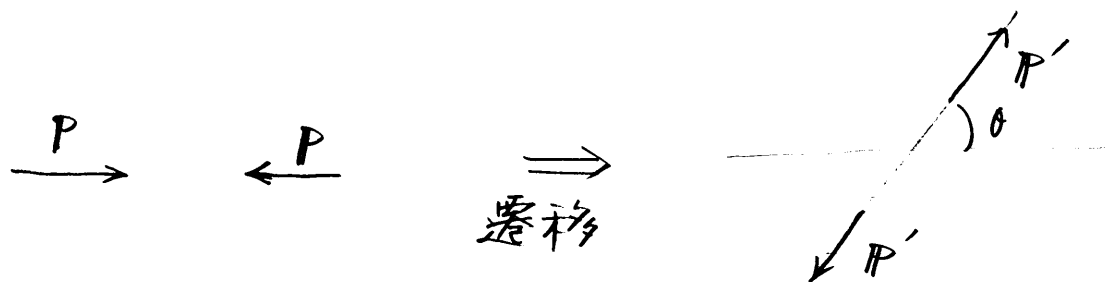


§. ボール近似

量子力学では、重心系で初期状態から終状態への遷移として散乱をとらえる。



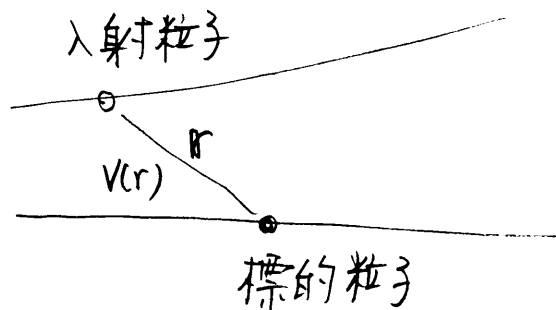
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R}{j_{in}}$$

R: 単位時間当たりの遷移確率
j_{in}: 入射フラックス

2体系の相対運動に対するシュレディンガー方程式:

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \underbrace{V(r)}_{\text{2粒子間のポテンシャル}} - E \right) \psi(r) = 0 \right]$$

2粒子間のポテンシャル



$E \gg |V(r)|$ のとき (高エネルギー散乱)
V(r) を摂動として扱える → ボール近似

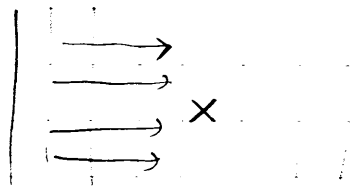
$V(r) = 0$ としたときの解 $\rightarrow \psi(r) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$ (平面波)

$\psi_i(r) = e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{r}/\hbar} \xrightarrow{\text{遷移}} \psi_f(r) = e^{i\vec{p}_f\cdot\vec{r}/\hbar}$
($E = \frac{p_i^2}{2\mu} = \frac{p_f^2}{2\mu}$)

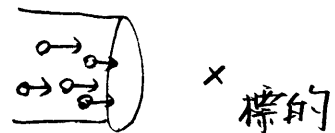
(note) 平面波は普通の意味では規格化できない:

$$\int d\mathbf{r} |\psi(r)|^2 = \int d\mathbf{r} 1 = \infty$$

解釈: 平面波は粒子の流れを表す



* 標的粒子のサイズに比べて入射ビームのサイズは圧力的に大きい。
 \rightarrow ビームの端の効果は考えずに平面波で近似してもOK.



フラックス: $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^*(r) \nabla \psi(r) - \psi(r) \nabla \psi^*(r))$

(note)
$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V\psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \dot{\psi} \psi^* + \psi \dot{\psi}^* \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V\psi \right) \psi^* - \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \right) \psi \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\hbar}{2i\mu} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

↓

$$\rho(r) = |\psi(r)|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\text{とすると } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{連続の方程式})$$

$$(\text{平面波の場合}) \quad \psi(r) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} \left(e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \cdot \frac{i\vec{p}}{\hbar} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} - e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \cdot \frac{-i\vec{p}}{\hbar} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \right)$$

$$= \frac{\vec{p}}{\mu} = \mathbf{v}$$

単位時間当りの全遷移確率:
← フェルミの黄金則

$$R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{dP_f}{(2\pi\hbar)^3} |\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

$$\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r})$$

$$= \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{r}/\hbar} V(\mathbf{r})$$

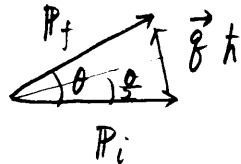
$$\equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\mathbf{r}) = \tilde{V}(\mathbf{q})$$

フーリエ変換

$$E_f = \frac{P_f^2}{2\mu} \rightarrow dE_f = \frac{P_f}{\mu} dP_f$$

$$\vec{q} \equiv (P_f - P_i)/\hbar$$

運動量移行
(momentum transfer)



$$q\hbar = 2P_i \sin \frac{\theta}{2}$$

(散乱角と q の関係)

$$\begin{aligned} R_{if} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{P_f^2 dP_f}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mu P_f dE_f d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E) \\ &= \frac{\mu P_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{R_{if}}{J_{in}} = \int d\Omega_{P_f} \underbrace{\frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{\frac{d\sigma}{d\Omega_{P_f}}}$$

(note) 球対称ポテンシャルに対しては

$$\begin{aligned} \tilde{V}(q) &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty r^2 dr e^{-iqr\cos\theta} V(r) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{-iqr} (e^{-iqr} - e^{iqr}) V(r) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{iqr} \cdot 2i \sin qr \cdot V(r) \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin qr}{qr} \cdot V(r) \end{aligned}$$

[具体的な例 1] 電荷密度 $e\rho(r)$ を持つ標的粒子と電子の散乱

$$V(r) = -e^2 \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr'$$

(note) ポアソン方程式: $\nabla^2 V = 4\pi e^2 \rho$

$$\begin{aligned} \downarrow \tilde{V}(\vec{\delta}) &= \int dr e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{r}} V(r) \\ &= \cancel{\frac{1}{-i\delta} e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{r}} V(r) \Big|_{-\infty}^{\infty}} + \frac{1}{i\delta} \cdot \int dr e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{r}} \nabla^2 V \\ &= \cancel{\frac{1}{\delta^2} \nabla^2 V \Big|_{-\infty}^{\infty}} - \frac{1}{\delta^2} \int dr e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{r}} \nabla^2 V \\ &= -\frac{4\pi}{\delta^2} e^2 \underbrace{\int dr e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{r}} \rho(r)} \end{aligned}$$

↓
電荷密度のフーリエ変換 $\equiv F(\vec{\delta})$

$$\begin{aligned} \downarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{16\pi^2 e^4}{\delta^4} |F(\delta)|^2 \\ &= \frac{4\mu^2 e^4}{\delta^4 \hbar^4} |F(\delta)|^2 = \left(\frac{2Me^2}{4\pi \hbar^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 |F(\delta)|^2 \\ &= \left(\frac{e^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 |F(\delta)|^2 \end{aligned}$$

(note) $\rho(r) = z \delta(r)$ ならば $F(\vec{\delta}) = z$

$$\downarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ze^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad \text{ラザフォードの公式}$$

[具体的な例 2] スクリーニングされたクーロンポテンシャル (湯川ポテンシャル)

$$V(r) = g \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (1/\alpha = \text{スクリーニング長})$$

↓

$$\begin{aligned} \tilde{V}(g) &= \frac{2\pi g}{ig} \int_0^\infty dr (e^{ibr} - e^{-ibr}) e^{-\alpha r} \\ &= \frac{2\pi g}{ig} \left[\frac{e^{(i\beta-\alpha)r}}{i\beta-\alpha} - \frac{e^{(-i\beta-\alpha)r}}{-i\beta-\alpha} \right]_{r=0}^\infty \\ &= \frac{-2\pi g}{ig} \left(+\frac{1}{i\beta-\alpha} + \frac{1}{i\beta+\alpha} \right) \\ &= +\frac{2\pi g}{ig} \cdot \frac{2i\beta}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{4\pi g}{\beta^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

(note) $\alpha = 0$ として $\tilde{V}(g) = \frac{4\pi g}{\beta^2} \rightarrow$ ラグランジュ-ポテンシャルの公式