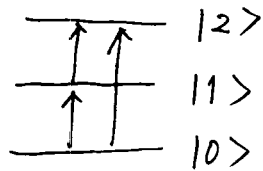
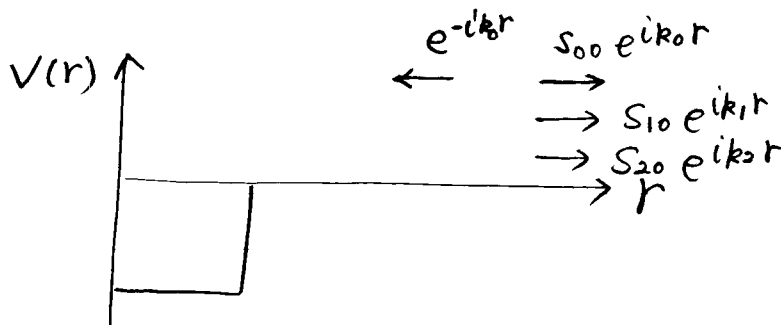


• なぜ S 「行列」 とよぶのか

非弾性散乱があるとき



散乱の途中で標的粒子が励起される
(入射粒子でもよい)



$S_{\alpha\alpha'}$: "チャンネル" α で入射してチャンネル α' で出ていく振幅

弾性散乱しか考えないときには $S_{\alpha\alpha}$ のみ。

(note) 非弾性散乱を考えると $|S_{00}| < 1$

↑ 弾性散乱の S 行列

$$\text{※ フラックスの保存は } \sum_{\alpha'} |S_{\alpha 0}|^2 = 1$$

(S 行列のユニタリー性)

これを表現するのに光学ポテンシャルがよく用いられる

$$V_{\text{opt}}(r) = V(r) - iW(r) \quad (W > 0)$$

弾性チャンネルに対する有効ポテンシャル

(note) $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

$\downarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* \nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \psi \nabla^2 \psi^*)$

$$\begin{cases} (-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V - iW) \psi = E \psi \\ (-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V + iW) \psi^* = E \psi^* \end{cases}$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu} \cdot \left(-\frac{2W}{\hbar^2}\right) \{ \psi^* (E - V + iW) \psi - \psi (E - V - iW) \psi^* \}$$

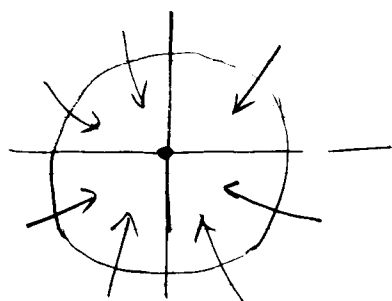
$$= -\frac{2}{\hbar} |\psi(r)|^2 W(r) < 0 \quad (\text{for } W > 0)$$

$\downarrow \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV < 0 \quad (\text{フラックスの減少})$

・吸収断面積

$$\psi(r) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \left[\frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - S_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \right] P_l(\cos\theta)$$

半径 r の球面に入る全内向フラックス:



$$\psi_{in}(r) = \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) (-)^l e^{-ikr} P_l(\cos\theta)$$

$$\mathbf{j}_{in} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \left| \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) (-)^l P_l(\cos\theta) \right|^2 \mathbf{e}_r$$

$\downarrow j_{in}^{(net)} = \int r^2 d\Omega \mathbf{j}_{in} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{4k^2} \sum_l (2l+1) \cdot 4\pi$

$$= \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス

$$\psi_{out}(r) = \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) i^l S_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos\theta)$$

$$\downarrow \quad j_{out}^{net} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l|^2$$

$$\downarrow \quad \Delta j = j_{in}^{net} - j_{out}^{net} = \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

$$\downarrow \quad \text{吸収断面積: } \sigma_{abs} = \frac{\Delta j}{j_{inc}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

(note) $|S_l| = 1$ なら $\sigma_{abs} = 0$.

(note)

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_l|^2 + \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - S_l - S_l^* + \cancel{|S_l|^2} + 1 - \cancel{|S_l|^2}) \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2}\right) \end{aligned}$$

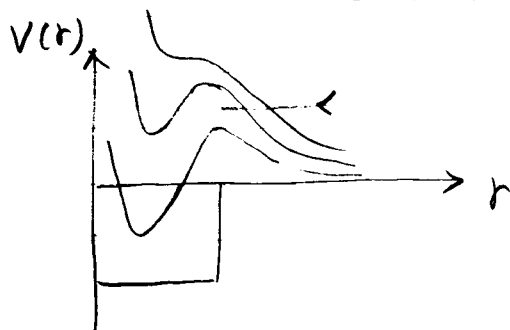
$$\begin{aligned} \text{Im } f(0) &= \text{Im} \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \\ &= - \sum_l (2l+1) \frac{\text{Re}(S_l) - 1}{2k} = \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2}\right) \\ &= \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \quad (\text{拡張された光学定理}) \end{aligned}$$

低エネルギー散乱と散乱長

$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \quad \text{と書く}$$

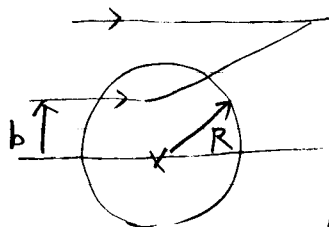
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力ポテンシャル}} - E \right) u_l(r) = 0$$

遠心力ポテンシャル



反射が起きるためには
ポテンシャルのレ>ジで
トンネルしなければなら
ない

↓
大きな l は 寄与しない。



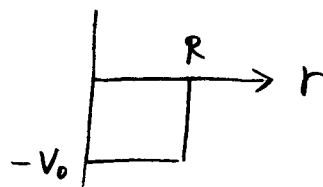
古典的には標的から
相互作用レンジ R の内側
に入る部分波 (b ≤ R) のみ
が寄与 → l_{max} = kR

↓ 部分波解析は低エネルギー
で特に有効。

E ~ 0 では l=0 のみが寄与

以下, E ~ 0, l=0 を考える。

(例) 井戸型ポテンシャル



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

波動関数:
$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin \tilde{k} r & (r \leq R) \\ B \sin kr + C \cos kr & (r > R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

(note)

$$B \sin kr + C \cos kr = B \left(\sin kr + \frac{C}{B} \cos kr \right)$$

||

$$\begin{aligned} B' \sin(kr + \delta) &= B' (\sin kr \cos \delta + \cos kr \sin \delta) \\ &= B' \cos \delta (\sin kr + \tan \delta \cos kr) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B}$$

○ $r = R$ の波動関数の接続

$$\begin{cases} A \sin \tilde{k} R = B \sin kR + C \cos kR \\ A \tilde{k} \cos \tilde{k} R = B k \cos kR - C k \sin kR \end{cases}$$

↓

$$\frac{1}{\tilde{k}} \frac{\sin \tilde{k} R}{\cos \tilde{k} R} = \frac{\sin kR + \frac{C}{B} \cos kR}{k \cos kR - \frac{C}{B} k \sin kR}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{C}{B} = \frac{k \cos kR \sin \tilde{k} R - \tilde{k} \sin kR \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R \cos kR + k \sin kR \sin \tilde{k} R}$$

$$\sim \frac{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R}{\tilde{k} \cos \tilde{k} R} \cdot k \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow k \cot \delta = \frac{\tilde{k} \cos \tilde{k} R}{\sin \tilde{k} R - \tilde{k} R \cos \tilde{k} R} = \text{const.}$$

$$\equiv -\frac{1}{a} \quad (a: \text{散乱長})$$

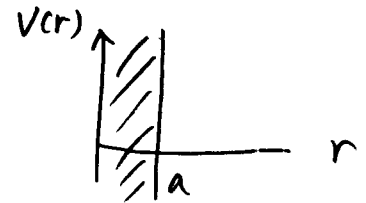
(note) $l \neq 0$ のときは $\delta_l \propto k^{2l+1}$ となる。

(note) $E \ll |V_0|$ のとき, $k \rightarrow -k$ になると
 $\tan \delta \rightarrow -\tan \delta$

$$\Rightarrow k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} \underbrace{r_{\text{eff}}}_{\text{有効距離}} k^2 + \dots$$

cf. 剛体球による散乱 (s-wave)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr + \delta)$$

$$u(r=a) = 0 \quad \leadsto \quad ka + \delta = 0$$

$$\leadsto \quad \underbrace{\frac{k}{\delta}}_{\substack{\text{scattering} \\ \text{length}}} = - \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{scattering length}}$$

散乱長 $\leftrightarrow$ 剛体球の半径.

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

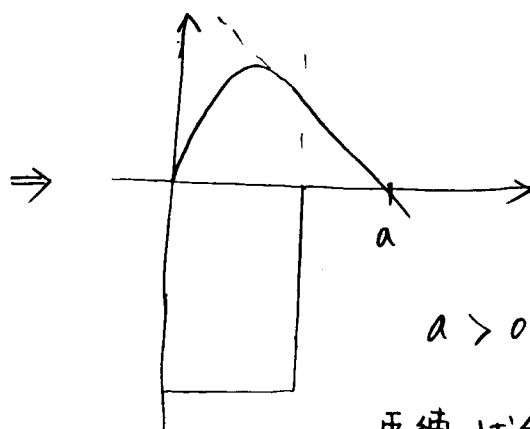
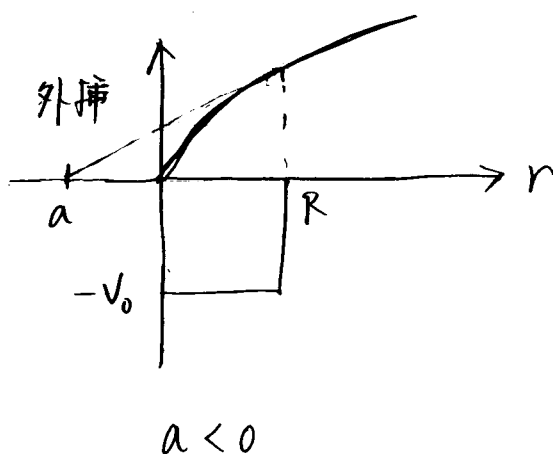
↓ 低エネルギー散乱は a, r_{eff} の2つのパラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー散乱が必要。)

・散乱長の意味

$$r \geq R \quad U_0(r) \propto \sin(kr + \delta) \sim kr + \delta \quad (k \rightarrow 0) \\ = k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{a} = k \cot \delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\downarrow U_0(r) \propto (r - a) \quad (k \rightarrow 0) \\ \text{これは } r = a \text{ でゼロ。}$$

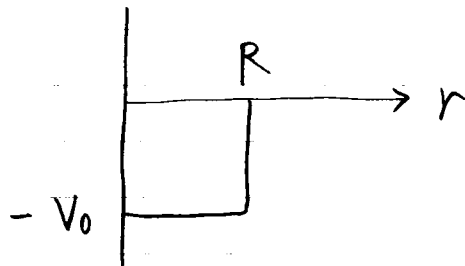


束縛状態があるとき

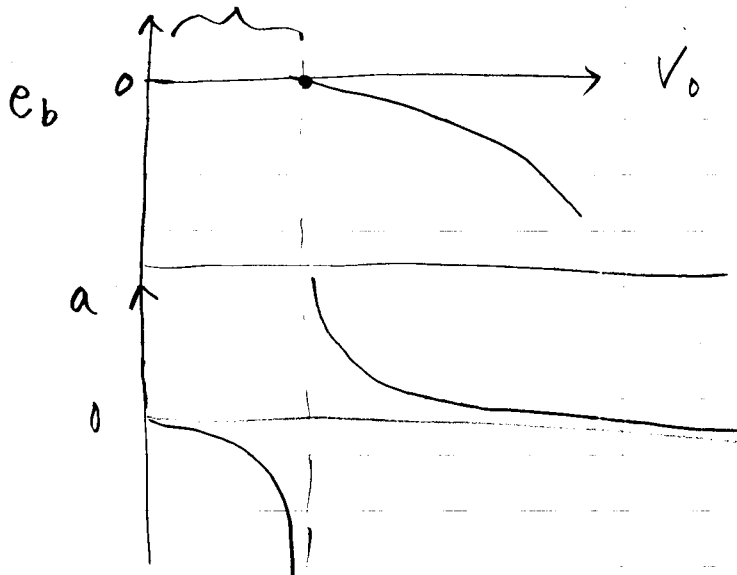
ゼロエネルギーで束縛するときは $a = \infty$ (ユニタリ極限)

ユニタリ-極限

井戸型ポテンシャル



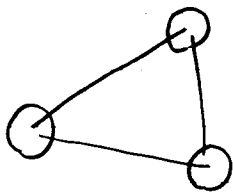
V_0 が小さいと束縛状態がない



ユニタリ-極限

(長さスケールが小さくなる)

エフェクト状態 (ボゾン3体系)



ユニタリ-極限で
無限個の束縛状態

$$k \cot \delta = -\alpha + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \dots$$

井戸型ポテンシャル $\rightarrow$ ユニタリ-極限で $r_{\text{eff}} = R$