散乱理論

§. 散乱の基本概念

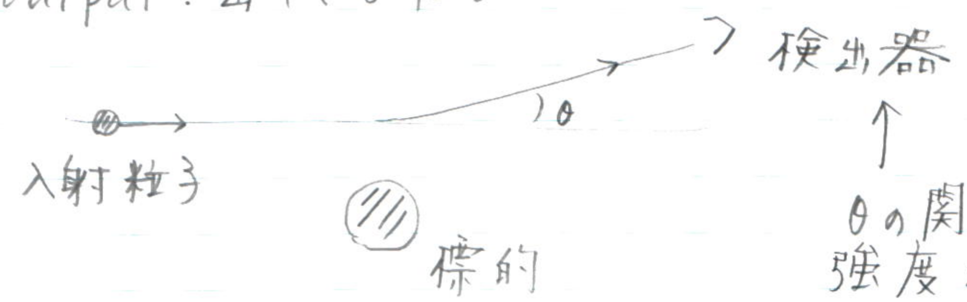
$$\underbrace{\xrightarrow[\text{刺激}]{\text{input}} \boxed{\text{対象}} \xrightarrow[\text{応答}]{\text{output}}}_{\text{散乱理論}}$$

・古典系（マクロな物体）

input：（太陽からくる）光
output：反射光
　　波長 → 色
　　方向 → 形

・量子系（ミクロな物体）

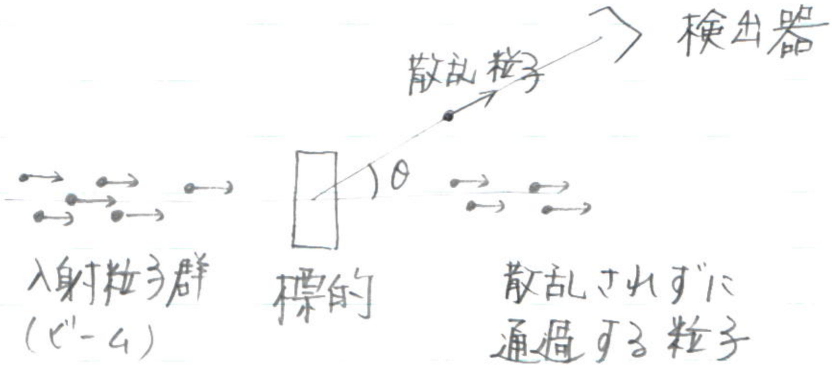
input：（加速器で加速された）入射粒子
output：出てくる粒子



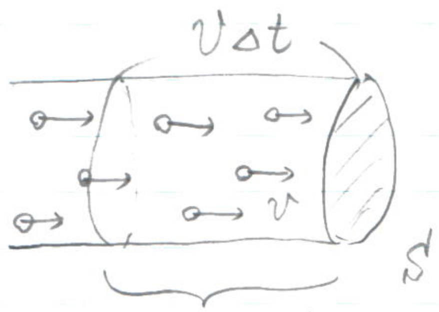
↑
θの関数として粒子強度を測定
↕
散乱断面積

cf. ラザフォード散乱
→ 原子核の発見

§. 散乱実験と散乱断面積



・流束(フラックス)
単位時間当たりに単位面積をもつ面を通過する粒子の数



この領域にある粒子が時間Δtの間に面を通過する。

$$N = S \cdot v\Delta t \cdot \rho$$

ρ: 数密度

$$\boxed{j = \frac{N}{S\Delta t} = v\rho}$$

・イベント・レート（単位時間あたりに検出器で検出する粒子数）

$$R \propto \underbrace{N_T}_{標的の個数} \; \underbrace{j}_{フラックス} \cdot \underbrace{\varepsilon}_{検出効率}$$

・散乱断面積

この比例係数を σ（散乱断面積）とする。

$$\boxed{R = N_T \, j \, \sigma}$$

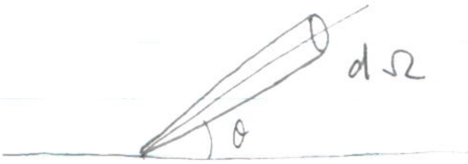
（簡単のため、以下 $\varepsilon = 1$ として議論する。）

$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{R}{N_T} \cdot \frac{1}{j}$$

σ: 標的粒子が1つだけある時の反応率を入射フラックスで割ったもの
⟶ 量子力学的取り扱いへ

(note) σ: 実験のセットアップに依らない量

・微分散乱断面積



角度 (θ, φ) 方向の微小立体角 $d\Omega$ 内で検出する粒子数

$$dR(\theta, \varphi) = N_T \, j \, \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{微分散乱断面積} \cdot d\Omega \quad \rightarrow \quad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

・断面積の次元

$$R = N_T j \cdot \sigma$$

$$R = [個/T]$$

$$N_T = [個]$$

$$j = [個/T/S]$$

$$\Downarrow \quad \sigma = [S]$$ 面積の次元

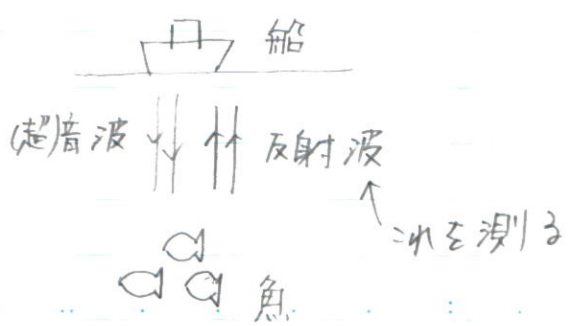
"入射粒子が見る effective な標的粒子の大きさ"

(note) $dR(\theta, \varphi) = N_T j \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega$

$$\rightarrow N_T = \frac{\frac{dR}{d\Omega}}{j \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

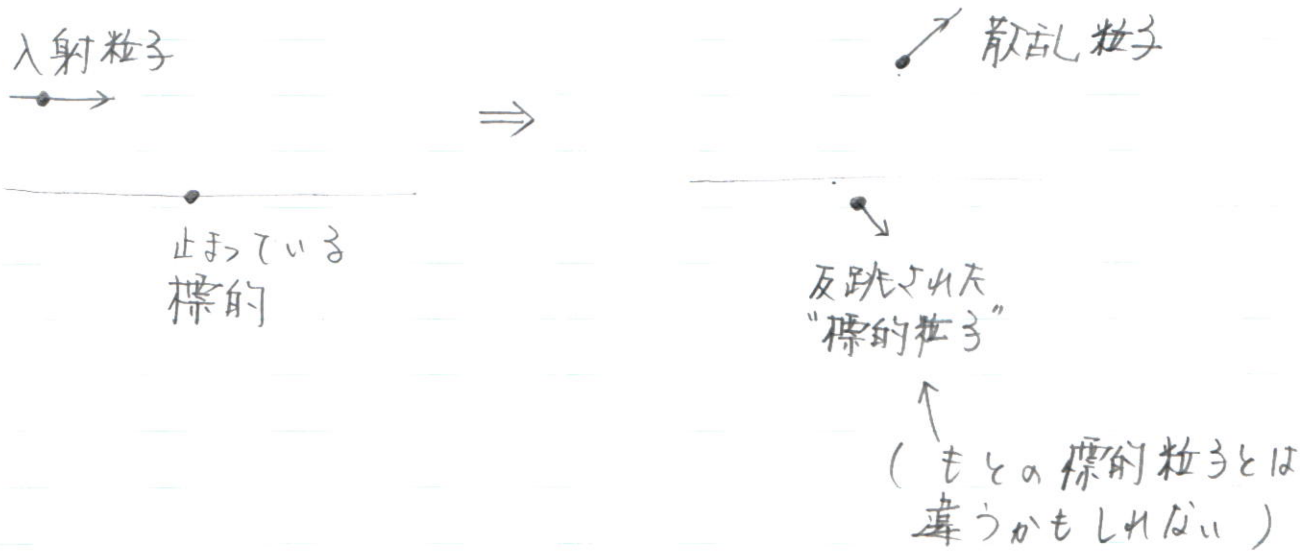
もし $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を事前に知っていれば $\frac{dR}{d\Omega}$ を測れば N_T がわかる (j は実験でコントロールできる)。

→ 魚群探知器の原理



§. 2体系の量子力学：実験室系と重心系

実験室系



重心系

理論的には重心系で考えた方が簡単

常に2粒子の運動量が逆向きで大きさが等しい
(↔ 重心固定系)

※ 標的の質量が無限大なら 実験室系 = 重心系

・2体系の量子力学（復習）

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m_2} + V(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)$$

相対座標：　$\mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$

重心座標：　$\mathbb{R} = \dfrac{m_1\mathbb{r}_1 + m_2\mathbb{r}_2}{m_1+m_2}$

これと共役な運動量は

$$\mathbb{p} = \frac{m_2\mathbb{P}_1 - m_1\mathbb{P}_2}{m_1+m_2}, \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$$

（　$\mathbb{p} = \alpha\mathbb{P}_1 + \beta\mathbb{P}_2$　とおいて

$[\mathbb{p}, \mathbb{r}] = \frac{\hbar}{i}$，$[\mathbb{p}, \mathbb{R}] = 0$

となるように α, β を決定。$\mathbb{P}$ も同様。

答えを知っていれば，

$\mathbb{P} = (m_1+m_2)\dot{\mathbb{R}}$，　$\mathbb{p} = \mu\dot{\mathbb{r}}$　）

↓

$$H = \underbrace{\frac{\mathbb{P}^2}{2M}}_{H_{cm}} + \underbrace{\frac{\mathbb{p}^2}{2\mu} + V(\mathbb{r})}_{H_{rel}} \quad ; \quad M = m_1 + m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

(note)

$$\frac{\mathbb{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} = \frac{(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2)^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{m_1+m_2}{2m_1m_2}\left(\frac{m_2\mathbb{P}_1 - m_1\mathbb{P}_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2(m_1+m_2)}\Big(\mathbb{P}_1^2 + \cancel{2\mathbb{P}_1\cdot\mathbb{P}_2} + \mathbb{P}_2^2 + \frac{1}{m_1m_2}\left(m_2^2\mathbb{P}_1^2 - \cancel{2m_1m_2\mathbb{P}_1\cdot\mathbb{P}_2} + m_1^2\mathbb{P}_2^2\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{2(m_1+m_2)}\left\{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\mathbb{P}_1^2 + \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\mathbb{P}_2^2\right\}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m_2}$$

・実験室系から重心系への変換

lab

相対速度 $\dot{r} = \dot{r}_1 = v_{1L}$

重心速度 $\dot{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r}_1$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2} v_{1L}$$

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 (v_{1L})^2$$

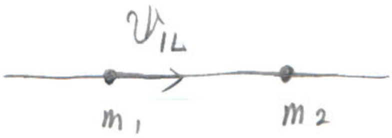
$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{\equiv E_{cm}}$$

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\mu(v_{1L})^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{1L})^2$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2} E_{lab}$$

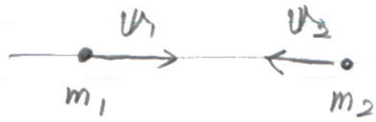
$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_{1L}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2L}^2$$
$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

lab



速度 $-\dot{R}$
でガリレイ変換

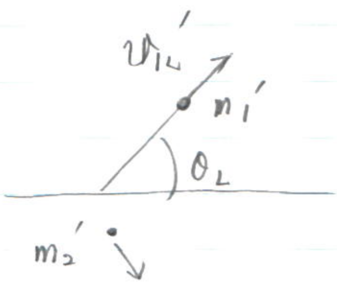
cm

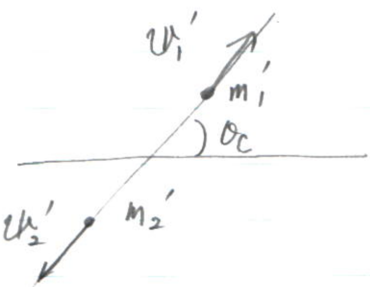


$$v_2 = -\dot{R} = -\frac{m_1 v_{1L}}{m_1+m_2}$$

$$v_1 = v_{1L} - \dot{R} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_{1L}$$

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$





$$\begin{cases} v_1' \cos\theta_c = v_{1L}' \cos\theta_L - v_2 \\ v_1' \sin\theta_c = v_{1L}' \sin\theta_L \end{cases}$$

$$\tan\theta_L = \frac{v_1' \sin\theta_c}{v_2 + v_1' \cos\theta_c} = \frac{\sin\theta_c}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos\theta_c}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_1 c^2 + m_2 c^2 = \frac{1}{2}m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2' v_2'^2 + m_1' c^2 + m_2' c^2$$

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1' v_1' + m_2' v_2' = 0$$

$$\rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2, \quad v_2' = -\frac{m_1'}{m_2'} v_1'$$

$\downarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}_{\substack{\parallel \\ E_{cm}}} + \underbrace{(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')c^2}_{\substack{\equiv \\ Q}} = \frac{1}{2}m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1'^2}{m_2'} v_1'^2$$

$$= \frac{m_1'}{2}\left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) v_1'^2$$

(note) $E_{cm} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) v_2^2$

$\downarrow$

$$\left(\frac{v_2}{v_1'}\right)^2 = \frac{m_1'}{\cancel{2}}\left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) \cdot \frac{1}{E_{cm} + Q} \cdot \frac{\cancel{2}}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2} \cdot E_{cm}$$

$$= \frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \cdot \frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} \cdot \frac{m_1' + m_2'}{m_1 + m_2}$$

$$\left(\sim \frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \cdot \frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} \quad \text{if} \quad m_1 c^2 + m_2 c^2 \gg Q \right)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

・立体角の変換

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_C}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos\theta_C} \equiv \frac{\sin\theta_C}{x + \cos\theta_C} \qquad \left(x \equiv \frac{v_2}{v_1'} \right)$$

$$\to \quad \cos\theta_L = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta_L}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\sin\theta_C}{x+\cos\theta_C}\right)^2}}$$

$$= \frac{x+\cos\theta_C}{\sqrt{x^2+2x\cos\theta_C+1}}$$

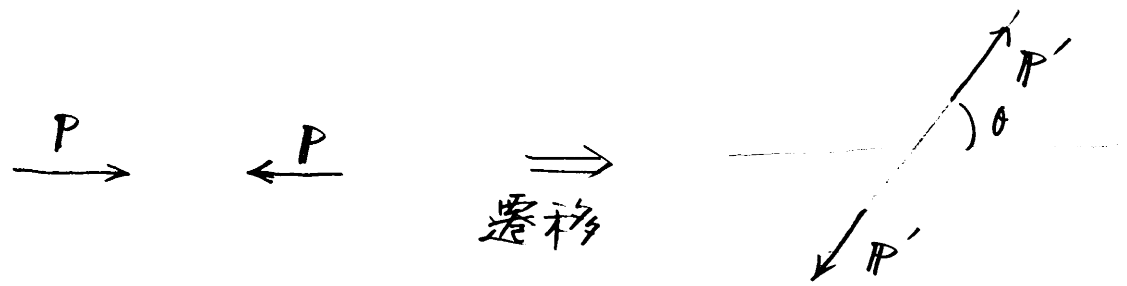
$$\frac{d\Omega_L}{d\Omega_C} = \frac{d(\cos\theta_L)}{d(\cos\theta_C)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+2x\cos\theta_C}} - \frac{1}{2}\frac{2x(x+\cos\theta_C)}{(1+2x\cos\theta_C+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}+2x\cos\theta_C - x(\cancel{x}+\cos\theta_C)}{(1+2x\cos\theta_C+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+x\cos\theta_C}{(1+2x\cos\theta_C+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

§. ボルン近似

量子力学では，重心系で初期状態から終状態への遷移として散乱をとらえる。

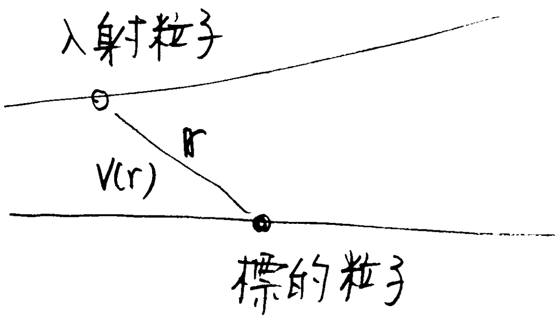


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R}{j_{in}}$$

R：単位時間当たりの遷移確率
j_{in}：入射フラックス

2体系の相対運動に対するシュレーディンガー方程式：

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \underbrace{V(r)}_{\text{2粒子間のポテンシャル}} - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0}$$



$E \gg |V(r)|$ のとき（高エネルギー散乱）
$V(r)$ を摂動として扱える → ボルン近似

$V(r)=0$ としたときの解 $\longrightarrow$ $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$ (平面波)

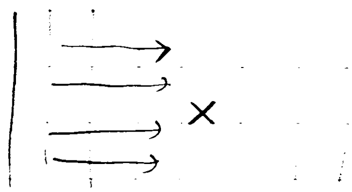
$$\psi_i(\mathbf{r}) = e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{r}/\hbar} \xrightarrow[\text{遷移}]{} \psi_f(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_f\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

$$\left(E = \frac{p_i^2}{2\mu} = \frac{p_f^2}{2\mu} \right)$$

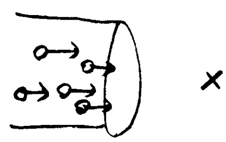
(note) 平面波は普通の意味では規格化できない:

$$\int d\mathbf{r}\ |\psi(\mathbf{r})|^2 = \int d\mathbf{r}\ 1 = \infty$$

解釈: 平面波は粒子の流れを表す



※ 標的粒子のサイズに比べて入射ビームのサイズは圧倒的に大きい。
→ ビームの端の効果は考えずに平面波で近似してもOK.



標的

フラックス: $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})\right)$

(note)
$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^* + V\psi^* \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \dot{\psi}\psi^* + \psi\dot{\psi}^*$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + \cancel{V\psi}\right)\psi^* - \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^* + \cancel{V\psi^*}\right)\psi\right\}$$

$$= -\frac{\hbar}{2i\mu} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$\Downarrow$

$$\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

とすると $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (連続の方程式)

(平面波の場合) $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \cdot \frac{i\mathbf{p}}{\hbar} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} - e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \cdot \frac{-i\mathbf{p}}{\hbar} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{p}}{\mu} = v$$

単位時間当りの全遷移確率:
← フェルミの黄金則

$$\boxed{R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi\hbar)^3} |\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f)}$$

$$\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r}\ \psi_f^*(\mathbf{r}) V(r) \psi_i(\mathbf{r})$$

$$= \int d\mathbf{r}\ e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{r}/\hbar} V(r)$$

$$\equiv \int d\mathbf{r}\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) = \tilde{V}(q)$$

フーリエ変換