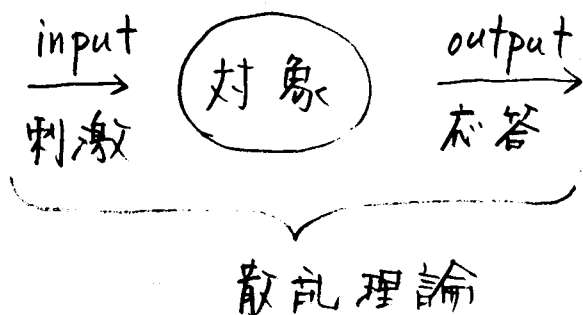


# 散乱理論

## §. 散乱の基本概念

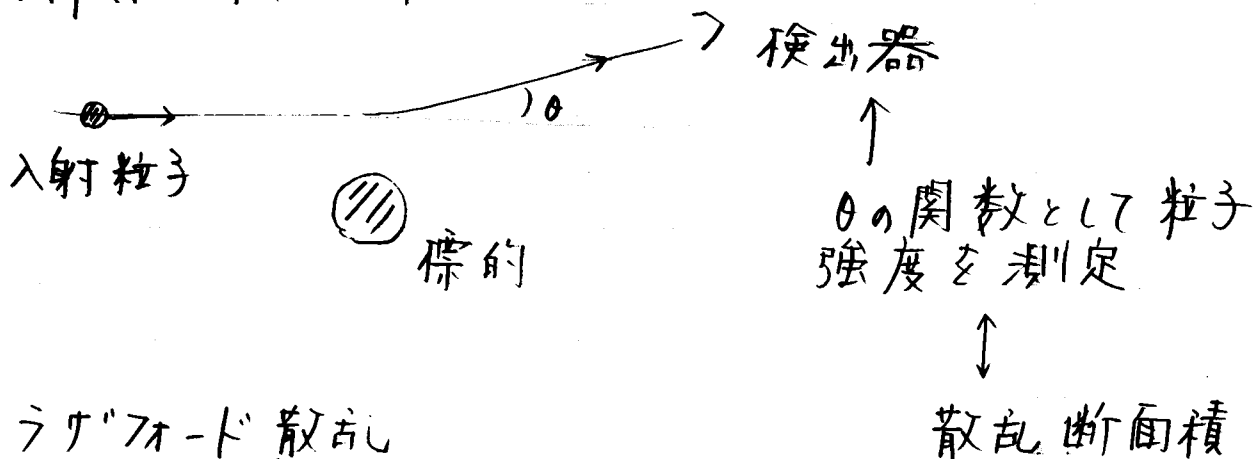


### ・古典系 (マクロな物体)

input: (太陽からくる) 光  
output: 反射光  
波長 → 色  
方向 → 形

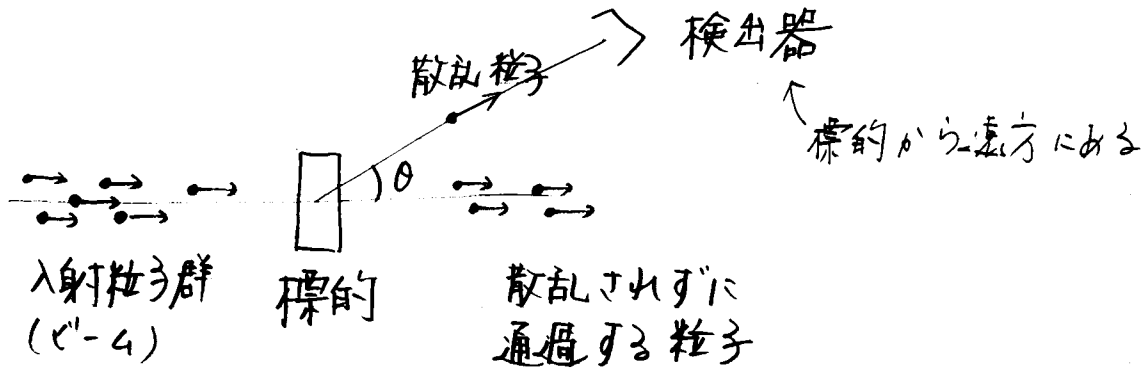
### ・量子系 (ミクロな物体)

input: (加速器で加速された) 入射粒子  
output: 出てくる粒子



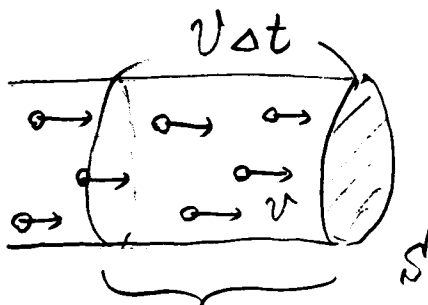
cf. ラザフォード散乱  
→ 原子核α発見

## §. 散乱実験と散乱断面積



### ・ 流束 (フラックス)

単位時間当たり単位面積をもち面を通過する粒子の数



この領域にある粒子が時間  $\Delta t$  の間に面を通過する。

↓

$$N = S \cdot v \Delta t \cdot \rho$$

↑  
数密度

↓

$$j = \frac{N}{S \Delta t} = v \rho$$

- ・ イベント・レート (単位時間あたり検出器で検出される粒子数)

$$R \propto \underbrace{N_T}_{\text{標的の個数}} \cdot \underbrace{j}_{\text{フラックス}} \cdot \underbrace{\epsilon}_{\text{検出効率}}$$

### ・ 散乱断面積

この比例係数を  $\sigma$  (散乱断面積) とする。

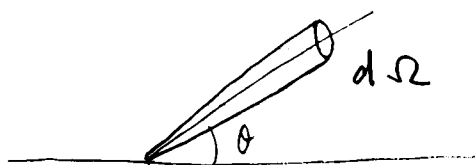
$$\boxed{R = N_T j \sigma} \quad (\text{簡単のため、以下 } \epsilon = 1 \text{ として議論する。})$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{R}{N_T} \cdot \frac{1}{j}$$

$\sigma$ : 標的粒子が1つだけある時の反応率を入射フラックスで割ったもの  
 $\rightarrow$  量子力学的取り扱い

(note)  $\sigma$ : 実験のセットアップに依らない量

### ・ 微分散乱断面積



角度  $(\theta, \varphi)$  方向の微小立体角  $d\Omega$  内で検出される粒子数

$$dR(\theta, \varphi) = N_T j \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{微分散乱断面積}} \cdot d\Omega \quad \rightarrow \quad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

## ・断面積の次元

$$R = N_T j \cdot \sigma$$

$$R = [\text{個} / \text{T}]$$

$$N_T = [\text{個}]$$

$$j = [\text{個} / \text{T} / \text{S}]$$

↓  $\sigma = [\text{S}]$  面積の次元

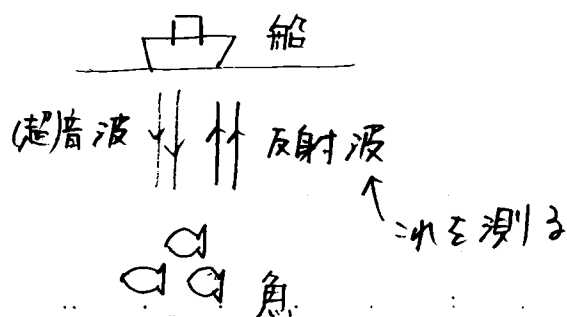
"入射粒子が見る effective な  
標的粒子の大きさ"

(note)  $dR(\theta, \varphi) = N_T j \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega$

$$\rightarrow N_T = \frac{\frac{dR}{d\Omega}}{j \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$


もし  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  を事前に知っていたら  $\frac{dR}{d\Omega}$  を測れば  $N_T$  がわかる ( $j$  は実験でコントロールできる)。

→ 魚群探知器の原理





## §. 2 体系の量子力学：実験室系と重心系


実験室系

入射粒子  


⇒

散乱粒子  



  
止まっている  
標的

  
反跳した  
"標的粒子"

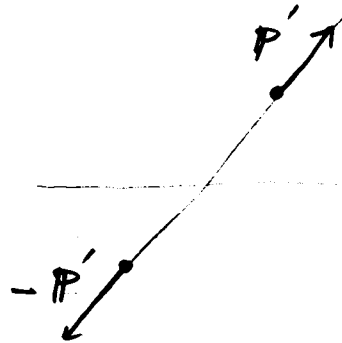
(もとの標的粒子とは  
違うかもしれない)

重心系

理論的には重心系で考え方が簡単

  
 $P$        $-P$

⇒

  
 $P'$        $-P'$

常に 2 粒子の運動量が逆向きで大きさが等しい  
( $\leftrightarrow$  重心固定系)

\* 標的の質量が無量大なら実験室系 = 重心系

• 2体系の量子力学 (復習)

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + V(r_1 - r_2)$$

相対座標:  $r = r_1 - r_2$

重心座標:  $R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

これと共役な運動量は

$$P = \frac{m_2 P_1 - m_1 P_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbb{P} = P_1 + P_2$$

(  $P = \alpha P_1 + \beta P_2$  とおいて

$$[P, r] = \frac{\hbar}{i}, \quad [P, R] = 0$$

となるように  $\alpha, \beta$  を決定。  $\mathbb{P}$  も同様。

答之を知り、(いければ、

$$\mathbb{P} = (m_1 + m_2) \dot{R}, \quad P = \mu \dot{r} )$$

↓

$$H = \underbrace{\frac{P^2}{2M}}_{H_{cm}} + \underbrace{\frac{P^2}{2\mu}}_{H_{rel}} + V(r); \quad M = m_1 + m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

(note)

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{2M} + \frac{P^2}{2\mu} &= \frac{(P_1 + P_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} \left( \frac{m_2 P_1 - m_1 P_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} (P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{m_1 m_2} (m_2^2 P_1^2 - 2m_1 m_2 P_1 \cdot P_2 + m_1^2 P_2^2) \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) P_1^2 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) P_2^2 \right\} \\ &= \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} \end{aligned}$$

• 実験室系から重心系への変換

lab



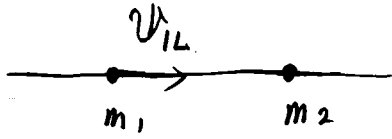
相対速度  $\dot{r} = \dot{r}_1 = v_{1L}$   
 重心速度  $\dot{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{r}_1$   
 $= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1L}$

$$\begin{aligned} E_{lab} &= \frac{1}{2} m_1 (v_{1L})^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \\ &\quad \text{|||} \\ &\quad E_{cm} \\ E_{cm} &= \frac{1}{2} \mu (v_{1L})^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1L})^2 \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{lab} \end{aligned}$$

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_{1L}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}^2$$

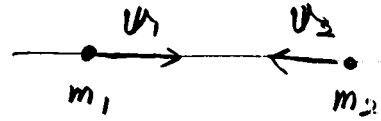
$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

lab



速度 - R  
でガリレイ変換

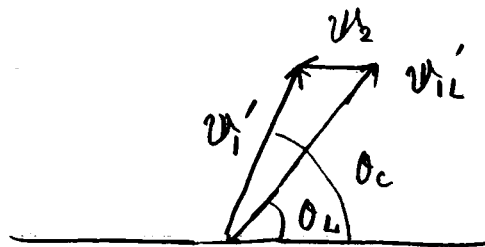
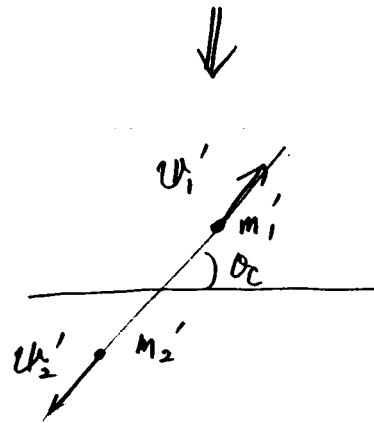
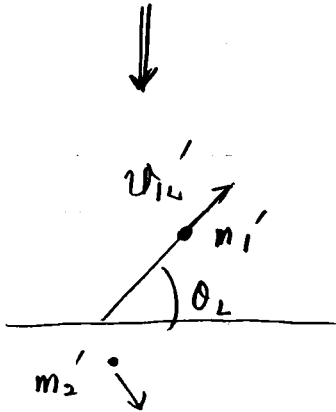
cm



$$v_2 = -R = -\frac{m_1 v_{1L}}{m_1 + m_2}$$

$$v_1 = v_{1L} - R = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1L}$$

$$\downarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2$$



$$\begin{cases} v_1' \cos \theta_c = v_{1L} \cos \theta_L - v_2 \\ v_1' \sin \theta_c = v_{1L} \sin \theta_L \end{cases}$$

$$\tan \theta_L = \frac{v_1' \sin \theta_c}{v_2 + v_1' \cos \theta_c} = \frac{\sin \theta_c}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos \theta_c}$$





・ 立体角の変換

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos \theta_c} \equiv \frac{\sin \theta_c}{x + \cos \theta_c} \quad (x \equiv \frac{v_2}{v_1'})$$

$$\rightarrow \cos \theta_L = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta_L}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \theta_c}{x + \cos \theta_c}\right)^2}}$$

$$= \frac{x + \cos \theta_c}{\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta_c + 1}}$$

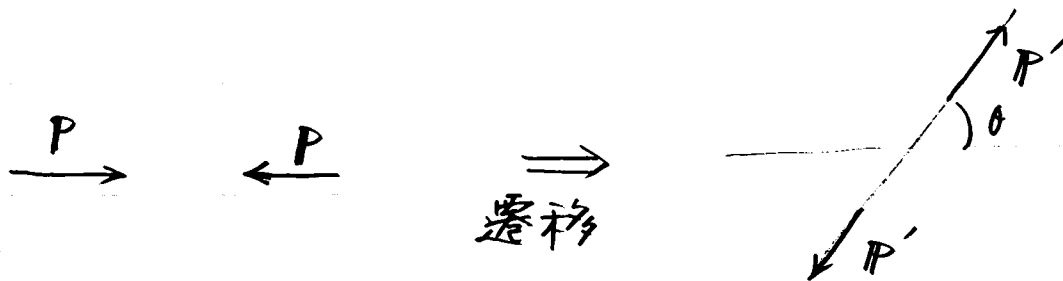
$$\downarrow \frac{d\Omega_L}{d\Omega_c} = \frac{d(\cos \theta_L)}{d(\cos \theta_c)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + 2x \cos \theta_c}} - \frac{1}{2} \frac{2x(x + \cos \theta_c)}{(1 + 2x \cos \theta_c + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1 + x^2 + 2x \cos \theta_c - x(x + \cos \theta_c)}{(1 + 2x \cos \theta_c + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1 + x \cos \theta_c}{(1 + 2x \cos \theta_c + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

§. ホール近似

量子力学では、重心系で初期状態から終状態への遷移として散乱をとらえる。



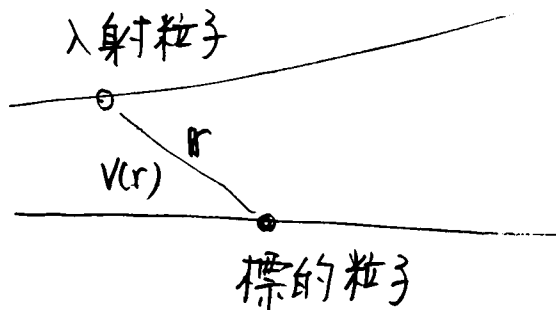
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R}{j_{in}}$$

R: 単位時間当たりの遷移確率  
j<sub>in</sub>: 入射フラックス

2体系の相対運動に対するシュレディンガー方程式:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \underbrace{V(r)}_{\text{2粒子間のポテンシャル}} - E \right) \psi(r) = 0$$

2粒子間のポテンシャル



$E \gg |V(r)|$  のとき (高エネルギー散乱)  
V(r) を摂動として扱える → ホール近似

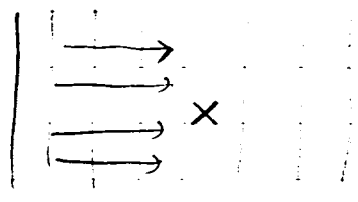
$V(r) = 0$  としたときの解  $\rightarrow \psi(r) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$  (平面波)

$\psi_i(r) = e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{r}/\hbar} \xrightarrow{\text{遷移}} \psi_f(r) = e^{i\vec{p}_f\cdot\vec{r}/\hbar}$   
( $E = \frac{p_i^2}{2\mu} = \frac{p_f^2}{2\mu}$ )

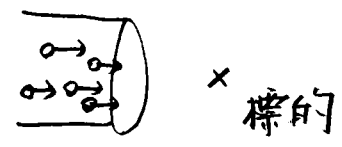
(note) 平面波は普通の意味では規格化できない。

$\int dr |\psi(r)|^2 = \int dr 1 = \infty$

解釈：平面波は粒子の流れを表す



\* 標的粒子のサイズに比べて入射ビームのサイズは圧力的に大きい。  
 $\rightarrow$  ビームの端の効果は考えずに平面波で近似してもOK.



フラックス:  $j = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^*(r) \nabla \psi(r) - \psi(r) \nabla \psi^*(r))$

(note) 
$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V\psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \dot{\psi} \psi^* + \psi \dot{\psi}^* \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V\psi \right) \psi^* - \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \right) \psi \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\hbar}{2i\mu} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

↓

$$\rho(r) = |\psi(r)|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\text{とすると } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{連続の方程式})$$

$$(\text{平面波の場合}) \quad \psi(r) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} \left( e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} \cdot \frac{i\vec{p}}{\hbar} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} - e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} \cdot \frac{-i\vec{p}}{\hbar} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} \right)$$

$$= \frac{\vec{p}}{\mu} = \mathbf{v}$$

単位時間当りの全遷移確率：  
← フェルミの黄金則

$$R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{dP_f}{(2\pi\hbar)^3} |\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

$$\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r})$$

$$= \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{r} / \hbar} V(\mathbf{r})$$

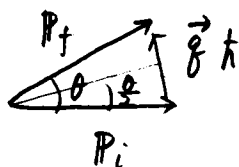
$$\equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\mathbf{r}) = \tilde{V}(\mathbf{q})$$

フーリエ変換

$$E_f = \frac{P_f^2}{2\mu} \rightarrow dE_f = \frac{P_f}{\mu} dP_f$$

$$\vec{q} \equiv (P_f - P_i)/\hbar$$

運動量移行  
(momentum transfer)



$$q\hbar = 2P_i \sin \frac{\theta}{2}$$

(散乱角と  $q$  の関係)

$$\begin{aligned} R_{if} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{P_f^2 dP_f}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mu P_f dE_f d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E) \\ &= \frac{\mu P_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{R_{if}}{J_{in}} = \int d\Omega_{P_f} \underbrace{\frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{\frac{d\sigma}{d\Omega_{P_f}}}$$

(note) 球対称ポテンシャルに対しては

$$\begin{aligned} \tilde{V}(q) &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty r^2 dr e^{-iqr\cos\theta} V(r) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{-iqr} (e^{-iqr} - e^{iqr}) V(r) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{iqr} \cdot 2i \sin qr \cdot V(r) \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin qr}{qr} \cdot V(r) \end{aligned}$$