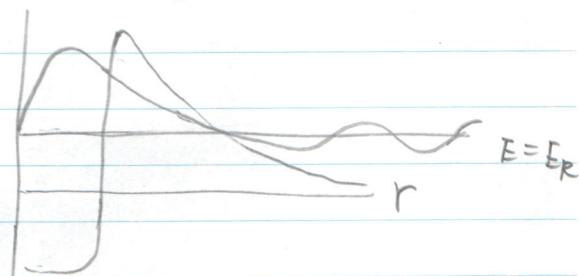
$$\begin{aligned}
 u_e(r) &\rightarrow e^{-i(kr - \frac{e\pi}{2})} - S_e e^{i(kr - \frac{e\pi}{2})} \\
 &= \underbrace{(1 - S_e) \cos(kr - \frac{e\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ -kr n_e(kr) \\ \text{の漸近形}}} - i \underbrace{(1 + S_e) \sin(kr - \frac{e\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ kr j_e(kr) \\ \text{の漸近形}}}
 \end{aligned}$$

(note) $j_e(x)$ は $x=0$ 時正則, $n_e(x)$ は $x=0$ 時発散

$\delta_e = 0$ 又は $\delta_e = \pi$ のとき
 $S_e = 1$
 $\rightarrow u_e = -2i kr j_e(kr)$

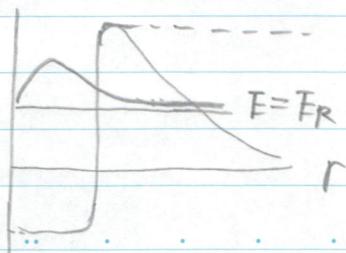


$\delta_e = \pi/2$ のとき $S_e = -1$
 $\rightarrow u_e(r) = -2kr n_e(kr)$

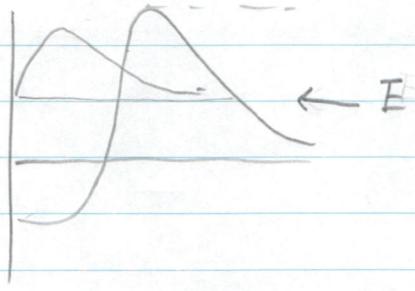


束縛状態のように振るまう

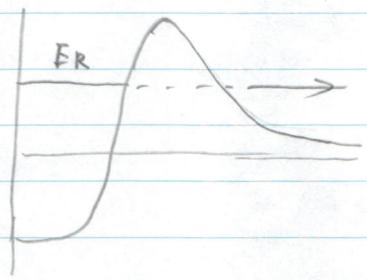
\rightarrow 尖鳴状態は連続状態に埋めこまれた束縛状態のようなもの



ポテンシャルを左のように変形すると束縛状態がなくなる。



入射 E がこの束縛状態の E に一致すると共鳴



ポテンシャルの内側に波動関数がしばらくトランプオンされ、やがてトンネル効果で抜けていくヒクチャー。

(note) 状態が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ のエネルギー固有値を持つとすれば

$$\begin{aligned}
 P_{sur}(t) &\equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\frac{\Gamma}{2})t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= e^{-\Gamma t/\hbar} \cdot |\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle|^2
 \end{aligned}$$

$\downarrow \tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma} = \text{共鳴状態の寿命}$

(note) $E = E_R + i\frac{\Gamma}{2}$ の極は、逆にポテンシャル内側に波動関数が時間とともにたまっていくという状態
 → 物理的な境界条件として適していない。