

§. 共鳴散乱

ある E について

S 行列が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ に一位の極 (ポールの) を持つとする。

このとき、

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} = e^{2i\delta_{bg}(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} \right)$$

とする。 $\delta_{bg}(E)$ は E のゆるやかな関数 (バックグラウンド位相差)。 $|S_l(E)| = 1$ に注意。

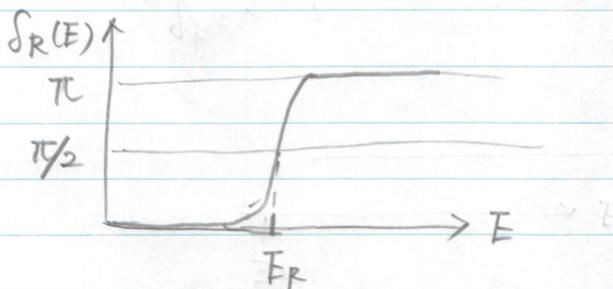
(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R(E)}$ とすると (c は実数)

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \frac{c e^{i\delta_R(E)}}{c e^{-i\delta_R(E)}} = e^{2i(\underbrace{\delta_{bg}(E) + \delta_R(E)}_{\delta_l(E)})}$$

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R} = c (\cos \delta_R + i \sin \delta_R)$

$$\Rightarrow \tan \delta_R = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_l(E) = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R} \right) + \delta_{bg}(E)}$$

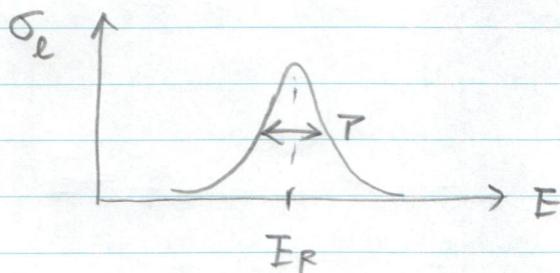


$\delta_R(E)$ は $E = E_R$ で $\pi/2$ を切る。

今、簡単のため $\delta_{bg}(E) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}}{1 + \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2 + \frac{P^2}{4}} \end{aligned}$$

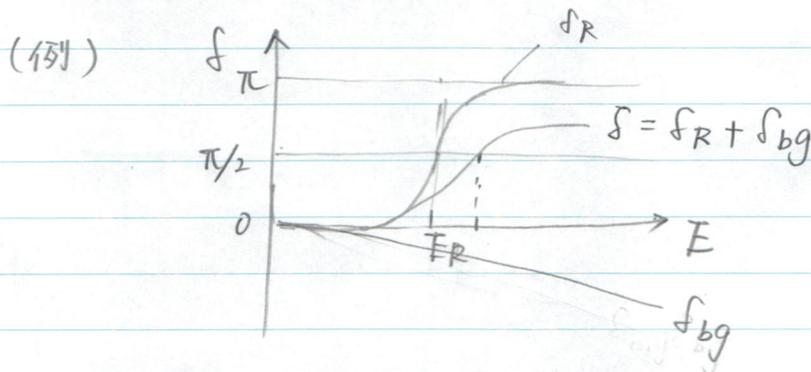
(Breit-Wigner の公式)



共鳴散乱

共鳴は $\delta_R(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す。

(note) よくある誤解。「共鳴エネルギー」は $\delta(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す → これは間違っている。一般的に $\delta_{bg}(E)$ のために $E = E_R$ で $\delta = \frac{\pi}{2}$ になるとは限らない。

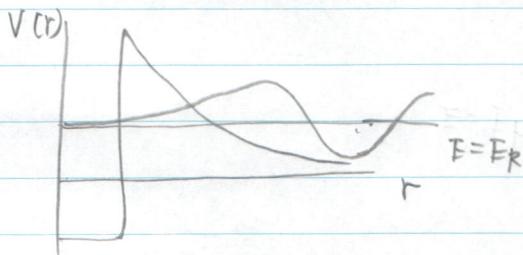


- $\delta_R = \pi/2$ 時は何が起こっているのか?
再び $\delta_{bg} = 0$ とする。

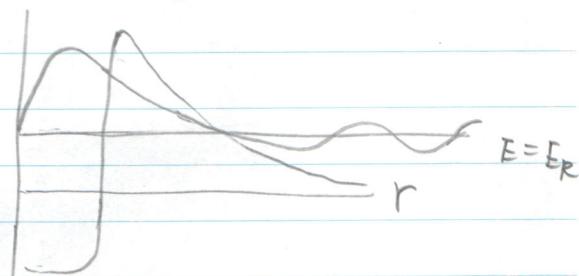
$$\begin{aligned}
 u_e(r) &\rightarrow e^{-i(kr - \frac{e\pi}{2})} - S_e e^{i(kr - \frac{e\pi}{2})} \\
 &= \underbrace{(1 - S_e) \cos(kr - \frac{e\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ -kr n_e(kr) \\ \text{の漸近形}}} - i \underbrace{(1 + S_e) \sin(kr - \frac{e\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ kr j_e(kr) \\ \text{の漸近形}}}
 \end{aligned}$$

(note) $j_e(x)$ は $x=0$ 時正則, $n_e(x)$ は $x=0$ 時発散

$\delta_e = 0$ 又は $\delta_e = \pi$ のとき
 $S_e = 1$
 $\rightarrow u_e = -2i kr j_e(kr)$

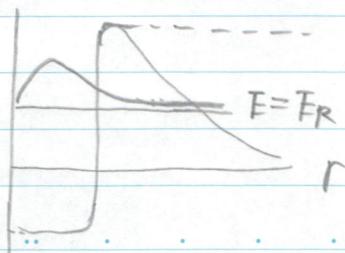


$\delta_e = \pi/2$ のとき $S_e = -1$
 $\rightarrow u_e(r) = -2kr n_e(kr)$

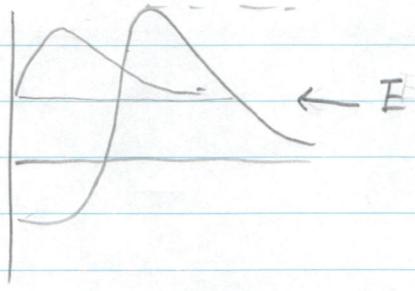


束縛状態のように振るまう

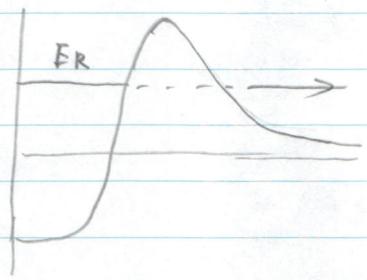
\rightarrow 尖鳴状態は連続状態に埋めこまれた束縛状態のようなもの



ポテンシャルを左のように変形すると束縛状態がなくなる。



入射 E がこの束縛状態の E に一致すると共鳴



ポテンシャルの内側に波動関数がしばらくトランプオンされ、やがてトンネル効果で抜けていくヒクチャー。

(note) 状態が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ のエネルギー固有値を持つとすれば

$$P_{sur}(t) \equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$$

$$= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\frac{\Gamma}{2})t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2$$

$$= e^{-\Gamma t/\hbar} \cdot |\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle|^2$$

↓ $\tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma} =$ 共鳴状態の寿命。

(note) $E = E_R + i\frac{\Gamma}{2}$ の極は、逆にポテンシャル内側に波動関数が時間とともにたまっていくという状態
→ 物理的な境界条件として適していない。

• バリオン状態,

$l=0$ を考える。遠ルカ障壁がない a で, 引カポテンシャル $V(r)$ は共鳴状態を作らない。

→ でも断面積は大きくなりうる
値 $|\cot \delta|^{-2}$

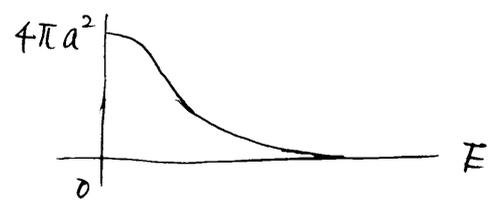
$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } S &= e^{2i\delta} = \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos \delta + i \sin \delta}{\cos \delta - i \sin \delta} \\ &= \frac{\cot \delta + i}{\cot \delta - i} = \frac{-\frac{1}{a} + ik}{-\frac{1}{a} - ik} \end{aligned}$$

$k = i \frac{1}{a}$ に極を持つ。

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{(k \cot \delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2$$

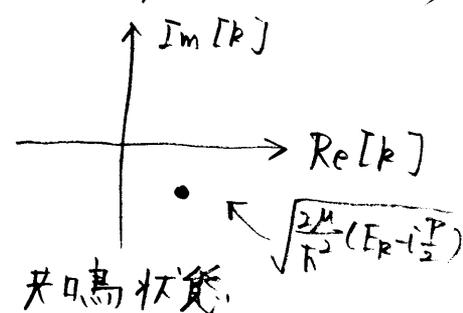
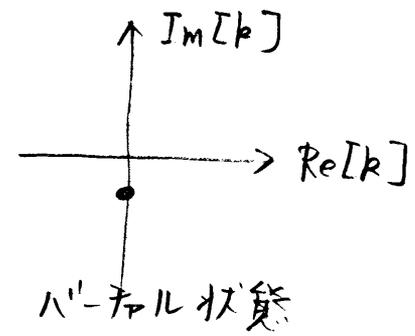
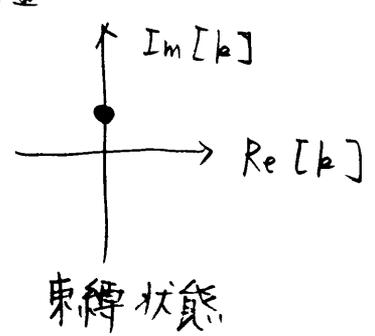
→ a が大きければ σ が大きくなる



$a > 0$ なら浅い束縛状態,

$a < 0$ なら "バリオン状態" (つまり非束縛に成っている "状態" (a 以下のもの))

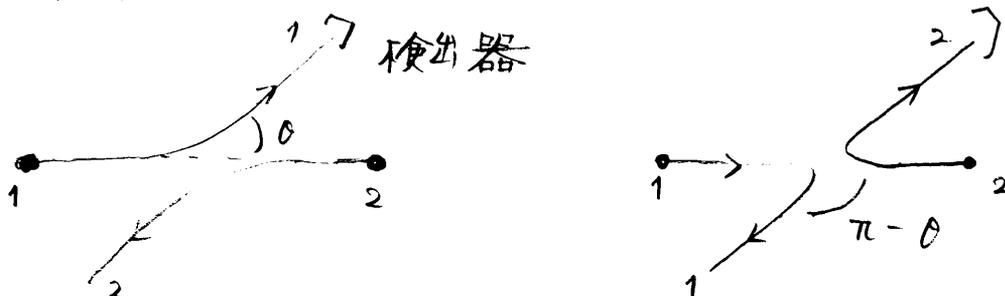
$S(k)$ の極



* いずれも, 極が実軸に近ければ, 実軸上の現象 (散乱問題) に大きな影響を及ぼし断面積が大きくなる。

§. 同種粒子による散乱

同種粒子



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
こういう場合

同種粒子: 粒子の入れかえに対し波動関数は
対称 / 反対称

$$\Psi_{\pm}(r) = \Psi(r) \pm \Psi(-r)$$

$$\rightarrow (e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r})$$

空間部分に
対称性

$$+ \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi - \theta)]}_{\text{||| } f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

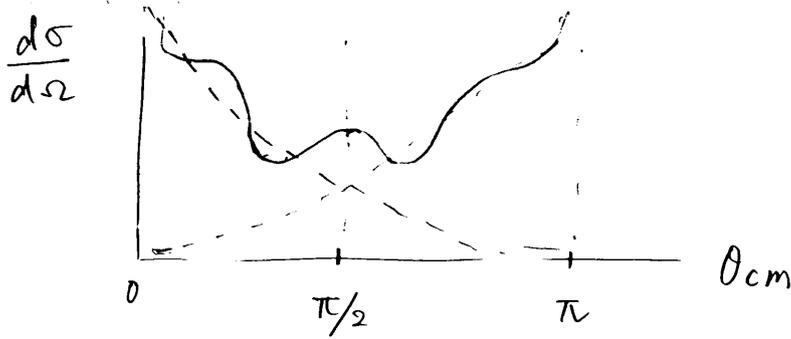
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm 2 \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)]$$

干渉項

↑

実際に $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反応など(観測)



- 断面積は $\theta_{cm} = \pi/2$ で対称
- 干渉項のために振動する

- $s \ll 0$ の粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

- $s \gg 1/2$ の粒子 (フェルミオン)

$$\Psi(1, 2) = \Psi(r_1, r_2) \chi_{spin}$$

対称
反対称
又は 反対称
対称

$$S = 0$$

$$\chi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{反対称}$$

→ 空間部分は対称

$$\Downarrow \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

$$S = 1$$

$$\chi_{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{対称}$$

$$\Downarrow \frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(\theta)|^2 \quad \text{→ 空間部分は反対称}$$

$s \gg 0$ 偏極が反位時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \text{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$

§. 7-ロソ波動関数

7-ロソポテンシャル: $V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$

長距離力 \rightarrow r が いくら大きくなっても影響を受ける (波動関数が平面波にならない)



$S_e = 1$ になることはない



$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

は収束しない

\rightarrow 別の取扱いが必要

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - E\right) \psi(r) = 0$$

放射線座標 $\xi = r(1 - \cos\theta) = r - z$
 $\zeta = r(1 + \cos\theta) = r + z$

を、使ってこの方程式を解く

$$\psi(\xi, \zeta) = c e^{ikz} F(-i\eta, 1, ik\xi)$$

合流超幾何関数

$$\eta = \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v} \quad (\psi'' = \lambda - \frac{\eta}{\xi} \psi' - \frac{\eta}{\xi^2} \psi)$$

漸近形:

$$\psi(\xi, \eta) \rightarrow \frac{c e^{\frac{\eta\pi}{2}}}{T(1+i\eta)} \left\{ e^{i(kz + \eta \ln(r-z))} + f_c(0) \frac{e^{ikr - i\eta \ln 2kr}}{r} \right\}$$

$$f_c(0) = - \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0}$$

$$\sigma_0 = \arg T(1+i\eta)$$

(note) $\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = |f_c(0)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$

(ポールの近似で求めた
もの一致)

~

各 $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して \hat{r} の方向に l 階のラゲルジュ方程式を解くと:

$$\psi_{lm}(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r})$$

$$\downarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - E \right) u_l(r) = 0$$

解はポインタカ関数

線形独立な解

$$u_l(r) = \begin{cases} F_l(kr) \rightarrow \sin(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \\ G_l(kr) \rightarrow \cos(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \end{cases}$$

$l=0$ の phase shift: $\sigma_0 = \arg T(1+i\eta)$