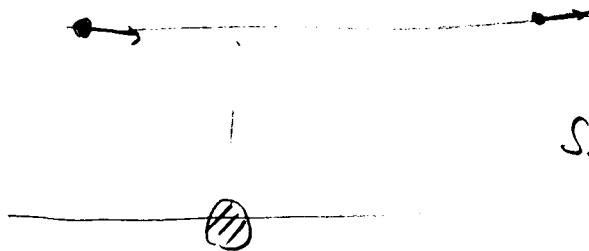


長距離力 $\rightarrow$ r が 1 くらい入っても影響を
受ける (波動関数が平面波
にならない)



$$\downarrow$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{s_l - 1}{2ik} P_l(\cos \theta)$$

→ 別の取扱いは必要

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right) \psi(r) = 0$$

放射物線座標 $\xi = r(1 - \cos \theta) = r - z$
 $\eta = r(1 + \cos \theta) = r + z$

を使ってこの方程式を解く。

$$\psi(\xi, \eta) = c e^{ikz} F(-i\eta, 1, ik\xi)$$

合流超幾何関数

$$\eta = \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v} \quad (\gamma'' = 2 - 7.11 \times 10^{10} \text{ X-} \gamma)$$

漸近形:

$$\psi(\xi, \eta) \rightarrow \frac{C e^{\frac{\eta\pi}{2}}}{T(1+i\eta)} \left\{ e^{i(kz + \eta \ln(r-z))} + f_c(0) \frac{e^{ikr - i\eta \ln 2kr}}{r} \right\}$$

$$f_c(0) = - \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0}$$

$$\sigma_0 = \arg T(1+i\eta)$$

$$(note) \quad \frac{d\sigma_c}{d\Omega} = |f_c(0)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$$

(ボールの近似で求めた
ものと一致)

各 l に対して $\psi_{lm} = Y_{lm}(\hat{r}) u_l(r)$ の方程式を解く:

$$\psi_{lm}(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r})$$

$$\downarrow \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - E \right) u_l(r) = 0$$

解はポインティング関数

線形独立な解

$$u_l(r) = \begin{cases} F_l(kr) \rightarrow \sin(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \\ G_l(kr) \rightarrow \cos(kr - \eta \ln(2kr) + \sigma_l - \frac{l\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\gamma\text{-ray phase shift: } \sigma_l = \arg T(l+1+i\eta)$$

§. Klein-Gordon 方程式

(復習) $E = \frac{P^2}{2m} + V(r)$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad P \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\downarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi$$

相対論 下は: $E^2 = m^2 c^4 + P^2 c^2$

$$\downarrow \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2) \psi$$

or $\left(-\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \nabla^2 \right) \psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{ダランバルシアン})$$

$$\boxed{\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0}$$

クライン・ゴールドン方程式

(note) $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$
 $x_\mu = (ct, -\mathbf{r})$

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \equiv i\hbar \partial^\mu$$

$$p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \equiv i\hbar \partial_\mu$$

2

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

• Klein-Gordon 方程式の問題点：確率解釈

$$\begin{cases} (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \phi = 0 \\ (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \phi^* = 0 \end{cases}$$

↓

$$\phi^* (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \phi - \phi (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \phi^* = 0$$

$$\rightarrow \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) = 0$$

$$\frac{2m}{i\hbar} j_\mu \quad \text{とすると} \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \quad \text{であるが,}$$

$$\rho \equiv \frac{1}{c} j_0 = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^*)$$

は負になる場合がある。→ 確率密度とは解釈できない。

(note) 非相対論

$$\rho = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$\rho = |\psi|^2$ は必ず正。

§. Dirac 方程式

KG 方程式の困難: t に関して 2 階

→ t に関して 1 階の方程式を作りたい。

→ 相対論的共変性 (ローレンツ変換に対する共変性) から空間に対しても 1 階

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0 \quad \text{を仮定.}$$

($\vec{\alpha}, \beta$ は x に依らない)

この方程式の解が KG 方程式の解になって、これは
 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ が満たされることになる。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \\ \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right)$$

と仮定したい。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + i\beta \frac{mc}{\hbar} \right) \\ = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \underbrace{\alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}} - \underbrace{i\alpha_i \beta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{mc}{\hbar} - i\beta \alpha_j \frac{mc}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x_j}} + \underbrace{\beta^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\beta^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0}$$

→ α_i, β は行列: 波動関数 ψ もベクトル
 → スピンの自由度が自然に導入される (多成分)

$$(\alpha_i)^2 = 1, \quad \beta^2 = 1 \quad \rightarrow \text{それぞれ } \alpha \text{ 行列の固有値は } \pm 1,$$

(note)

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\alpha_i^2}_{\beta} \beta + \alpha_i \beta \alpha_i = 0$$

$$\beta \alpha_i \beta + \underbrace{\beta^2}_{\alpha_i} \alpha_i = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i)$$

$$\hookrightarrow \text{Tr}(\alpha_i) = 0$$

$$\text{同様に } \text{Tr}(\beta) = 0$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

↑

α_i, β の固有値は ± 1 だが、成分の数は偶数に限る

2x2 エルミート行列で反可換で独立な行列

→ パウリ行列 σ_i の3つだけ

→ いまは α_i, β の4つが必要だが、この可能性は排除。

→ 4x4 行列が最小元 α 行列。