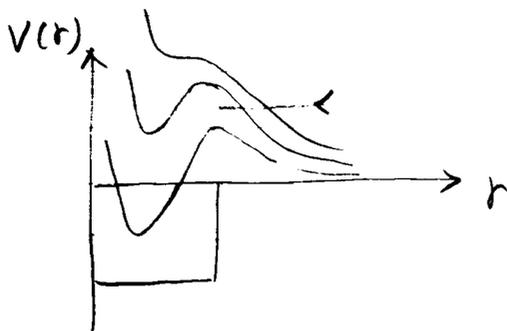


§ 低エネルギー - 散乱と散乱長

$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \quad \text{と書くと}$$

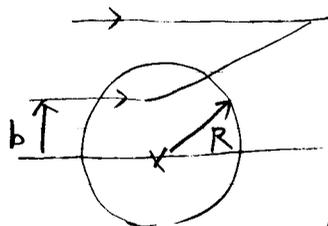
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力ポテンシャル}} - E \right) u_l(r) = 0$$

遠心力ポテンシャル



反射が起きるためには
ポテンシャルのレ>シフト
トンネルしなければなら
ない

↓
大きな l は 寄与しない。



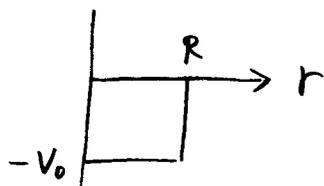
古典的には標的から
相互作用レ>シフトRの内側
に入る部分波 (b ≤ R) のみ
が寄与 → l_{max} = kR

↓ 部分波解析は低エネルギー
で特に有効。

E ~ 0 では l=0 のみ が 寄与

以下, E ~ 0, l=0 を考える。

(例) 井戸型ポテンシャル



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

波動関数:
$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin \tilde{k} r & (r \leq R) \\ B \sin kr + C \cos kr & (r > R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

(note)

$$B \sin kr + C \cos kr = B \left(\sin kr + \frac{C}{B} \cos kr \right)$$

||

$$B' \sin(kr + \delta) = B' (\sin kr \cos \delta + \cos kr \sin \delta) \\ = B' \cos \delta (\sin kr + \tan \delta \cos kr)$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B}$$

$r = R$ の波動関数の接続

$$\begin{cases} A \sin \tilde{k} R = B \sin kR + C \cos kR \\ A \tilde{k} \cos \tilde{k} R = Bk \cos kR - Ck \sin kR \end{cases}$$

↓

$$\frac{1}{\tilde{k}} \frac{\sin \tilde{k} R}{\cos \tilde{k} R} = \frac{\sin kR + \frac{C}{B} \cos kR}{k \cos kR - \frac{C}{B} k \sin kR}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B} = \frac{k \cos kR \sin \tilde{k} R - \tilde{k} \sin kR \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R \cos kR + k \sin kR \sin \tilde{k} R}$$

$$\sim \frac{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R} \cdot k \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow k \cot \delta = \frac{\tilde{k} \cos \tilde{k} R}{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R} = \text{const.}$$

$$\equiv -\frac{1}{a} \quad (a: \text{散乱長})$$

(note) $l \neq 0$ のときは $\delta_l \propto k^{2l+1}$ となる。

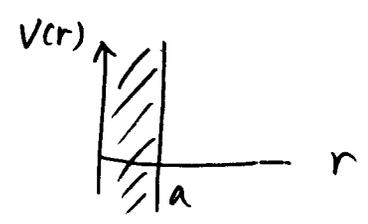
(note) $E \ll |V_0|$ のとき, $k \rightarrow -k$ に対応して $\tan \delta \rightarrow -\tan \delta$

$$\Rightarrow k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \dots$$

有効距離

cf. 剛体球による散乱 (s-wave)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr + \delta)$$

$$u(r=a) = 0 \quad \leadsto \quad ka + \delta = 0$$

$$\leadsto \quad \underbrace{\frac{k}{\delta}}_{k \cot \delta} = - \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{散乱長}}$$

散乱長 \leftrightarrow 剛体球の半径.

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

↓ 低エネルギー- 散乱は a, r_{eff} の 2 つのパラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー- 散乱が必要。)

• 散乱長の意味

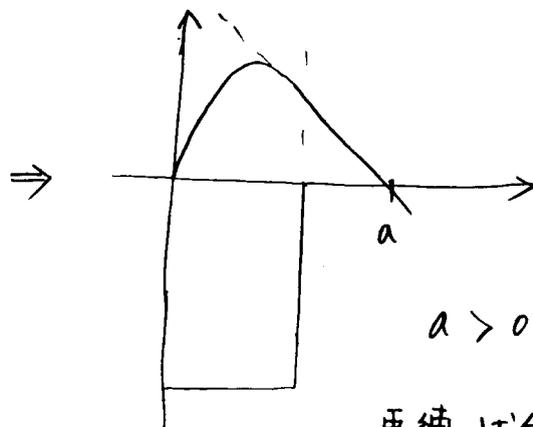
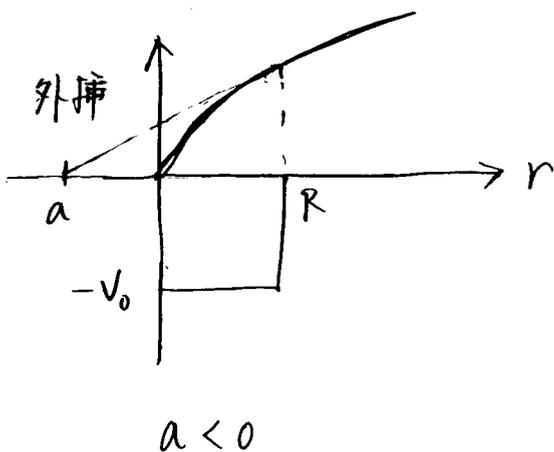
$$r \geq R \quad u_0(r) \propto \sin(kr + \delta) \sim kr + \delta \quad (k \rightarrow 0)$$

$$= k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{a} = k \cot \delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow u_0(r) \propto (r - a) \quad (k \rightarrow 0)$$

これは $r = a$ で "ゼロ"。

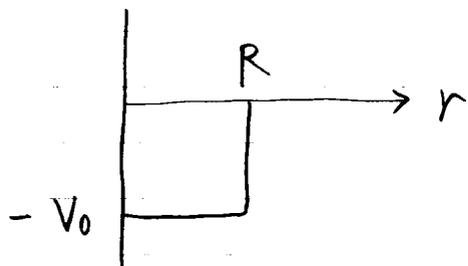


束縛状態があるとき

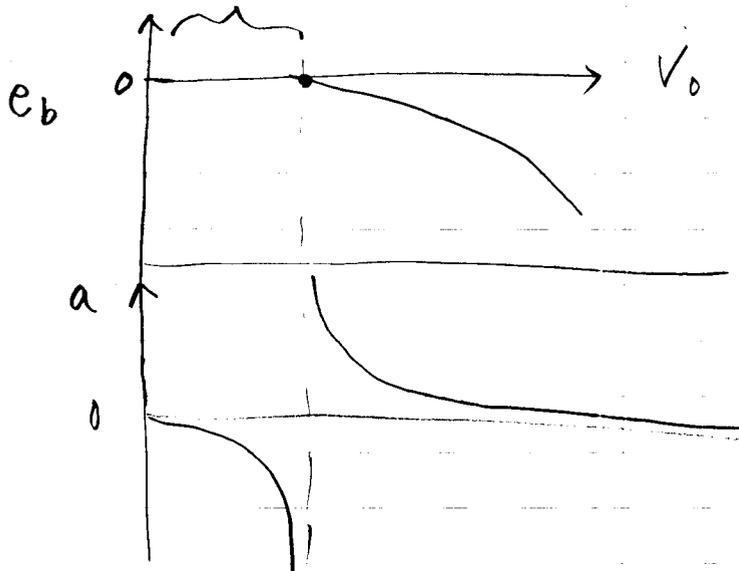
ゼロエネルギーで束縛するときは $a = \infty$ (ユニタリ-極限)

ユ=タリ-極限

井戸型ポテンシャル



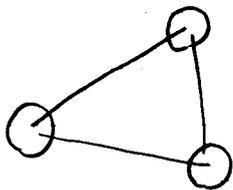
V_0 が小さいと束縛状態がない



ユ=タリ-極限

(長さスケールが小さくなる)

イソモフ状態 (ボソン3体系)



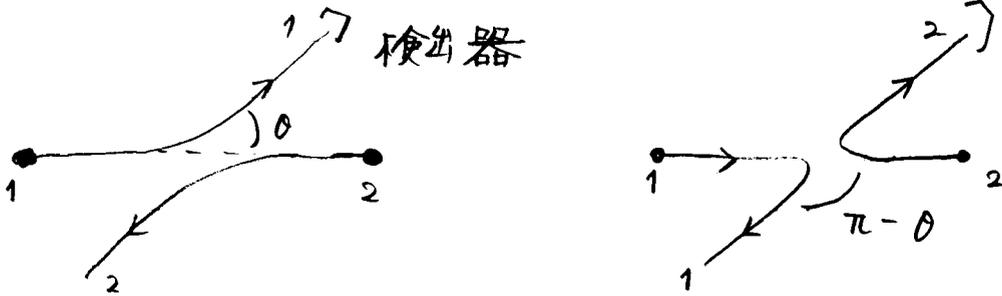
ユ=タリ-極限で無限個の束縛状態

$$k \cot \delta = -\alpha + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \dots$$

井戸型ポテンシャル \rightarrow ユ=タリ-極限で $r_{\text{eff}} = R$

§. 同種粒子による散乱

同種粒子



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
こいう場合

同種粒子: 粒子の入れかえに対し波動関数は
対称 / 反対称

↓ $\Psi_{\pm}(r) = \Psi(r) \pm \Psi(-r)$

→ $(e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r})$

空間部分に
対称性

$+ [f(\theta) \pm f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$
|||
 $f_{\pm}(\theta)$

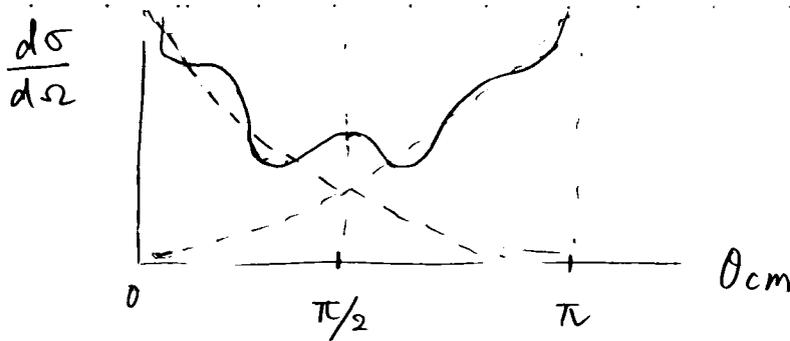
$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$

$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm 2 \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)]$

干渉項

↑

実際に $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反転など(観測)



- ・ 断面積は $\theta_{cm} = \pi/2$ で対称
- ・ 干渉項のために振動する

- ・ $s \leq 0$ の粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

- ・ $s \leq 1/2$ の粒子 (フェルミオン)

$$\Psi(1, 2) = \Psi(r_1, r_2) \chi_{spin}$$

対称
反対称
又は 反対称
対称

$$S = 0$$

$$\chi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{: 反対称}$$

→ 空間部分は対称

$$\leadsto \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

$$S = 1$$

$$\chi_{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{: 対称}$$

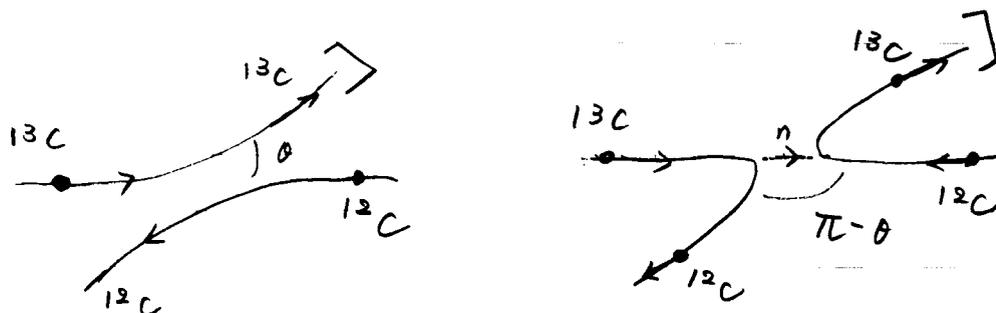
$$\leadsto \frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(\theta)|^2 \quad \text{→ 空間部分は反対称}$$

$s \leq 0$ 偏極の無い時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \text{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$

(note) 弾性的粒子移行反応

例) $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ ($^{13}\text{C} = ^{12}\text{C} + n$)



^{13}C を検出する検出器は上の 2 つの角度を原理的に区別できない

$$\rightarrow f(\theta) = f_{el}(\theta) + f_{trans}(\pi - \theta)$$

粒子移行過程
の振幅

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = |f_{el}(\theta)|^2 + |f_{trans}(\pi - \theta)|^2 + 2 \operatorname{Re} [f_{el}^*(\theta) f_{trans}(\pi - \theta)]$$

干渉項
↓
振動