

§. Dirac 方程式

KG 方程式の困難: t に関して 2 階

→ t に関して 1 階の方程式を作りたい。

→ 相対論的共変性 (ローレンツ変換に対する共変性) から空間に対しても 1 階

↓

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0 \quad \text{を仮定.}$$

($\vec{\alpha}, \beta$ は x に依らない)

この方程式の解が KG 方程式の解になっていければ
 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ が満たされることになる。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0$$

↓

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right)$$

としたい。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - i\alpha_i \beta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{mc}{\hbar} - i\beta \alpha_j \frac{mc}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \end{aligned}$$

↓

$\beta^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{i,j}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$

→ α_i, β は行列: 波動関数 ψ もベクトル (多成分)

$$(\alpha_i)^2 = 1, \quad \beta^2 = 1 \quad \rightarrow \text{つまり } \alpha \text{ 行列の固有値は } \pm 1.$$

(note)

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\alpha_i^2}_{\beta} \beta + \alpha_i \beta \alpha_i = 0$$

$$\beta \alpha_i \beta + \underbrace{\beta^2}_{\alpha_i} \alpha_i = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i)$$

$$\hookrightarrow \text{Tr}(\alpha_i) = 0$$

$$\text{同様に } \text{Tr}(\beta) = 0$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

↑

α_i, β の固有値は ± 1 だが、成分の数は偶数に限る

2x2 エルミート行列で反可換で独立な行列

→ パウリ行列 σ_i の3つだけ

→ いまは α_i, β の4つが必要だが、この可能性は排除

→ 4x4 行列が最小元 α 行列

$$\beta^2 = 1, \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij}, \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

を行列の形式例として

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がある (ディラック表示)。

$$\begin{aligned} \text{(note)} \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_i \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij}$$

これより

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2) \psi}$$

Dirac 方程式

$$= H \psi$$

$$H = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2 = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m c^2$$

確率解釈:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi \\ -i\hbar \psi^\dagger \overleftarrow{\partial}_t = \psi^\dagger (i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} + \beta mc^2) \end{cases}$$

↓

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -i\hbar c \psi^\dagger \alpha_i \partial_i \psi - i\hbar c \partial_i \psi^\dagger \alpha_i \psi$$

↓

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + i\hbar c \partial_i (\psi^\dagger \alpha_i \psi) = 0$$

↓

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{連続方程式})$$

$$\begin{aligned} (\text{note}) \quad j^\mu &= (c\rho, \mathbf{j}) = (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \\ &\rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \end{aligned}$$

・電磁場中の Dirac テイラック方程式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q\phi \right) \\ \frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} = \frac{\hbar}{i} \left(\nabla - \frac{i}{\hbar} q\mathbf{A} \right) \end{cases}$$

↓

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q\phi \right) \psi = [-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \left(\nabla - \frac{i}{\hbar} q\mathbf{A} \right) + \beta mc^2] \psi$$

• γ 行列

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0$$

$$\rightarrow \left(i\hbar \beta \frac{\partial}{\partial (ct)} + i\hbar \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \underbrace{\beta^2}_{1} mc \right) \psi = 0$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^i = \beta \alpha_i$$

$$\downarrow \boxed{(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0}$$

$$(note) \quad \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2 g^{\mu\nu} 1$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$(note) \quad (\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \gamma^0$$

$$(\gamma^i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i = -\gamma^i$$

↑

ディラック-イタ行列

ディラック表示 γ

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

共変微分: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} g \varphi \right)$

$$-i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \left(\nabla - \frac{i}{\hbar} g A \right)$$

↓

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - g A_\mu = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{\hbar} g A_\mu \right)$$

$$A_\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, -A \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right)$$

↓

$$\left[i\hbar \gamma^\mu \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{\hbar} g A_\mu \right)}_{\text{III}} - mc \right] \psi = 0$$

D_μ

§. カレントのローレンツ変換性とディラック共役

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = c \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$$

$$\rightarrow j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad ; \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

ディラック共役 : $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma_0$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= (\psi^\dagger \underbrace{\gamma_0 \gamma^0}_{\substack{1 \\ \parallel}} \psi, \psi^\dagger \underbrace{\gamma_0 \gamma^i}_{\substack{\parallel \\ \alpha^i}} \psi) \\ &= (c\rho, c\mathbf{j}) \\ &= c j^\mu \end{aligned}$$

$\nearrow \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ は ローレンツ変換に対してベクトル
のようにふるまう。

ローレンツ変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta$$

$$\rightarrow \det(g) = \det(g \Lambda \Lambda) = \det(g) (\det(\Lambda))^2$$

$$\rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad \rightarrow \text{ローレンツ変換}$$

$$g_{00} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2$$

$$\underset{1}{\parallel} \rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1$$

双-次形式

$\bar{\psi}\psi$: スカラー

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$: ベクトル

$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$: 2階のテンソル ($\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$)

$\bar{\psi}\gamma_5\psi$: 擬スカラー ($\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$)

↳ ローレンツ・スカラー
パリティ・マイナス

$\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$: 擬ベクトル

空間反転に対しベクトル($\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$)と反対の
変換性

§. Dirac 方程式の平面波解

・ 静止した粒子の解 : $\mathbf{p} \psi = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi = 0$

$$\hookrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \beta m c^2 \psi = m c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi$$

線形独立な解

$$\psi_{\mathbf{p}=0, S}^{(+)} = e^{-imc^2 t / \hbar} \begin{pmatrix} \chi_S \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow E = mc^2$$

$$\psi_{\mathbf{p}=0, S}^{(-)} = e^{+imc^2 t / \hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_S \end{pmatrix} \rightarrow E = -mc^2$$

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_{\uparrow}, \chi_{\downarrow}$
($\chi_{\uparrow}, \chi_{\downarrow}$ = 波動関数)

(note) $S_z = \frac{\hbar}{2} \Sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} S_z \psi_{\mathbf{p}=0, \uparrow}^{(\pm)} = +\frac{\hbar}{2} \psi_{\mathbf{p}=0, \uparrow}^{(\pm)} \\ S_z \psi_{\mathbf{p}=0, \downarrow}^{(\pm)} = -\frac{\hbar}{2} \psi_{\mathbf{p}=0, \downarrow}^{(\pm)} \end{cases}$$

・ 一般の平面波解

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A(\mathbf{p}) \\ u_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \underbrace{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar - iEt / \hbar}}_{\parallel e^{-i p_\mu x^\mu / \hbar}}$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right)$$

$$x^\mu = (ct, +\mathbf{x})$$