§. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi = \underbrace{E}_{=\frac{k^2\hbar^2}{2\mu}}\psi$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta} \qquad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・部分波展開
$$\boxed{e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i^\ell\, \underbrace{j_\ell(kr)}_{\text{球ベッセル関数}}\, \underbrace{P_\ell(\cos\theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}}$$

(証明) $e^{ikr\cos\theta} = \sum_\ell a_\ell(r) P_\ell(\cos\theta)$ と展開する。

(note) $\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'}$

↓

$$a_\ell(r) = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{ikr\cos\theta}\, P_\ell(\cos\theta)$$

(note) $j_\ell(y) = \frac{1}{2i^\ell}\int_{-1}^{1} dx\, e^{ixy} P_\ell(x)$

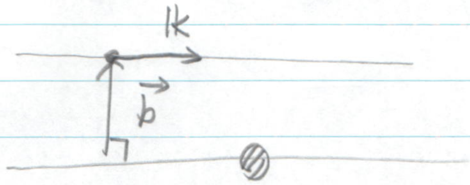
↓

$$a_\ell(r) = (2\ell+1)\, i^\ell\, j_\ell(kr)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)$$

⇒ 平面波には全ての部分波（角運動量）l が混ざっている。

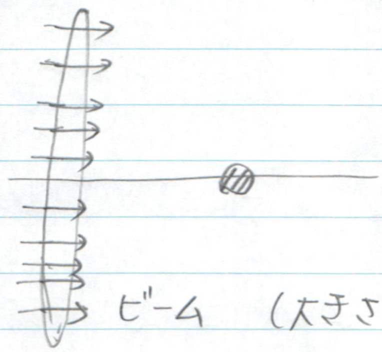
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow l = b k \hbar$

衝突係数

⇒ $\sum_{l=0}^{\infty} \cdots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合わさっている。



高エネルギー：ボルン近似がOK
平面波を使って角運動量が陽に
現れない議論ができた。

低エネルギー：各 l ごとに考える必要がある
→ 部分波解析

・部分波解析

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l j_l(kr)\,P_l(\cos\theta)$$

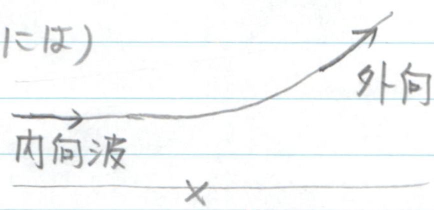
$r\to\infty$ を考える（検出器のあたりにおける振るまい）

$$j_l(kr) \longrightarrow \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right) \qquad (kr\to\infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right)$$

$$\downarrow\quad \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\,i^l\left[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}}\right]P_l(\cos\theta)$$

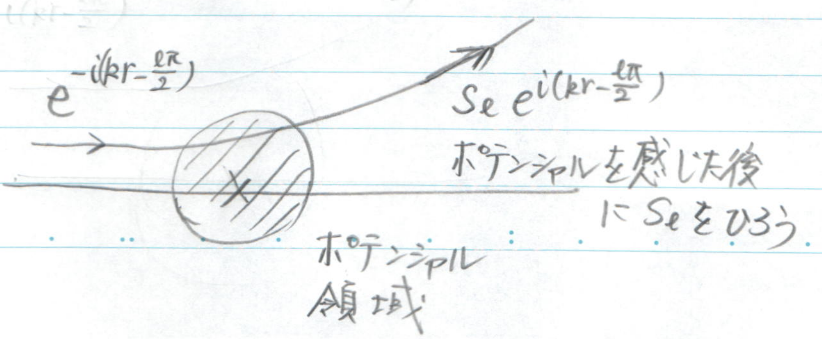
（半古典的には）



（短距離）
ポテンシャルがある場合
$r\to\infty$ では $V(r)\to 0$
↳ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow\quad \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\,i^l\left[e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right] \times P_l(\cos\theta)$$

「S行列」
ポテンシャルの効果を反映



※実ポテンシャルなら
$|S_l| = 1$
（フラックスの保存）

$$\psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{-e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, \underbrace{i^l e^{-i\frac{l\pi}{2}}}_{i^l\cdot(-i)^l = 1}\, e^{ikr}(1-S_l)\, P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

・全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega\, |f(\theta)|^2$$

$$= \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1)\frac{S_l - 1}{2ik}\cdot\frac{S_{l'}^* - 1}{-2ik} \underbrace{\int d\Omega\, P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)}_{\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{l,l'}}$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\,|S_l - 1|^2$$

◦ 位相のずれ (phase shift)

弾性散乱しか考えないときは　$|S_\ell| = 1$　(フラックスの保存)

→　$S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$　と書くと:

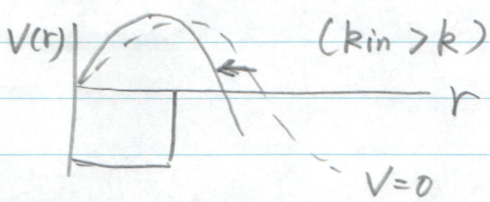
$$e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} - S_\ell\, e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}$$

$$= e^{i\delta_\ell}\left[e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)} - e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)} \right]$$

$$= -2i\, e^{i\delta_\ell} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

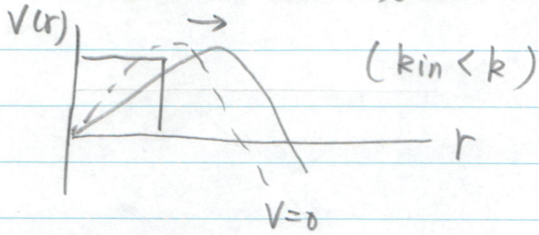
(自由粒子とくらべて
δ_ℓ だけ位相がずれた)

引力ポテンシャルの場合



$\delta_\ell > 0$

斥力ポテンシャルの場合



$\delta_\ell < 0$

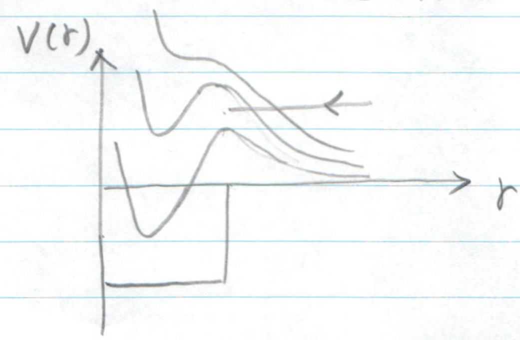
(note)　$j_\ell(kr) \to \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$

遠心力ポテンシャル $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ による
位相のずれ
(マイナス符号に注目)

§ 低エネルギー散乱と散乱長

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r})$$ と書くと

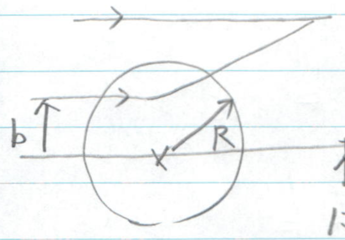
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力ポテンシャル}} - E \right) u_l(r) = 0$$



反応が起きるためにはポテンシャルのレンジまでトンネルしなければならない

↓

大きな l は寄与しない。



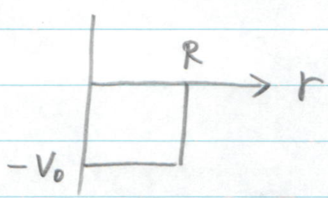
古典的には標的から相互作用レンジRの内側に入る部分波($b \leq R$)のみが寄与 → $l_{max} = kR$

∴ 部分波解析は低エネルギーで特に有効。

$E \sim 0$ では $l=0$ のみが寄与

以下，$E \sim 0$，$l=0$ を考える。

(例) 井戸型ポテンシャル



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

波動関数：
$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin \tilde{k} r & (r \leq R) \\ B \sin kr + C \cos kr & (r > R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

(note)

$$B\sin kr + C\cos kr = B\left(\sin kr + \frac{C}{B}\cos kr\right)$$

$$\parallel$$

$$B'\sin(kr+\delta) = B'(\sin kr\cos\delta + \cos kr\sin\delta)$$

$$= B'\cos\delta\,(\sin kr + \tan\delta\cos kr)$$

$$\Downarrow \quad \tan\delta = \frac{C}{B}.$$

$r = R$ での波動関数の接続

$$\begin{cases} A\sin\tilde{k}R = B\sin kR + C\cos kR \\ A\tilde{k}\cos\tilde{k}R = Bk\cos kR - Ck\sin kR \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\tilde{k}}\frac{\sin\tilde{k}R}{\cos\tilde{k}R} = \frac{\sin kR + \frac{C}{B}\cos kR}{k\cos kR - \frac{C}{B}k\sin kR}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\delta = \frac{C}{B} = \frac{k\cos kR\sin\tilde{k}R - \tilde{k}\sin kR\cos\tilde{k}R}{\tilde{k}\cos\tilde{k}R\cos kR + k\sin kR\sin\tilde{k}R}$$

$$\sim \frac{\sin\tilde{k}R - \tilde{k}R\cos\tilde{k}R}{\tilde{k}\cos\tilde{k}R}\cdot k \qquad (k\to 0)$$

$$\Downarrow$$

$$k\cot\delta = \frac{\tilde{k}\cos\tilde{k}R}{\sin\tilde{k}R - \tilde{k}R\cos\tilde{k}R} = \text{const.}$$

$$\equiv -\frac{1}{a} \qquad (a：散乱長)$$

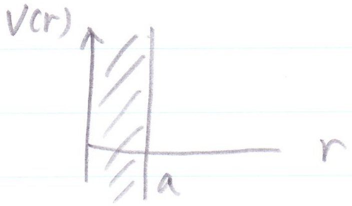
(note) $l \neq 0$ では $\delta_l \propto k^{2l+1}$ となる。

(note) $E \ll |V_0|$ のとき，$k \to -k$ にすると
$\tan\delta \to -\tan\delta$

$$\Downarrow \quad k\cot\delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\underbrace{r_{\text{eff}}}_{\text{有効距離}}k^2 + \cdots$$

cf. 剛体球による散乱 (s-wave)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r<a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr+\delta)$$

$$u(r=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka+\delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{k}{\delta}}_{\simeq\, k\cot\delta} = -\underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{散乱長}}$$

散乱長 $\leftrightarrow$ 剛体球の半径.

$$k\cot\delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{eff} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

⇕ 低エネルギー散乱は a, r_{eff} の2つのパラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー散乱が必要。)

・散乱長の意味

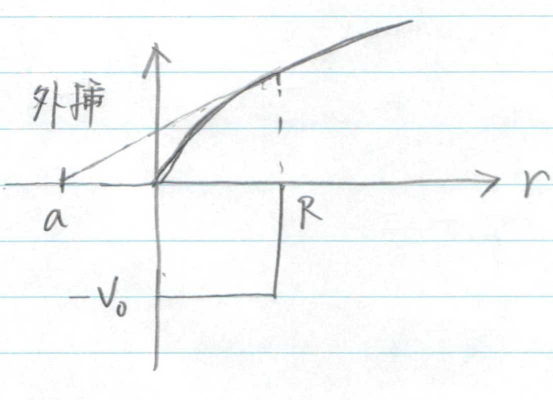
$r \geq R$ で $u_0(r) \propto \sin(kr+\delta) \sim kr+\delta \quad (k\to 0)$

$$= k\left(r+\frac{\delta}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{a} = k\cot\delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k\to 0)$$

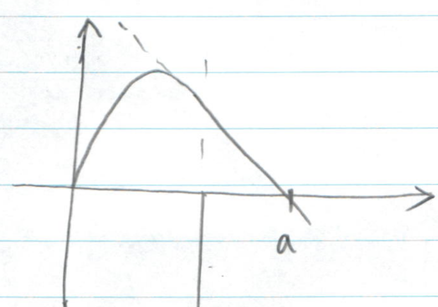
⇕ $u_0(r) \propto (r-a) \quad (k\to 0)$

これは $r=a$ でゼロ.



$a<0$

⇒



$a>0$

束縛状態があるとき

ゼロ・エネルギーで束縛するときは

$a=\infty$ (ユニタリー極限)