[復習]

リップマン・シュウィンガー方程式：

$$\psi = \phi - \frac{1}{\hat{H}_0 - E - i\eta} V \psi$$

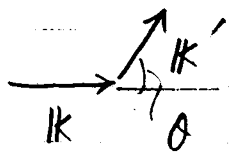
$$\begin{cases} \hat{H}_0 = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 \\ (\hat{H}_0 - E)\phi = 0 \end{cases}$$

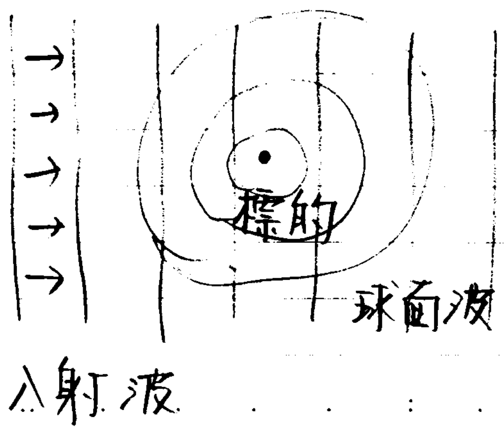
↓

$r \to \infty$ で

$$\psi(r) \longrightarrow \underbrace{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{\text{入射波}} + \underbrace{f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{散乱波}}$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$$





DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi_{sc}^{*}\nabla\psi_{sc} - c.c.\right)$$

$$\sim \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \qquad (r\to\infty)$$

$$\boldsymbol{j}_{in} = \frac{k\hbar}{\mu}\,\boldsymbol{e}_z$$

$\downarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{in}}\left(\boldsymbol{j}_{sc}\cdot\boldsymbol{e}_r\right)\cdot r^2 = |f(\theta)|^2$$

(note)

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^{*}\nabla\psi - c.c.\right)$$

$$\to \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

$$\to \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{e}_r\,\underbrace{dS}_{r^2 d\hat{\boldsymbol{r}}}$$

フラックスはどう保存されるか？

→ 光学定理

・光学定理

$$\begin{cases} \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi^* \nabla \psi - c.c.) \\ \psi = \psi_{in} + \psi_{sc} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{j}_{in} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi_{in}^* \nabla \psi_{in} - c.c.) = \frac{\hbar \boldsymbol{k}}{\mu}$$

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi_{sc}^* \nabla \psi_{sc} - c.c.) = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{j}_{干渉} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi_{sc}^* \nabla \psi_{in} + \psi_{in}^* \nabla \psi_{sc} - c.c.)$$

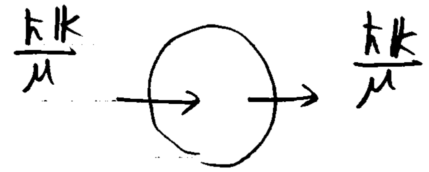
$$\sim \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot \frac{1}{r}(\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_k)\left[f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta) \underbrace{e^{ikr(1-\cos\theta)}}_{e^{ikr} \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}\right]$$

$r \to \infty$, $\cos\theta \neq 1$ で激しく振動

→ 角度積分をすると $\theta \sim 0$ を除きゼロ

$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}\ r^2 d\hat{\mathbf{r}}$ を計算する

$$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_{in}\ r^2 d\hat{\mathbf{r}} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot r^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \underbrace{\cos\theta}_{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r} = 0$$



同じ量が入って出る

$$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_{sc}\ r^2 d\hat{\mathbf{r}} = \frac{k\hbar}{\mu} \int d\hat{\mathbf{r}}\, |f(\theta)|^2 = \frac{k\hbar}{\mu}\,\sigma$$

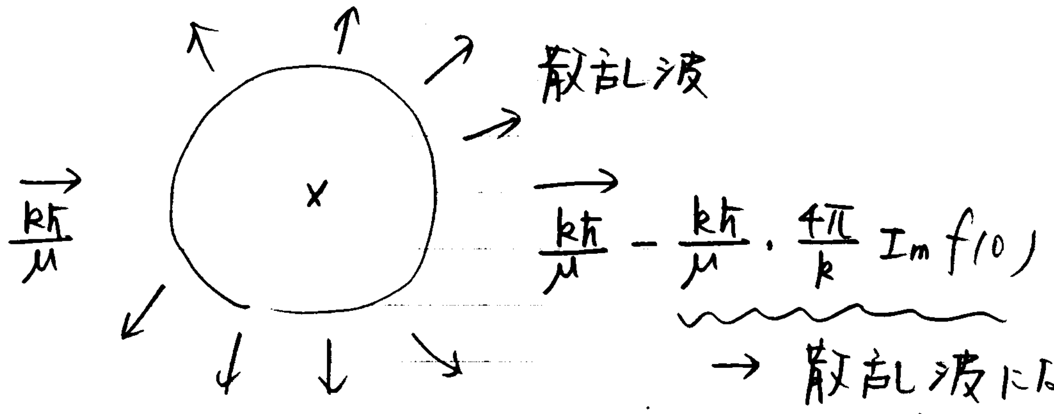
$$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_{I}\ r^2 d\hat{\mathbf{r}} \sim -\frac{2\pi\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{i}\left(f(0) - f^*(0)\right)$$
$$= -\frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k}\, \mathrm{Im}\, f(0)$$

$\Downarrow$

$$0 + \frac{k\hbar}{\mu}\,\sigma - \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k}\, \mathrm{Im}\, f(0) = 0$$

$\Downarrow$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\, \mathrm{Im}\, f(0)$$ ：光学定理



→ 散乱波になる
($\theta = 0$ 方向のフラックスが減る)

§. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi = \underbrace{E}_{=\frac{k^2\hbar^2}{2\mu}}\psi$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta} \qquad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・部分波展開

$$\boxed{e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i^\ell \underbrace{j_\ell(kr)}_{\text{球ベッセル関数}}\ \underbrace{P_\ell(\cos\theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}}$$

(証明) $e^{ikr\cos\theta} = \sum_\ell a_\ell(r) P_\ell(\cos\theta)$ と展開する。

(note) $\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$

$\downarrow$

$$a_\ell(r) = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{ikr\cos\theta}\, P_\ell(\cos\theta)$$

(note) $j_\ell(y) = \frac{1}{2i^\ell}\int_{-1}^{1} dx\, e^{ixy} P_\ell(x)$

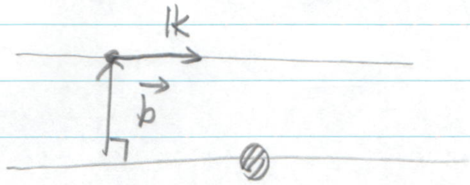
$\downarrow$

$$a_\ell(r) = (2\ell+1)\, i^\ell j_\ell(kr)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

↓ 平面波には全ての部分波(角運動量)lが混ざっている。

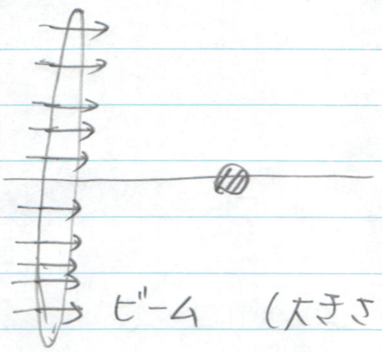
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} \rightarrow l = bk\hbar$$

衝突係数

↓ $\sum_{l=0}^{\infty} \cdots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合わさっている。



高エネルギー: ボルン近似がOK
平面波を使って角運動量が陽に
現れない議論ができた。

低エネルギー: 各lごとに考える必要がある
→部分波解析

・部分波解析

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)$$

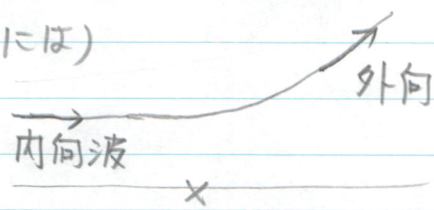
$r \to \infty$ を考える（検出器のあたりにおける振るまい）

$$j_l(kr) \longrightarrow \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \qquad (kr \to \infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right)$$

$$\downarrow\ \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \Big[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}}\Big] P_l(\cos\theta)$$

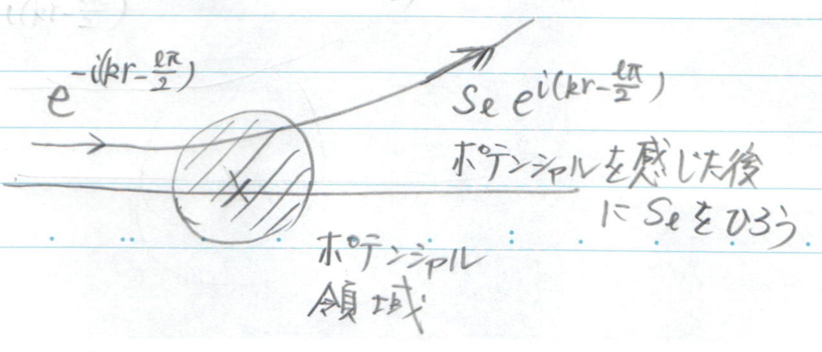
（半古典的には）



（短距離）
ポテンシャルがある場合
$r \to \infty$ では $V(r) \to 0$
↓ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow\ \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \Big[e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}\Big] \times P_l(\cos\theta)$$

「S行列」
ポテンシャルの効果を反映



※実ポテンシャルなら
$|S_l| = 1$
（フラックスの保存）

$$\psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{-e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}+e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right] P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, \underbrace{i^l\, e^{-i\frac{l\pi}{2}}}_{i^l\cdot(-i)^l = 1}\, e^{ikr}(1-S_l)\, P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l-1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

・全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega\, |f(\theta)|^2$$

$$= \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1)\frac{S_l-1}{2ik}\cdot\frac{S_{l'}^*-1}{-2ik}\underbrace{\int d\Omega\, P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)}_{\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{l,l'}}$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\,|S_l-1|^2$$