

$$k \cot \delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

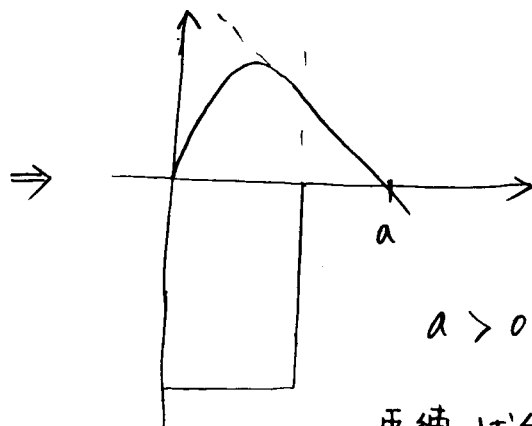
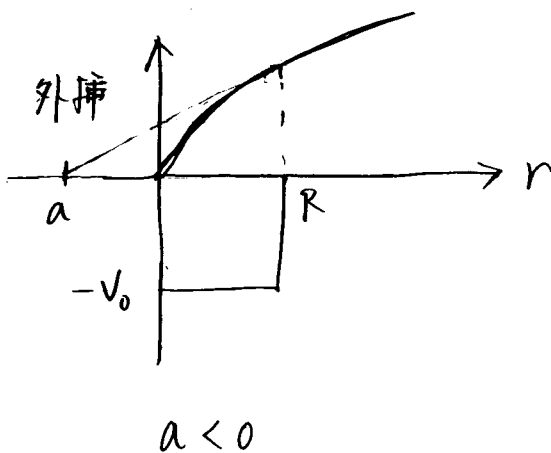
↓ 低エネルギー散乱は a, r_{eff} の 2 つのパラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー散乱が必要。)

・散乱長の意味

$$r \geq R \quad U_0(r) \propto \sin(kr + \delta) \sim kr + \delta \quad (k \rightarrow 0) \\ = k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{a} = k \cot \delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\downarrow U_0(r) \propto (r - a) \quad (k \rightarrow 0) \\ \text{これは } r = a \text{ でゼロ。}$$

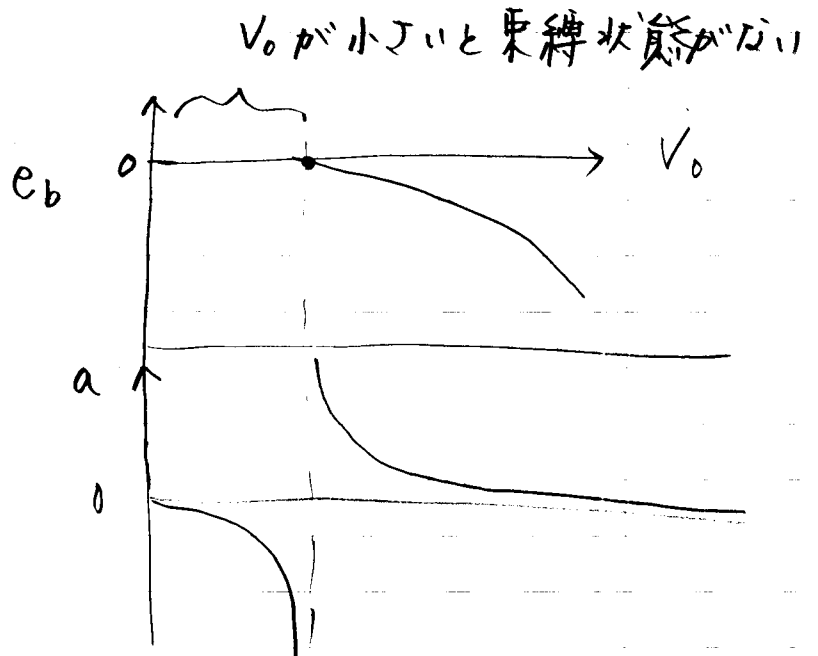
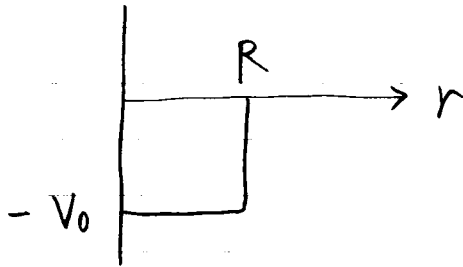


束縛状態があるとき

ゼロエネルギーで束縛するときは
 $a = \infty$ (ユニタリ極限)

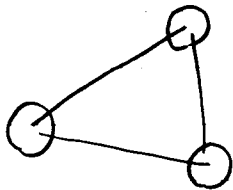
ユニタリ- 極限

井戸型ポテンシャル



ユニタリ- 極限
(長さスケールがなくなる)

イソモフ状態 (ボゾン3体系)



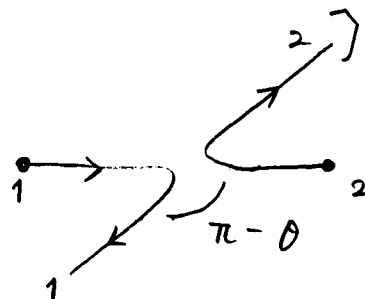
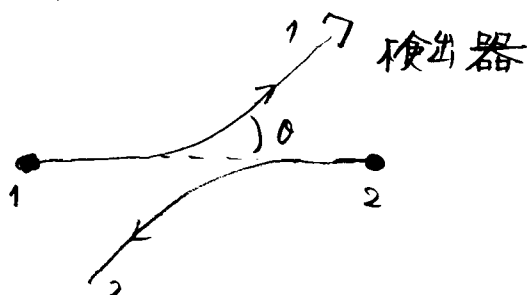
ユニタリ- 極限で
無限個の束縛状態

$$k \cot \delta = -\alpha + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \dots$$

井戸型ポテンシャル $\rightarrow$ ユニタリ- 極限で $r_{\text{eff}} = R$

§. 同種粒子による散乱

同種粒子



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
こういう場合

同種粒子: 粒子の入れかえに対し波動関数は
 対称 / 反対称

$$\Psi_{\pm}(r) = \Psi(r) \pm \Psi(-r)$$

$$\rightarrow (e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r})$$

空間部分に
対称性

$$+ \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi - \theta)]}_{\text{III } f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

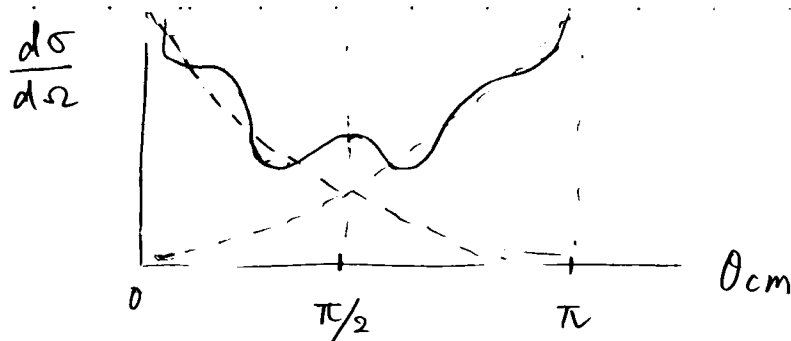
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm 2 \operatorname{Re}[f^*(\theta) f(\pi - \theta)]$$

干渉項

↑

実際に $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反応などで観測



- ・ 断面積は $\theta_{cm} = \pi/2$ で対称
- ・ 干渉項のために振動する

- ・ $s \leq 0$ の粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

- ・ $s \leq 1/2$ の粒子 (フェルミオン)

$$\Psi(1,2) = \Psi(r_1, r_2) \chi_{spin}$$

χ_{spin} は $\begin{matrix} \text{対称} & \text{反対称} \\ \text{反対称} & \text{対称} \end{matrix}$

$$S = 0$$

$$\chi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) : \text{反対称}$$

→ 空間部分は対称

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

$$S = 1$$

$$\chi_{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle : \text{対称}$$

→ 空間部分は反対称

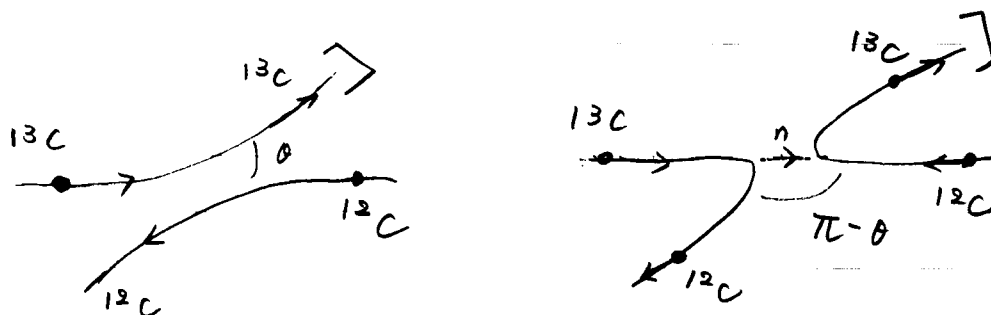
$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(0)|^2$$

$s \leq 1$ 偏極の無い時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(0)|^2 + |f(\pi-0)|^2 - \text{Re}[f^*(0)f(\pi-0)]$$

(note) 弾性的粒子移行反応

例) $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ ($^{13}\text{C} = ^{12}\text{C} + n$)



^{13}C を検出する検出器は上の2つのプロセスを
原理的に区別できない

$$\rightarrow f(\theta) = f_{el}(\theta) + f_{trans}(\pi - \theta)$$

粒子移行過程
の振幅

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = |f_{el}(\theta)|^2 + |f_{trans}(\pi - \theta)|^2 \\ + 2 \operatorname{Re} [f_{el}^*(\theta) f_{trans}(\pi - \theta)]$$

干渉項

↓
振動

§. 共鳴散乱

ある Γ

S 行列が $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ に - 位の極 (ポール) を持つとする。

このとき,

$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} = e^{2i\delta_{bg}} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} \right)$$

と定まる。 $\delta_{bg}(E)$ は E のゆるやかな関数 (バックグラウンド位相差)。 $|S_l(E)| = 1$ に注意。

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R(E)}$ とすると (c は実数)

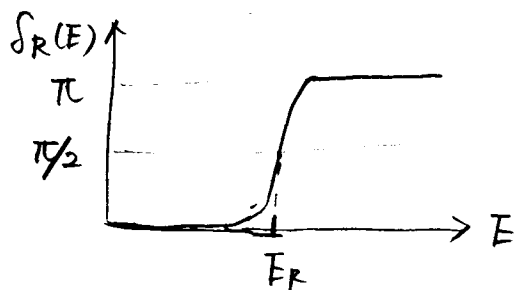
$$S_l(E) = e^{2i\delta_{bg}(E)} \frac{c e^{i\delta_R(E)}}{c e^{-i\delta_R(E)}} = e^{2i(\underbrace{\delta_{bg}(E) + \delta_R(E)}_{\delta_l(E)})}$$

(note) $E - E_R - i\frac{\Gamma}{2} = c e^{i\delta_R} = c (\cos \delta_R + i \sin \delta_R)$

$$\Rightarrow \tan \delta_R = \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R}$$

$\Rightarrow$

$$\delta_l(E) = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R} \right) + \delta_{bg}(E)$$

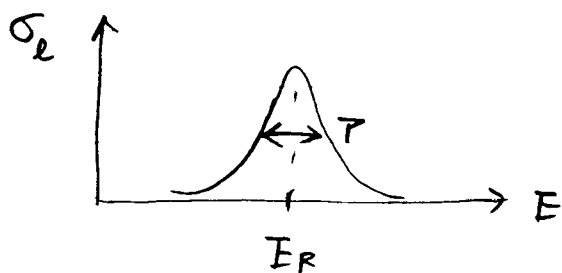


$\delta_R(E)$ は $E = E_R$ で $\pi/2$ を切る。

今, 簡単のため $\delta_{bg}(E) = 0$ とすると,

$$\begin{aligned}\sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}}{1 + \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2}} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\frac{P^2}{4}}{(E-E_R)^2 + \frac{P^2}{4}}\end{aligned}$$

(Breit-Wigner の公式)



共鳴散乱

共鳴は $\delta_R(E)$ が $\frac{\pi}{2}$ を切るところ。

(note) よくある誤解。「共鳴エネルギー」は $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切るところ → これは間違。一般的に $\delta_{bg}(E)$ のために $E = E_R$ で $\delta = \pi/2$ になるとは限らない。

