・部分波解析

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l\,j_l(kr)\,P_l(\cos\theta)$$

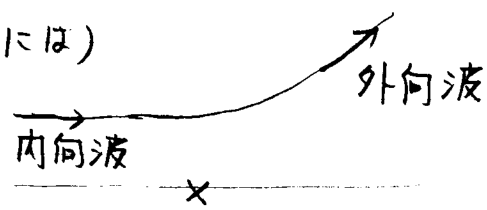
$r\to\infty$ を考える（検出器のあたりにおける振るまい）

$$j_l(kr) \longrightarrow \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right) \qquad (kr\to\infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right)$$

$$\downarrow\quad \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\,i^l\left[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}}\right]P_l(\cos\theta)$$

（半古典的には）



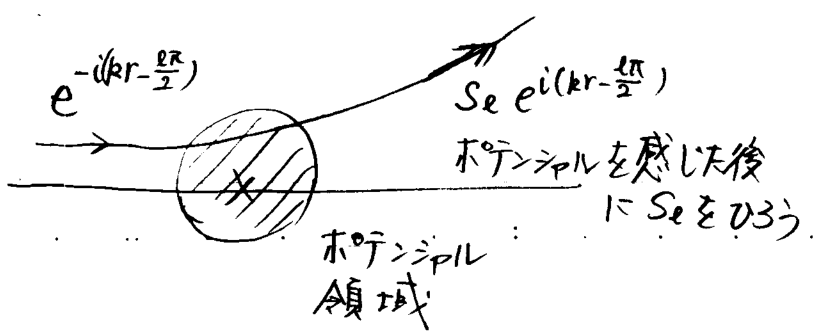
（短距離）
ポテンシャルがある場合

$r\to\infty$ では $V(r)\to 0$

⇩ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\downarrow\quad \psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\,i^l\left[e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}\right] \times P_l(\cos\theta)$$

「S行列」
ポテンシャルの効果を反映



※実ポテンシャルなら
$|S_l| = 1$
（フラックスの保存）

$$\psi(\mathbf{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \left[\underbrace{e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})}}_{-e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}} - S_l\, e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)\underbrace{i^l\, e^{-i\frac{l\pi}{2}}}_{i^l\cdot(-i)^l = 1} e^{ikr}(1-S_l)\, P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l-1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

・全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega\, |f(\theta)|^2$$

$$= \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1)\frac{S_l-1}{2ik}\cdot\frac{S_{l'}^*-1}{-2ik} \underbrace{\int d\Omega\, P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)}_{\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{l,l'}}$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\,|S_l-1|^2$$

(note) 光学定理

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\,|S_\ell - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\big(\underbrace{|S_\ell|^2}_{=1} - S_\ell - S_\ell^* + 1\big)$$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\big(1 - \mathrm{Re}(S_\ell)\big)$$

$$\mathrm{Im}\, f(0) = \mathrm{Im} \sum_\ell (2\ell+1)\frac{S_\ell - 1}{2ik}\underbrace{P_\ell(1)}_{=1}$$

$$= -\frac{1}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)\,\mathrm{Re}(S_\ell - 1)$$

$$= \frac{1}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)\big(1 - \mathrm{Re}(S_\ell)\big)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\, f(0)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

○ 位相のずれ (phase shift)

弾性散乱しか考えないときは $|S_\ell| = 1$ (フラックスの保存)

$\rightarrow$ $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ と書くと:

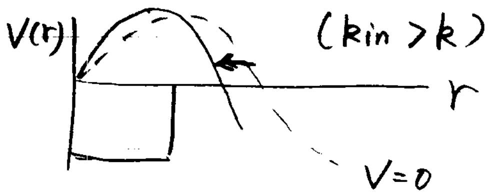
$$e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} - S_\ell e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}$$

$$= e^{i\delta_\ell}\left[e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)} - e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)} \right]$$

$$= -2i\, e^{i\delta_\ell} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

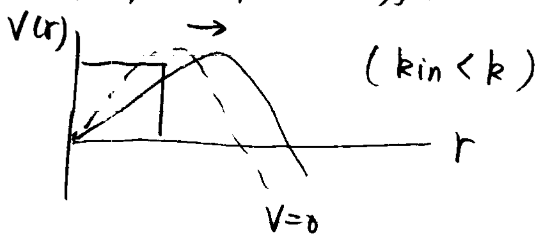
(自由粒子とくらべて δ_ℓ だけ位相がずれた)

引力ポテンシャルの場合



$\delta_\ell > 0$

斥力ポテンシャルの場合



$\delta_\ell < 0$

(note) $j_\ell(kr) \rightarrow \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$

遠心力ポテンシャル $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ による位相のずれ
: (マイナス符号に注目)

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(note)
$$|S_\ell - 1|^2 = |e^{i\delta_\ell}(e^{i\delta_\ell} - e^{-i\delta_\ell})|^2$$
$$= |2i\, e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell|^2$$
$$= 4\sin^2\delta_\ell$$

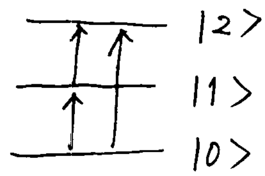
$$\sigma = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)|S_\ell - 1|^2$$
$$= \frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$$

$\left(= \sum_\ell \sigma_\ell \right.$ と書くと $\left. \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \right)$

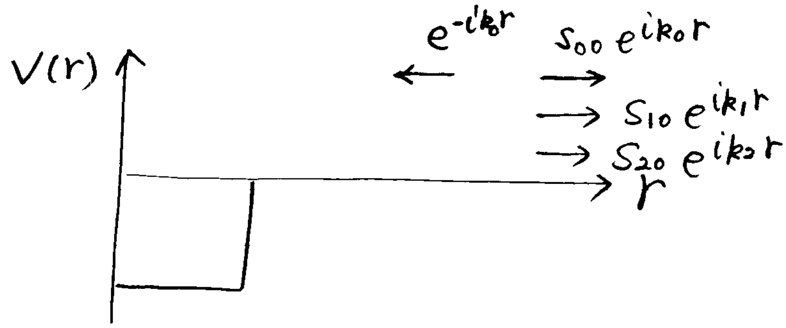
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

・なぜ S「行列」とよぶのか.

非弾性散乱があるとき



散乱の途中で標的粒子が励起される
(入射粒子でもよい)



$S_{\alpha'\alpha}$: "チャンネル" α で入射してチャンネル α' で出ていく振幅

弾性散乱しか考えないときには $S_{\alpha\alpha}$ のみ。

(note) 非弾性散乱を考えると $|S_{00}| < 1$

↑ 弾性散乱のS行列

※ フラックスの保存は $\sum_{\alpha'} |S_{\alpha' 0}|^2 = 1$

(S行列のユニタリー性)

これを表現するのに光学ポテンシャルがよく用いられる

$$V_{opt}(r) = V(r) - iW(r) \qquad (W > 0)$$

弾性チャンネルに対する有効ポテンシャル

(note) $\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$

$$\downarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\cancel{\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi} + \psi^*\nabla^2\psi - \cancel{\nabla\psi\cdot\nabla\psi^*} - \psi\nabla^2\psi^*\right)$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V - iW\right)\psi = E\psi \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V + iW\right)\psi^* = E\psi^* \end{cases}$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu}\cdot\left(-\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\left\{\psi^*(E - V + iW)\psi - \psi(E - V - iW)\psi^*\right\}$$

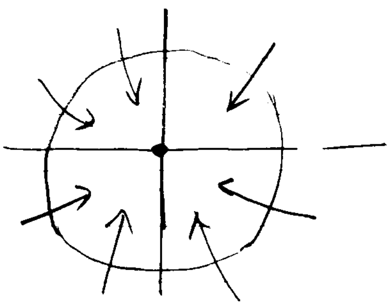
$$= -\frac{2}{\hbar}|\psi(\boldsymbol{r})|^2 W(\boldsymbol{r}) \quad < 0 \quad (\text{for } W > 0)$$

$$\downarrow \quad \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{r} \quad < 0$$ (フラックスの減少)

・吸収断面積

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \left[\frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - S_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

半径 r の球面に入る全内向フラックス：



$$\psi_{in}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{i}{2kr}\sum_l (2l+1)(-)^l e^{-ikr} P_l(\cos\theta)$$

$$\boldsymbol{j}_{in} = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{1}{r^2}\left|\frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)(-)^l P_l(\cos\theta)\right|^2 \boldsymbol{e}_r$$

$$\downarrow \quad j_{in}^{(net)} = \int r^2 d\Omega\, \boldsymbol{j}_{in}\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{1}{4k^2}\sum_l (2l+1)\cdot 4\pi$$

$$= \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス.

$$\psi_{out}(\mathbf{r}) = \frac{i}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)\, i^\ell S_\ell \frac{e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{r} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\downarrow \quad j_{out}^{net} = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\,|S_\ell|^2$$

$$\downarrow \quad \Delta j = j_{in}^{net} - j_{out}^{net} = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)(1-|S_\ell|^2)$$

$\downarrow$

吸収断面積: $\boxed{\sigma_{abs} = \frac{\Delta j}{j_{inc}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)(1-|S_\ell|^2)}$

(note) $|S_\ell| = 1$ なら $\sigma_{abs} = 0$.

(note)

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\,|1-S_\ell|^2 + \frac{\pi}{k^2}\cdot\sum_\ell (2\ell+1)(1-|S_\ell|^2)$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\left(1 - S_\ell - S_\ell^* + \cancel{|S_\ell|^2} + 1 - \cancel{|S_\ell|^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\left(1 - \frac{S_\ell + S_\ell^*}{2}\right)$$

$$\mathrm{Im}\, f(0) = \mathrm{Im}\sum_\ell (2\ell+1)\frac{S_\ell - 1}{2ik}$$

$$= -\sum_\ell (2\ell+1)\frac{\mathrm{Re}(S_\ell)-1}{2k} = \frac{1}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)\left(1 - \frac{S_\ell + S_\ell^*}{2}\right)$$

$$= \frac{k}{4\pi}\sigma_{tot} \qquad \text{(拡張された光学定理)}$$