

§. 散乱振幅と散乱断面積

散乱波 $\psi_{sc}(r) = f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$ に対する 7 ラック

$$\vec{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi_{sc}^* \nabla \psi_{sc} - \psi_{sc} \nabla \psi_{sc}^*)$$

を計算する。

(note)
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

↓

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

↓ $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$z = r \cos \theta \rightarrow 0 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

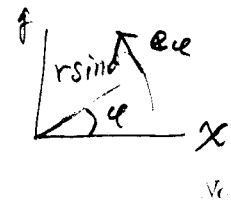
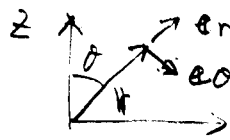
$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x \cos \theta}{r^2 \sin \theta} = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \rightarrow 0 = \frac{x}{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \cdot \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \times \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \sin \varphi \cos \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$$



$$\begin{aligned} \nabla_x &= \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} \partial_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial_\varphi \\ &= \sin \theta \cos \varphi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \end{aligned}$$

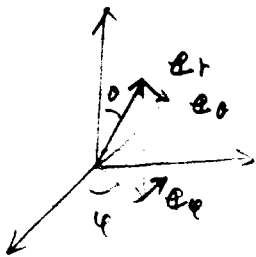
同様にして

$$\nabla_y = \sin \theta \sin \varphi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi$$

$$\nabla_z = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \left[\sin \theta \cos \varphi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right] e_x \\ &+ \left[\sin \theta \sin \varphi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right] e_y \\ &+ \left[\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right] e_z \end{aligned}$$

(note)



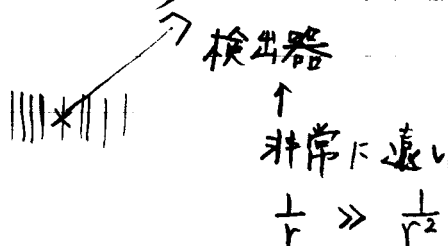
$$\begin{cases} e_r = \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y + \cos \theta e_z \\ e_\theta = \cos \theta \cos \varphi e_x + \cos \theta \sin \varphi e_y - \sin \theta e_z \\ e_\varphi = -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y \end{cases}$$

(note) $\nabla \cdot e_r = \partial_r, \quad \nabla \cdot e_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta, \quad \nabla \cdot e_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$

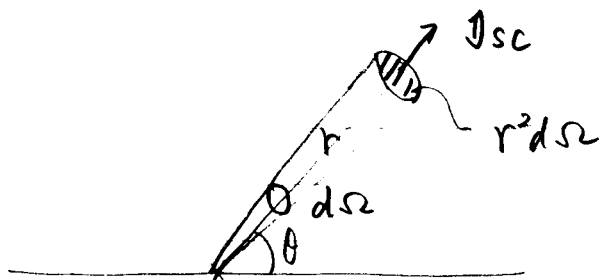
$$\boxed{\nabla = \partial_r e_r + \frac{1}{r} \partial_\theta e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi e_\varphi}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad j_{sc} &= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} (\partial_r \partial_r + \partial_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta) f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} - \text{c.c.} \right] \\ &= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[f^*(\theta) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left\{ f(\theta) \left(\frac{ik}{r} e^{ikr} - \frac{1}{r^2} e^{ikr} \right) \partial_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^{ikr}}{r^2} f'(\theta) \partial_\theta \right\} - \text{c.c.} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{\hbar}{2i\mu} \cdot 2ik \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \partial_r \quad (r \rightarrow \infty) \\ &= \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \partial_r \end{aligned}$$



検出器
↑
非常に遠い
 $\frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2}$



単位時間には立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子数

$$= r^2 d\Omega \cdot j_{sc} \cdot \partial_r = \frac{k\hbar}{\mu} |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{in}} \cdot \frac{k\hbar}{\mu} |f(\theta)|^2 = |f(\theta)|^2}$$

• ボール近似

$$\psi = \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \psi$$

$$\sim \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \phi$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{\theta})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(\vec{\theta})|^2$$

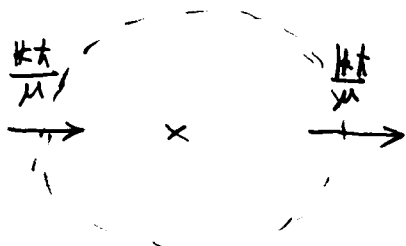
← フェルミの黄金則によるものと一致

§. 散乱波はどこから現われる? - 光学定理 -

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

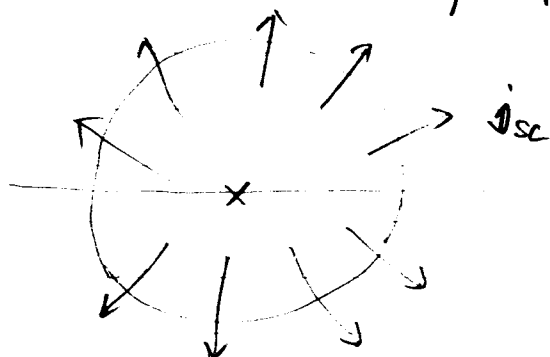
cf. L. I. Schiff
PTP 11 (54)
288

入射波のフラックス : $j_{in} = \frac{k}{\mu}$



ポテンシャルがないとき
はこけだけ

ここに散乱波のフラックス : $j_{sc} = \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} e_r$ が加わる



このフラックスはどこから現れた?

標的を中心とする大きな球を考えるときに
 j_{in} と j_{sc} だけではフラックスが保存されていない。
(球に入, 出のフラックスが球から出ている。)



$\psi_{in}(r)$ と $\psi_{sc}(r)$ の干渉が key point.

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$j = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[(e^{-ik \cdot r} + f^*(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}) \right.$$

$$\times (ik e^{ik \cdot r} + f(\theta) \underbrace{\frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)}_{\substack{\text{"} \\ ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \text{"}}} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2} e^{ikr} \mathbf{e}_\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta))$$

$$- c.c.]$$

$$\sim 0 (r \rightarrow 0)$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu} [ik + ik |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$+ ik f^*(\theta) \frac{e^{-ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik \mathbf{e}_r f(\theta) \frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r}$$

$$- c.c.]$$

$$= \frac{\hbar k}{\mu} + \frac{k\hbar}{\mu} \mathbf{e}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2}$$

$$+ \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot \frac{1}{r} (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta) \left[f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \right]$$

干涉項

$r \rightarrow \infty, \cos\theta \neq 1$ で 激しく振動
→ 角度積分をすると 0 ~ 0 を除き
ゼロ

$$(note) \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + (V-E) \psi = 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + (V-E) \psi^* = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\text{ガウスの定理: } \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r \underbrace{dS}_{r^2 d\hat{r}}$$

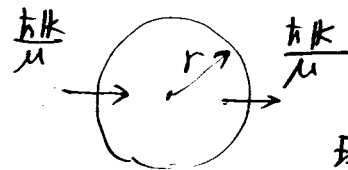
$$\hookrightarrow \left[\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} r^2 d\hat{r} = 0 \right]$$

(半径 r の球面上
で面積分)

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{\mu} + \frac{k\hbar}{\mu} \mathbf{e}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} + (\text{干渉項})$$

$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} r^2 d\hat{r}$ を計算する

$$\text{第1項: } N_1 = \int \frac{\hbar}{\mu} \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r}_{k \cos \theta} r^2 d\mathbf{r} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot r^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta = 0$$



球面に入ってきたと
同じ量が出ていく

$$\begin{aligned} \text{第2項: } N_2 &= \frac{k\hbar}{\mu} \int d\hat{r} |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{k\hbar}{\mu} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k\hbar}{\mu} \sigma \end{aligned}$$

第3項:

$$N_3 = \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot \frac{1}{r} \int \underbrace{r^2 d\hat{r}}_{2\pi r^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta)} (1+\cos\theta) [f^*(0) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(0) e^{ikr(1-\cos\theta)}]$$

$$= \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot 2\pi r \left\{ -\frac{1}{ikr} f(0) (1+\cos\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \Big|_{\cos\theta=-1}^1 \sim 0 \right. \\ \left. + \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left[\frac{d}{d(\cos\theta)} f(0) (1+\cos\theta) \right] e^{ikr(1-\cos\theta)} \right. \\ \left. + \text{c.c.} \right\} \sim O\left(\frac{1}{r}\right)$$

(もう一度部分積分をみると
1/r が出てくる。)

$$\sim \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot 2\pi r \left(-\frac{2}{ikr} f(0) + \frac{2}{ikr} f^*(0) \right)$$

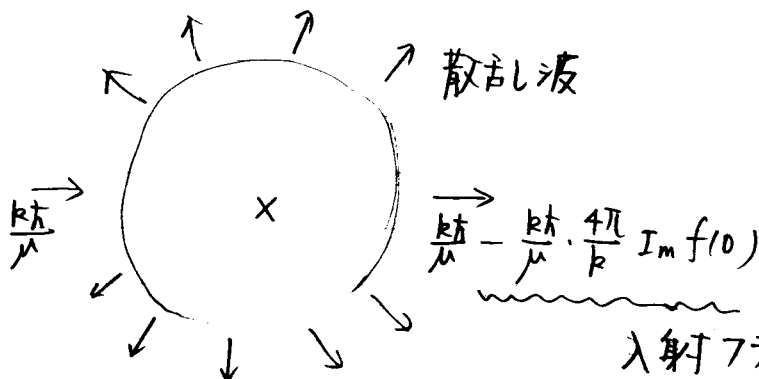
$$= -\frac{2\pi\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{i} (f(0) - f^*(0))$$

$$= -\frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

$$\leadsto 0 = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{k\hbar}{\mu} \sigma - \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

$$\leadsto \boxed{\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)}$$

光学定理



入射フラックスの減少分が
散乱波のフラックスになる。

5. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi = \underbrace{E}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}} \psi$$

$$\psi(r) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} \quad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・ 部分波展開

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \underbrace{j_l(kr)}_{\text{球ハルセル関数}} \underbrace{P_l(\cos \theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}$$

(証明) $e^{ikr \cos \theta} = \sum_l a_l(r) P_l(\cos \theta)$ と展開する。

$$(\text{note}) \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

$$\downarrow a_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} P_l(\cos \theta)$$

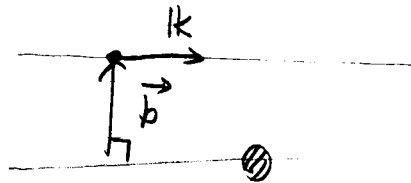
$$(\text{note}) j_l(y) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^1 dx e^{ixy} P_l(x)$$

$$\downarrow a_l(r) = (2l+1) i^l j_l(kr)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

↓ 平面波には全ての部分波 (角運動量) l が混ざっている。

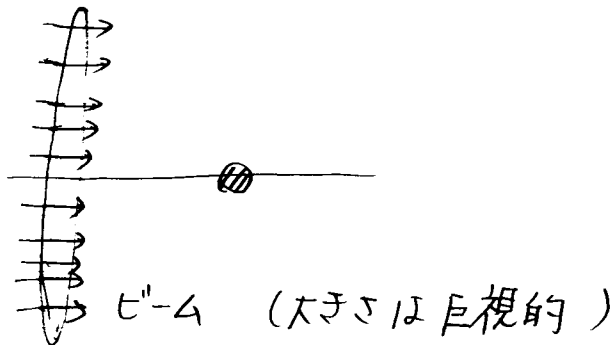
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow l = b k \hbar$$

衝突係数

↓ $\sum_{l=0}^{\infty} \dots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合っている。



高エネルギー : ホールン近似が OK
平面波を使って角運動量が陽に
現れない議論ができた。

低エネルギー : 各 l ごとに考える必要がある
→ 部分波解析

・部分波解析

$$\psi(r) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

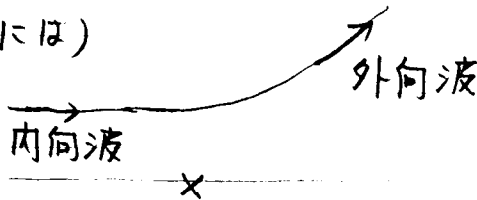
$r \rightarrow \infty$ を考える (検出器のあたりにおける振るまい)

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \quad (kr \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr} (e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})})$$

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}} \right] P_l(\cos\theta)$$

(半古典的には)



(短距離)

ポテンシャルがある場合

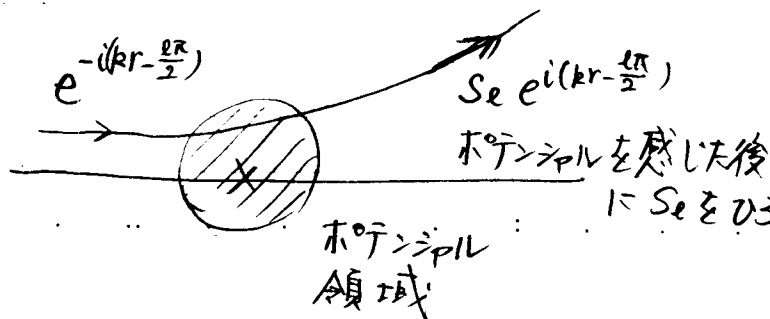
$r \rightarrow \infty$ では $V(r) \rightarrow 0$

↓ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow \psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \underbrace{S_l}_{\text{S行列}} e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] \times P_l(\cos\theta)$$

「S行列」

ポテンシャルの効果を反映



※ 実ポテンシャルなら
 $|S_l| = 1$
(フラックスの保存)

$$\begin{aligned}
 \psi(r) &\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{-e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}} \right] P_l(\cos\theta) \\
 &= e^{ik \cdot r} + \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) \underbrace{i^l e^{-i\frac{l\pi}{2}}}_{\substack{\parallel \\ i^l \cdot (-i)^l = 1}} e^{ikr} (1 - S_l) P_l(\cos\theta) \\
 &= e^{ik \cdot r} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right]}_{\substack{\parallel \\ f(\theta)}} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}
 \end{aligned}$$

・ 全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \cdot \frac{S_{l'}^* - 1}{-2ik} \underbrace{\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)}_{\substack{\parallel \\ \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l, l'}}} \\
 &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2
 \end{aligned}$$

(note) 光学定理

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (\underbrace{|S_l|^2}_{1} - S_l - S_l^* + 1)$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(S_l))$$

$$\Im f(0) = \Im \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \underbrace{P_l(1)}_1$$

$$= -\frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) \operatorname{Re}(S_l - 1)$$

$$= \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(S_l))$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im f(0)$$