

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

↓ 低エネルギー- 散乱は a, r_{eff} の 2 つの パラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー- 散乱が必要。)

• 散乱長の意味

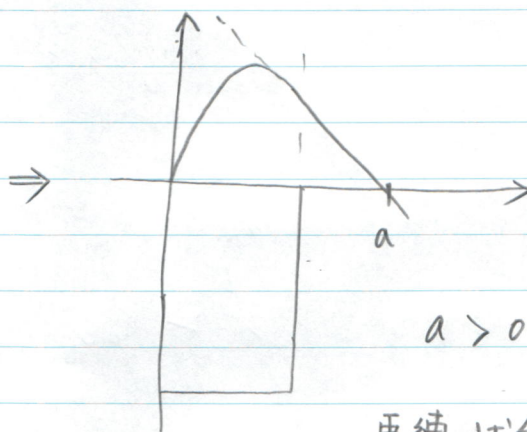
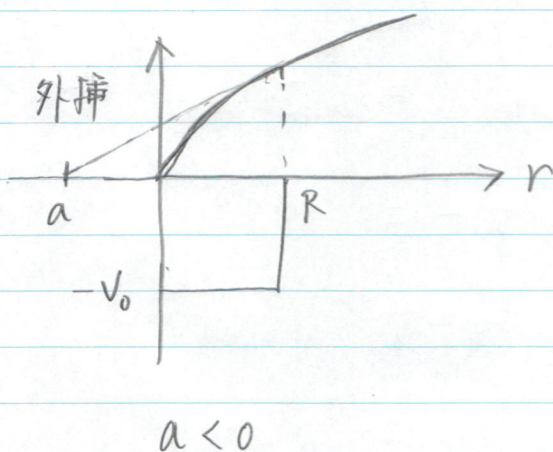
$$r \geq R \quad U_0(r) \propto \sin(kr + \delta) \sim kr + \delta \quad (k \rightarrow 0)$$

$$= k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$$

$$-a = k \cot \delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Downarrow U_0(r) \propto (r-a) \quad (k \rightarrow 0)$$

これは $r=a$ でゼロ。

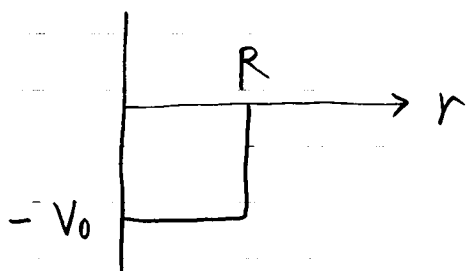


束縛状態があるとき

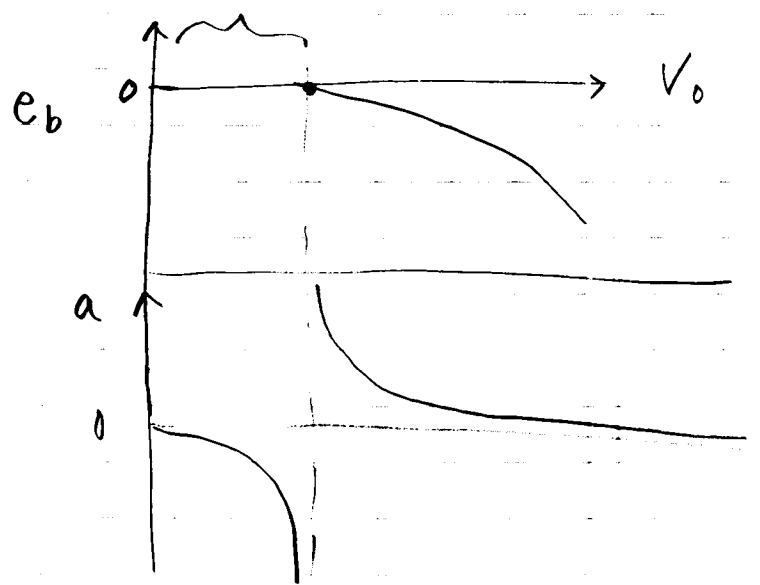
ゼロ-エネルギー- で束縛するとき
 $a = \infty$ (ユ=タリ- 極限)

ユ=タリ-極限

井戸型ポテンシャル

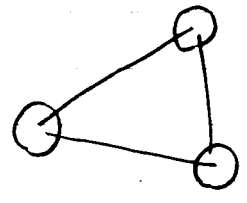


V_0 が小さいと束縛状態が少ない



ユ=タリ-極限
(長さスケールが小さくなる)

3粒子状態 (ボゾン3体系)



ユ=タリ-極限で
無限個の束縛状態

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \dots$$

井戸型ポテンシャル \rightarrow ユ=タリ-極限で $r_{\text{eff}} = R$

§. 共鳴散乱

ある E だけ

S 行列が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ に一位の極 (ポールの) を持つとする。

このとき、

$$S_e(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} = e^{2i\delta_{bg}(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} \right)$$

とする。 $\delta_{bg}(E)$ は E のゆるやかな関数 (バックグラウンド位相差)。 $|S_e(E)| = 1$ に注意。

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R(E)}$ とすると (c は実数)

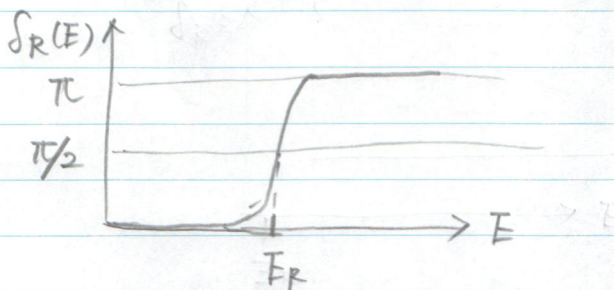
$$S_e(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \frac{c e^{i\delta_R(E)}}{c e^{-i\delta_R(E)}} = e^{2i(\delta_{bg}(E) + \delta_R(E))}$$

||
 $\delta_e(E)$

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R} = c (\cos \delta_R + i \sin \delta_R)$

$$\Rightarrow \tan \delta_R = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}$$

$$\Rightarrow \delta_e(E) = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R} \right) + \delta_{bg}(E)$$

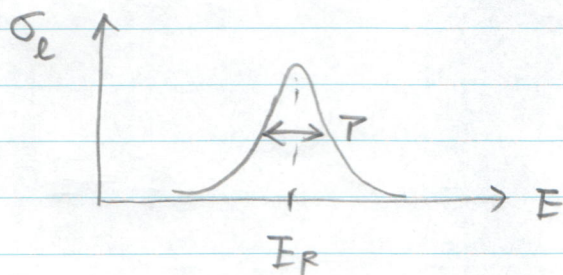


$\delta_R(E)$ は $E = E_R$ で $\pi/2$ を切る。

今, 簡単のため $\delta_{bg}(E) = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}}{1 + \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2 + \frac{P^2}{4}} \end{aligned}$$

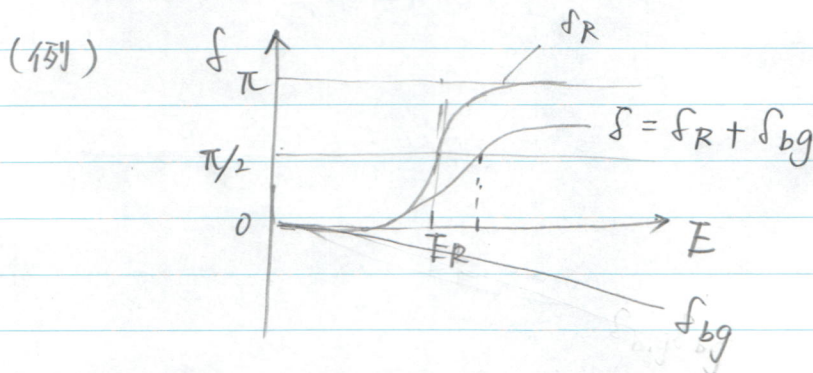
(Breit-Wigner の公式)



共鳴散乱

共鳴は $\delta_R(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す。

(note) よくある誤解。「共鳴エネルギー」は $\delta(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切ることを示す → これは間違っている。一般的に $\delta_{bg}(E)$ のために $E = E_R$ で $\delta = \frac{\pi}{2}$ になるとは限らない。

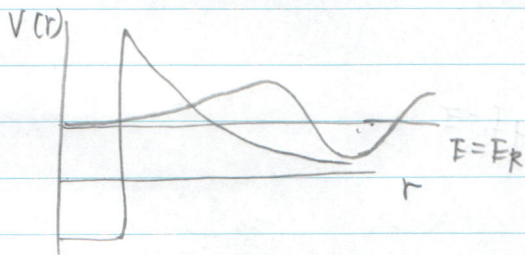


- $\delta_R = \pi/2$ のときは何が起こっているのか?
再び $\delta_{bg} = 0$ とする。

$$\begin{aligned}
 u_e(r) &\rightarrow e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - S_e e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \\
 &= \underbrace{(1 - S_e) \cos(kr - \frac{\ell\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ -kr n_e(kr) \\ \text{の漸近形}}} - i \underbrace{(1 + S_e) \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ kr j_e(kr) \\ \text{の漸近形}}}
 \end{aligned}$$

(note) $j_e(x)$ は $x=0$ で正則, $n_e(x)$ は $x=0$ で発散

$\delta_e = 0$ 又は $\delta_e = \pi$ のとき
 $S_e = 1$
 $\rightarrow u_e = -2i kr j_e(kr)$

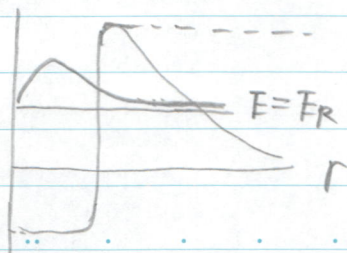


$\delta_e = \pi/2$ のとき $S_e = -1$
 $\rightarrow u_e(r) = -2kr n_e(kr)$

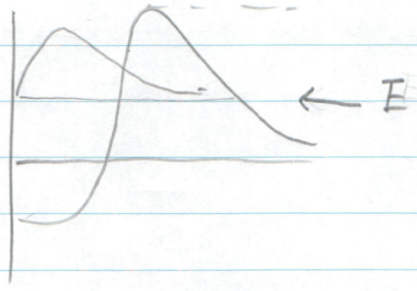


束縛状態のように振るまう

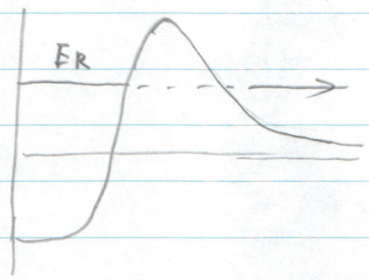
\rightarrow 尖鳴状態は連続状態に埋めこまれた束縛状態のようなもの



ポテンシャルを左のように変形すると束縛状態がなくなる。



入射 E がこの束縛状態の E に一致すると共鳴



ポテンシャルの内側に波動関数がしばらくトランプオンされ、やがてトンネル効果で抜けていくヒョクヤ。

(note) 状態が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ のエネルギー固有値を持つとすれば

$$P_{sur}(t) \equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$$

$$= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\frac{\Gamma}{2})t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2$$

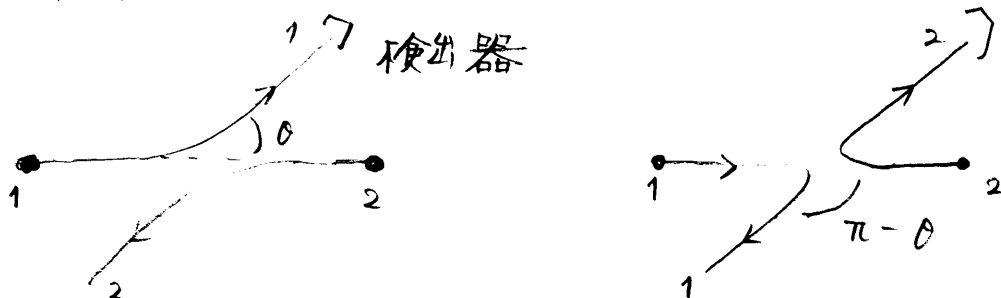
$$= e^{-\Gamma t/\hbar} \cdot |\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle|^2$$

$\downarrow \tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma} = \text{共鳴状態の寿命}$

(note) $E = E_R + i\frac{\Gamma}{2}$ の極は、逆にポテンシャル内側に波動関数が時間とともにたまっていくという状態
 → 物理的な境界条件として適していない。

§. 同種粒子による散乱

同種粒子



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
こういう場合

同種粒子: 粒子の入れかえに対し波動関数は
対称 / 反対称

$$\Psi_{\pm}(r) = \Psi(r) \pm \Psi(-r)$$

$$\rightarrow (e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r})$$

空間部分に
対称性

$$+ \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi - \theta)]}_{\text{III } f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

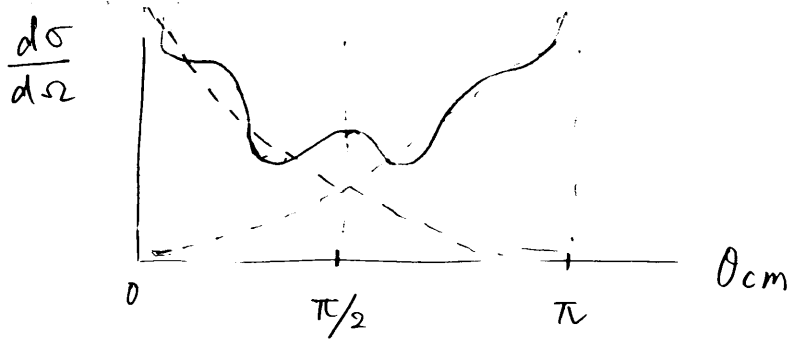
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm 2 \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)]$$

干渉項

↑

実際に $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反応など(観測)



- 断面積は $\theta_{cm} = \pi/2$ で対称
- 干渉項のために振動する

- $s \ll 0$ の粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

- $s \gg 1/2$ の粒子 (フェルミオン)

$$\Psi(1, 2) = \Psi(r_1, r_2) \chi_{spin}$$

対称
反対称
又は 反対称
対称

$$S = 0$$

$$\chi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{反対称}$$

→ 空間部分は対称

$$\Downarrow \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

$$S = 1$$

$$\chi_{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{対称}$$

$$\Downarrow \frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(\theta)|^2 \quad \text{→ 空間部分は反対称}$$

$s \gg 0$ 偏極が反の時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \text{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$