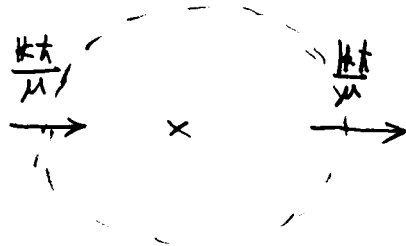


§. 散乱波はどこから現われる? - 光学定理 -

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

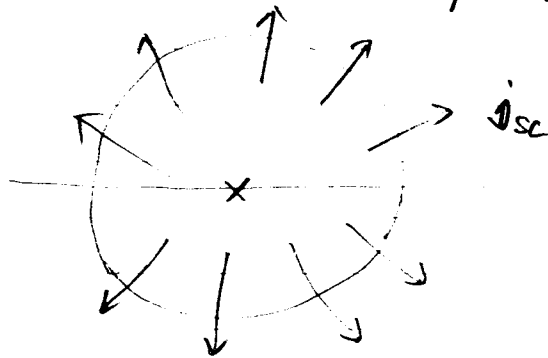
cf. L. I. Schiff
PTP 11 (54)
288

入射波のフラックス : $J_{in} = \frac{k}{\mu}$



ボリ > シェルがたいとき
はこけだす

ここに散乱波のフラックス : $J_{sc} = \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} e_r$ が加わる



このフラックスはどこから現れた?

標的を中心とする大きな球を考えたときに
 J_{in} と J_{sc} だけではフラックスが保存されていない。
(球に入, 出のフラックスが球から出ている。)



$\psi_{in}(r)$ と $\psi_{sc}(r)$ の干渉が key point.

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[(e^{-ik \cdot r} + f^*(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}) \right.$$

$$\times \left(ik e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2} e^{ikr} \mathbf{e}_\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) \right)$$

$$- \text{c.c.}]$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu} [ik + ik |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$+ ik f^*(\theta) \frac{e^{-ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik \mathbf{e}_r f(\theta) \frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r}$$

$$- \text{c.c.}]$$

$$= \frac{\hbar k}{\mu} + \frac{\hbar k}{\mu} \mathbf{e}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2}$$

$$+ \frac{\hbar k}{2\mu} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta) \left[f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \right]$$

干涉項

$r \rightarrow \infty$, $\cos\theta \neq 1$ として漸く振幅

\rightarrow 角度積分をすれば $0 \sim 0$ を除き

$\neq 0$

$$(note) \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + (V-E)\psi = 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi^* + (V-E)\psi^* = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\text{ガウスの定理: } \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r \, \underbrace{dS}_{r^2 d\hat{r}}$$

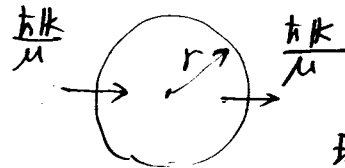
$$\hookrightarrow \boxed{\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} \, r^2 d\hat{r} = 0}$$

(半径 r の球面上
で面積分)

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k}{\mu} + \frac{\hbar k}{\mu} \mathbf{e}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} + (\text{干渉項})$$

$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} \, r^2 d\hat{r}$ を計算する

$$\text{第1項: } N_1 = \int \frac{\hbar}{\mu} \underbrace{k \cdot \mathbf{e}_r}_{k \cos \theta} r^2 d\hat{r} = \frac{\hbar k}{\mu} \cdot r^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta = 0$$



球面に入った a と
同じ量が出ていく

$$\begin{aligned} \text{第2項: } N_2 &= \frac{\hbar k}{\mu} \int d\hat{r} |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{\hbar k}{\mu} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar k}{\mu} \sigma \end{aligned}$$

第3項:

$$N_3 = \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot \frac{1}{r} \int r^2 d\hat{r} (1+\cos\theta) [f^*(0) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(0) e^{ikr(1-\cos\theta)}]$$

" $2\pi r^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta)$

$$= \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot 2\pi r \left\{ -\frac{1}{ikr} f(0) (1+\cos\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \Big|_{\cos\theta=-1}^1 \sim 0 \right. \\ \left. + \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left[\frac{d}{d(\cos\theta)} f(0) (1+\cos\theta) \right] e^{ikr(1-\cos\theta)} \right. \\ \left. + \text{c.c.} \right\} \sim O\left(\frac{1}{r}\right)$$

(もう一度部分積分をみると
1/r が出てくる。)

$$\sim \frac{k\hbar}{2\mu} \cdot 2\pi r \left(-\frac{2}{ikr} f(0) + \frac{2}{ikr} f^*(0) \right)$$

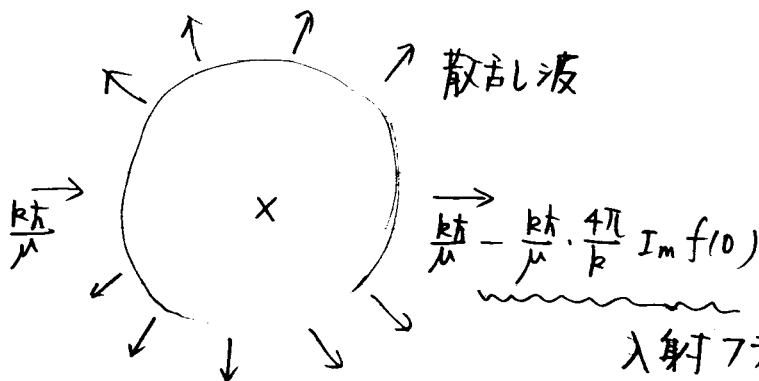
$$= -\frac{2\pi\hbar}{\mu} \cdot \frac{1}{i} (f(0) - f^*(0))$$

$$= -\frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

$$\leadsto 0 = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{k\hbar}{\mu} \sigma - \frac{k\hbar}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

$$\leadsto \boxed{\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)}$$

光学定理



入射フラックスの減少分が
散乱波のフラックスになる。

§. 部分波解析

ポテンシャルがないとき

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi = \underbrace{E}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}} \psi$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta} \quad (\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z)$$

・ 部分波展開

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \underbrace{j_l(kr)}_{\text{球ハルモニック関数}} \underbrace{P_l(\cos\theta)}_{\text{ルジャンドル多項式}}$$

球ハルモニック関数
ルジャンドル多項式

(証明) $e^{ikr\cos\theta} = \sum_l a_l(r) P_l(\cos\theta)$ と展開する。

$$\text{(note)} \quad \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$\downarrow a_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr\cos\theta} P_l(\cos\theta)$$

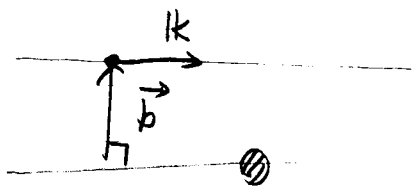
$$\text{(note)} \quad j_l(y) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^1 dx e^{ixy} P_l(x)$$

$$\downarrow a_l(r) = (2l+1) i^l j_l(kr)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

↓ 平面波には全ての部分波 (角運動量) l が混ざっている。

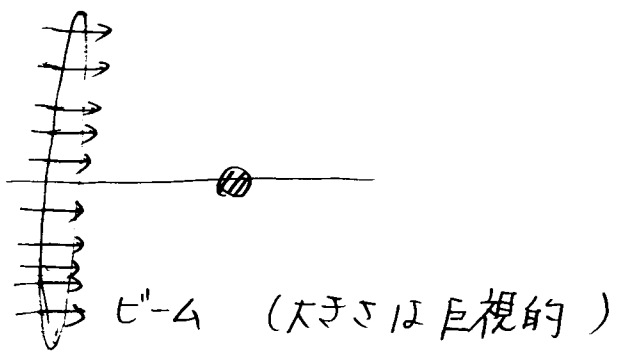
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow l = b k \hbar$$

衝突係数

↓ $\sum_{l=0}^{\infty} \dots \leftrightarrow$ いろいろな衝突係数が合わっている。



高エネルギー: ホール近似がOK
平面波を使って角運動量が陽に現れない議論ができた。

低エネルギー: 各 l ごとに考える必要がある
→ 部分波解析

部分波解析

$$\psi(r) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

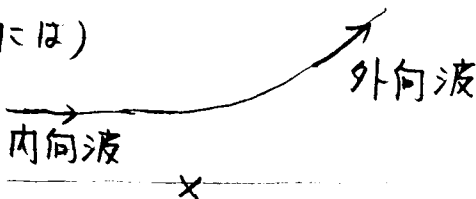
$r \rightarrow \infty$ を考える (検出器のあたりにおける振るまい)

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \quad (kr \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{1}{2ikr} (e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})})$$

$$\psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l [\underbrace{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{内向波}} - \underbrace{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{外向波}}] P_l(\cos\theta)$$

(半古典的には)



(短距離)

ポテンシャルがある場合

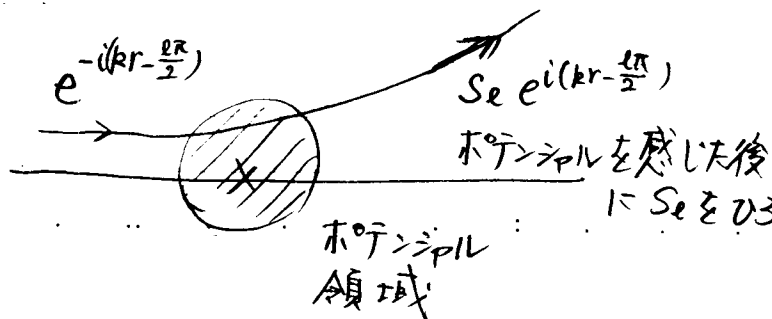
$r \rightarrow \infty$ ならば $V(r) \rightarrow 0$

↓ 波動関数の漸近形は自由粒子の場合と同様 内向波と外向波の線形結合

$$\psi(r) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) i^l [e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}] \times P_l(\cos\theta)$$

「S行列」

ポテンシャルの効果を反映



* 実ポテンシャルならば $|S_l| = 1$ (77.72 a 保存)

$$\begin{aligned}
 \psi(r) &\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_{\lambda} (2\lambda+1) i^{\lambda} \left[e^{-i(kr-\frac{\lambda\pi}{2})} - S_{\lambda} e^{i(kr-\frac{\lambda\pi}{2})} \right] P_{\lambda}(\cos\theta) \\
 &\quad - e^{i(kr-\frac{\lambda\pi}{2})} + e^{i(kr-\frac{\lambda\pi}{2})} \\
 &= e^{ik \cdot r} + \frac{i}{2kr} \sum_{\lambda} (2\lambda+1) i^{\lambda} e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} e^{ikr} (1-S_{\lambda}) P_{\lambda}(\cos\theta) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad i^{\lambda} (-i)^{\lambda} = 1 \\
 &= e^{ik \cdot r} + \underbrace{\left[\sum_{\lambda} (2\lambda+1) \frac{S_{\lambda}-1}{2ik} P_{\lambda}(\cos\theta) \right]}_{\parallel} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad f(\theta)
 \end{aligned}$$

・ 全断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\lambda, \lambda'} (2\lambda+1)(2\lambda'+1) \frac{S_{\lambda}-1}{2ik} \cdot \frac{S_{\lambda'}-1}{-2ik} \int d\Omega P_{\lambda}(\cos\theta) P_{\lambda'}(\cos\theta) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad \frac{4\pi}{2\lambda+1} \delta_{\lambda, \lambda'}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum_{\lambda} (2\lambda+1) |S_{\lambda}-1|^2$$

(note) 光学定理

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \underbrace{(|S_l|^2 - S_l - S_l^* + 1)}_{\substack{|| \\ 1}} \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(S_l))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Im f(0) &= \Im \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \underbrace{P_l(1)}_{\substack{|| \\ 1}} \\ &= -\frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) \operatorname{Re}(S_l - 1) \\ &= \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(S_l))\end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im f(0)$$

◦ 位相のずれ (phase shift)

弾性散乱しか考えないときは $|S_l| = 1$ (フラックスの保存)

→ $S_l = e^{2i\delta_l}$ と書くと:

$$e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

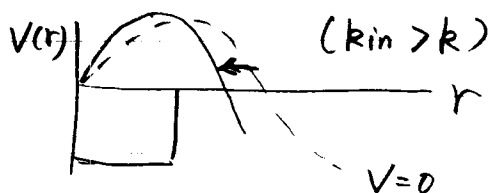
$$= e^{i\delta_l} [e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}]$$

$$= -2i e^{i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)$$

(自由粒子と比較して)

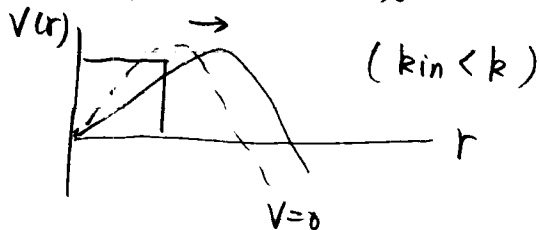
δ_l が位相のずれ

引力ポテンシャルの場合



$$\delta_l > 0$$

斥力ポテンシャルの場合



$$\delta_l < 0$$

(note) $j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

遠心力ポテンシャル $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ による
位相のずれ
(マイナス符号に注目)

(note)

$$\begin{aligned} |S_{e-1}|^2 &= |e^{i\delta_l} (e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l})|^2 \\ &= |2i e^{i\delta_l} \sin \delta_l|^2 \\ &= 4 \sin^2 \delta_l \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_{e-1}|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \end{aligned}$$

$$\left(= \sum_l \sigma_l \quad \epsilon \frac{\pi}{k} < \epsilon \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right)$$