DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

§. 共鳴散乱

S行列が $\underbrace{E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}}_{\text{あるlで}}$ に一位の極（ポール）を持つとする。
このとき、

$$\boxed{S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}}} = e^{2i\delta_{bg}}\left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}}\right)$$

となる。$\delta_{bg}(E)$ は E のゆるやかな関数（バックグラウンド位相差）。$|S_l(E)| = 1$ に注意。

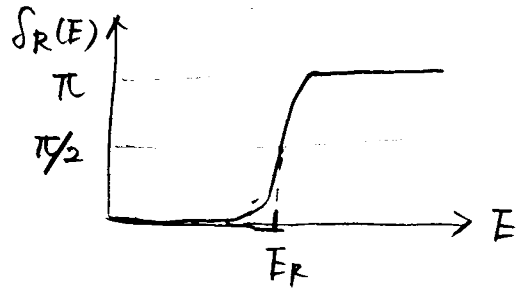
(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c\, e^{i\delta_R(E)}$ とすると（c は実数）

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \frac{c\, e^{i\delta_R(E)}}{c\, e^{-i\delta_R(E)}} = e^{2i\underbrace{(\delta_{bg}(E) + \delta_R(E))}_{=\delta_l(E)}}$$

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c\, e^{i\delta_R} = c(\cos\delta_R + i\sin\delta_R)$

$$\Rightarrow \tan\delta_R = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_l(E) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}\right) + \delta_{bg}(E)}$$



$\delta_R(E)$ は $E = E_R$ で $\pi/2$ を切る。

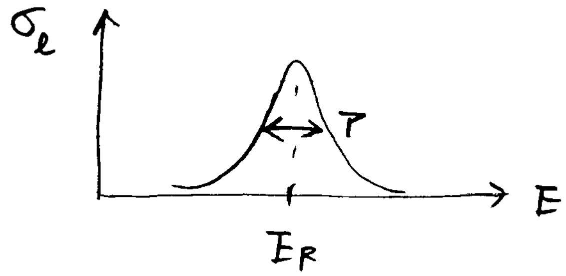
今, 簡単のために $\delta_{bg}(E)=0$ とすると,

$$\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\cdot\frac{\tan^2\delta_\ell}{1+\tan^2\delta_\ell}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\frac{\dfrac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(E-E_R)^2}}{1+\dfrac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(E-E_R)^2}}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\cdot\frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(E-E_R)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}$$

(Breit-Wigner の公式)

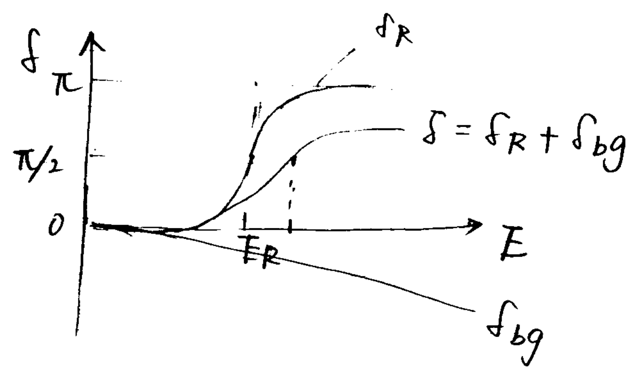


共鳴散乱

共鳴は $\delta_R(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切るところ。

(note) よくある誤解。「共鳴エネルギーは $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切るところ」→ これは間違い。一般的に $\delta_{bg}(E)$ のために $E=E_R$ で $\delta=\pi/2$ になるとは限らない。

(例)



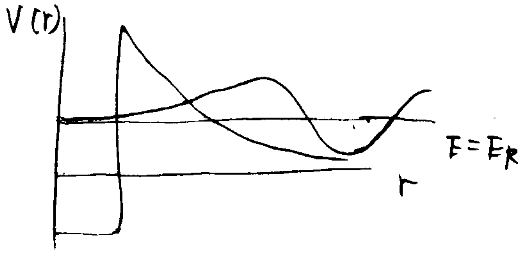
- $\delta_R = \pi/2$ では何が起こっているのか？

再び $\delta_{bg} = 0$ とする。

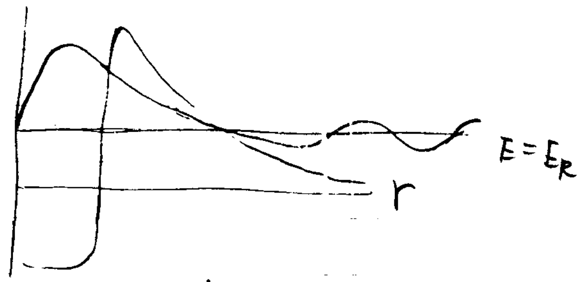
$$u_\ell(r) \to e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - S_\ell\, e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})}$$
$$= (1 - S_\ell)\underbrace{\cos(kr - \tfrac{\ell\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ -kr\, n_\ell(kr) \\ \text{の漸近形}}} - i(1 + S_\ell)\underbrace{\sin(kr - \tfrac{\ell\pi}{2})}_{\substack{\uparrow \\ kr\, j_\ell(kr) \\ \text{の漸近形}}}$$

(note) $j_\ell(x)$ は $x=0$ で正則, $n_\ell(x)$ は $x=0$ で発散

$\delta_\ell = 0$ 又は $\delta_\ell = \pi$ のとき
$S_\ell = 1$
$\to u_\ell = -2i\, kr\, j_\ell(kr)$

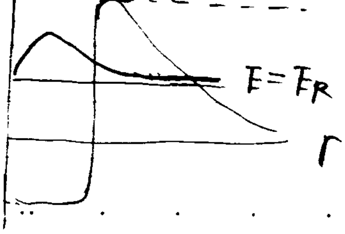


$\delta_\ell = \pi/2$ のとき $S_\ell = -1$
$\to u_\ell(r) = -2kr\, n_\ell(kr)$



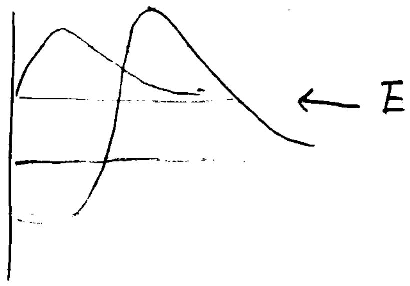
束縛状態のように
振るまう

→ 共鳴状態は連続状態に埋めこまれた
束縛状態のようなもの

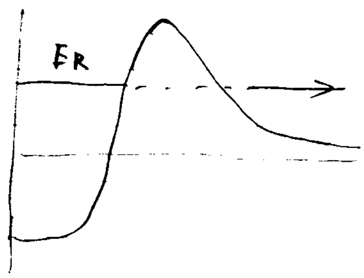


ポテンシャルを左のように変形
すると束縛状態ができる。

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY



入射 E が この束縛状態の
E に一致すると共鳴



ポテンシャルの内側に
波動関数がしばらく
トラップされ、やがてトンネル
効果で抜けていくピクチャー。

(note) 状態が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ のエネルギー固有値
を持つとしたら

$$P_{sur}(t) \equiv |\langle \psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= |\langle \psi(0)| e^{-i(E_R - i\frac{\Gamma}{2})t/\hbar} |\psi(0)\rangle|^2$$

$$= e^{-\Gamma t/\hbar} \cdot |\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle|^2$$

↓ $\tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma}$ = 共鳴状態の寿命

(note) $E = E_R + i\frac{\Gamma}{2}$ の極は、逆にポテンシャル
内側に波動関数が時間とともに入ってくる
という状態
→ 物理的な境界条件として適して
いない。

・バーチャル状態

$l=0$ を考える。遠心力障壁がないので、引力ポテンシャル $V(r)$ は共鳴状態を作らない。

→ でも断面積 $\underbrace{\text{は大}}_{\text{低エネルギーで}}$ きくなりうる

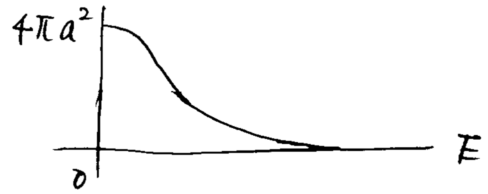
$$k\cot\delta \sim -\frac{1}{a}$$

このとき
$$S = e^{2i\delta} = \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos\delta + i\sin\delta}{\cos\delta - i\sin\delta}$$
$$= \frac{\cot\delta + i}{\cot\delta - i} = \frac{-\frac{1}{a} + ik}{-\frac{1}{a} - ik}$$

$k = i\frac{1}{a}$ に極を持つ。

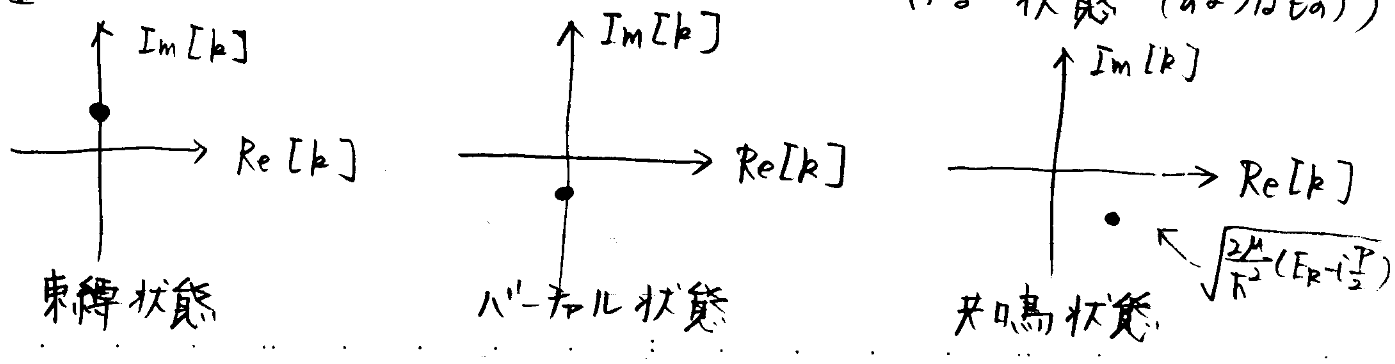
$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta = \frac{4\pi}{(k\cot\delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2$$

→ a が大きければ σ が大きくなる



$a > 0$ なら浅い束縛状態、
$a < 0$ なら"バーチャル状態"(ぎりぎり非束縛になっている"状態"(のようなもの))

$S(k)$ の極



※いずれも、極が実軸に近ければ、実軸上の現象(散乱問題)に大きな影響をおよぼし断面積が大きくなる。