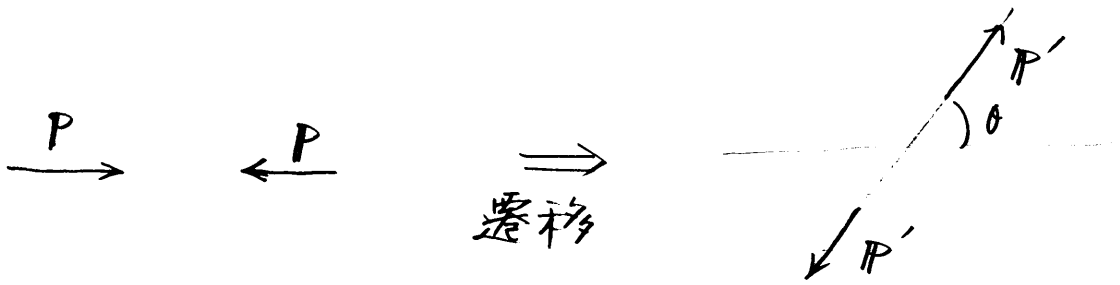
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

§. ボルン近似

量子力学では，重心系で初期状態から終状態への遷移として散乱をとらえる。



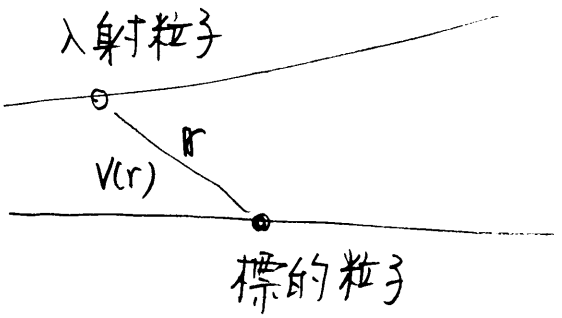
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R}{j_{in}}$$

R: 単位時間当たりの遷移確率
j_{in}: 入射フラックス

2体系の相対運動に対するシュレーディンガー方程式:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(r) = 0$$

$V(r)$: 2粒子間のポテンシャル



$E \gg |V(r)|$ のとき（高エネルギー散乱）
$V(r)$ を摂動として扱える → ボルン近似

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$V(r)=0$ としたときの解 $\longrightarrow$ $\psi(r)=e^{i\vec{P}\cdot\vec{r}/\hbar}$ (平面波)

$\psi_i(r)=e^{i\vec{P}_i\cdot\vec{r}/\hbar}$ $\longrightarrow$ $\psi_f(r)=e^{iP_f\cdot r/\hbar}$

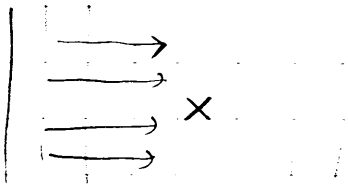
遷移

$\left(E=\frac{P_i^2}{2\mu}=\frac{P_f^2}{2\mu}\right)$

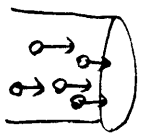
(note) 平面波は普通の意味では規格化できない:

$$\int dr\ |\psi(r)|^2=\int dr\ 1=\infty$$

解釈：平面波は粒子の流れを表す



※ 標的粒子のサイズに比べて入射ビームのサイズは圧倒的に大きい。
→ ビームの端の効果は考えずに平面波で近似しても OK.



フラックス： $j=\frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*(r)\nabla\psi(r)-\psi(r)\nabla\psi^*(r)\right)$

(note)
$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi+V\psi \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^*+V\psi^* \end{cases}$$

↓

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2=\dot{\psi}\psi^*+\psi\dot{\psi}^*$$
$$=\frac{1}{i\hbar}\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi+V\psi\right)\psi^*-\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^*+V\psi^*\right)\psi\right\}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$= -\frac{\hbar}{2i\mu}\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

↓

$$\rho(\boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r})|^2,\quad \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

とすると $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$ (連続の方程式)

(平面波の場合) $\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\cdot\frac{i\boldsymbol{p}}{\hbar}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} - e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\cdot\frac{-i\boldsymbol{p}}{\hbar}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\right)$$

$$= \frac{\boldsymbol{p}}{\mu} = \boldsymbol{v}$$

単位時間当りの全遷移確率:
← フェルミの黄金則

$$\boxed{R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{d\boldsymbol{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}|\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle|^2\,\delta(E_i - E_f)}$$

$$\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle = \int d\boldsymbol{r}\ \psi_f^*(\boldsymbol{r})\,V(\boldsymbol{r})\,\psi_i(\boldsymbol{r})$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\ e^{i(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f)\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\,V(\boldsymbol{r})$$

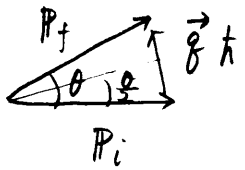
$$\equiv \int d\boldsymbol{r}\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\boldsymbol{r}) = \tilde{V}(\boldsymbol{q})$$

フーリエ変換

$$E_f = \frac{P_f^2}{2\mu} \rightarrow dE_f = \frac{P_f}{\mu} dP_f$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$\vec{q} \equiv (\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i)/\hbar$ 運動量移行 (momentum transfer)



$q\hbar = 2P_i \sin\frac{\theta}{2}$

(散乱角と q の関係)

$$R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{P_f^2 dP_f}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mu P_f dE_f d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E)$$

$$= \frac{\mu P_i}{4\pi^2\hbar^4} \int d\Omega_{P_f} |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

$$\sigma = \frac{R_{if}}{j_{in}} = \int d\Omega_{P_f} \underbrace{\frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{\| \; \frac{d\sigma}{d\Omega_{P_f}}}$$

(note) 球対称ポテンシャルに対しては

$$\tilde{V}(q) = 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^\infty r^2 dr \, e^{-iqr\cos\theta} V(r)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{-iqr} (e^{-iqr} - e^{iqr}) V(r)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{iqr} \cdot 2i \sin qr \cdot V(r)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin qr}{qr} \cdot V(r)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

[具体的な例 1] 電荷密度 $e\rho(\vec{r})$ を持つ標的粒子と電子の散乱

$$V(\vec{r}) = -e^2 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\vec{r}'$$

(note) ポアソン方程式: $\nabla^2 V = 4\pi e^2 \rho$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d\vec{r}\; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})$$

(note)
$$\int d\vec{r}\; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \partial_x^2 V(\vec{r}) = e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \partial_x V \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int d\vec{r}\; (-iq_x) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \partial_x V$$

$$= -q_x^2 \int d\vec{r}\; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V$$

↓

$$\tilde{V}(\vec{q}) = -\frac{1}{q^2} \int d\vec{r}\; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \underbrace{(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\, V(\vec{r})}_{\parallel\ \nabla^2 V = 4\pi e^2 \rho}$$

$$= -\frac{4\pi}{q^2} e^2 \underbrace{\int d\vec{r}\; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \rho(\vec{r})}_{\text{電荷密度のフーリエ変換} \equiv F(\vec{q})}$$

↓

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \cdot \frac{16\pi^2 e^4}{q^4} |F(\vec{q})|^2 = \frac{4\mu^2 e^4}{q^4 \hbar^4} |F(\vec{q})|^2$$

$$= \left(\frac{2\mu e^2}{4p_i^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 |F(\vec{q})|^2 = \left(\frac{e^2}{4E \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 |F(\vec{q})|^2$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(note) $\rho(\vec{r}) = Z\,\delta(\vec{r})$ なら $F(\vec{q}) = Z$

↓

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4E\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2$$ ラザフォードの公式

[具体的な例 2] スクリーンされたクーロンポテンシャル
(湯川ポテンシャル)

$$V(r) = g\cdot\frac{e^{-\alpha r}}{r} \qquad \left(\frac{1}{\alpha} = \text{スクリーン長}\right)$$

↓

$$\tilde{V}(q) = \frac{2\pi g}{iq}\int_0^\infty dr\,(e^{iqr} - e^{-iqr})\,e^{-\alpha r}$$

$$= \frac{2\pi g}{iq}\left[\frac{e^{(iq-\alpha)r}}{iq-\alpha} - \frac{e^{(-iq-\alpha)r}}{-iq-\alpha}\right]_{r=0}^{\infty}$$

$$= \frac{-2\pi g}{iq}\left(+\frac{1}{iq-\alpha} + \frac{1}{iq+\alpha}\right)$$

$$= +\frac{2\pi g}{iq}\cdot\frac{2iq}{q^2+\alpha^2} = \frac{4\pi g}{q^2+\alpha^2}$$

(note) $\alpha = 0$ で $\tilde{V}(q) = \frac{4\pi g}{q^2}$ → ラザフォードの公式