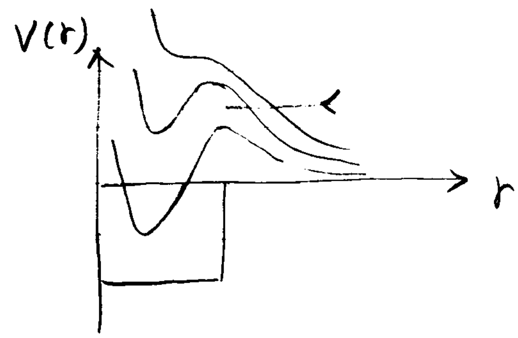
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

§. 低エネルギー散乱と散乱長

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r})$$ と書くと

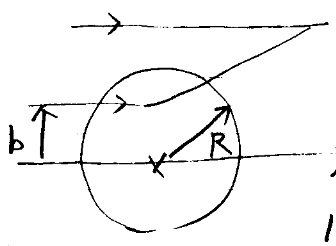
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力ポテンシャル}} - E\right) u_l(r) = 0$$



反応が起きるためにはポテンシャルのレンジまでトンネルしなければならない

↓

大きな l は寄与しない。



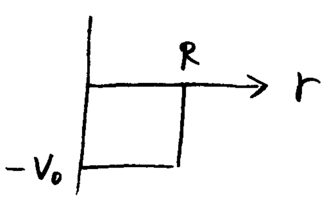
古典的には標的から相互作用レンジRの内側に入る部分波 $(b \leq R)$ のみが寄与 → $l_{max} = kR$

∴ 部分波解析は低エネルギーで特に有効.

$E \sim 0$ では $l=0$ のみが寄与

以下，$E \sim 0$，$l=0$ を考える。

(例) 井戸型ポテンシャル



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

波動関数：
$$u_0(r) = \begin{cases} A\sin \tilde{k} r & (r \leq R) \\ B\sin kr + C\cos kr & (r > R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}},\quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

(note)

$$B\sin kr + C\cos kr = B\left(\sin kr + \frac{C}{B}\cos kr\right)$$

$$\parallel$$

$$B'\sin(kr+\delta) = B'(\sin kr\cos\delta + \cos kr\sin\delta)$$

$$= B'\cos\delta\,(\sin kr + \tan\delta\cos kr)$$

$$\Downarrow\quad \tan\delta = \frac{C}{B}.$$

$r=R$ での波動関数の接続

$$\begin{cases} A\sin\tilde{k}R = B\sin kR + C\cos kR \\ A\tilde{k}\cos\tilde{k}R = Bk\cos kR - Ck\sin kR \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\tilde{k}}\frac{\sin\tilde{k}R}{\cos\tilde{k}R} = \frac{\sin kR + \frac{C}{B}\cos kR}{k\cos kR - \frac{C}{B}k\sin kR}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\delta = \frac{C}{B} = \frac{k\cos kR\sin\tilde{k}R - \tilde{k}\sin kR\cos\tilde{k}R}{\tilde{k}\cos\tilde{k}R\cos kR + k\sin kR\sin\tilde{k}R}$$

$$\sim \frac{\sin\tilde{k}R - \tilde{k}R\cos\tilde{k}R}{\tilde{k}\cos\tilde{k}R}\cdot k \qquad (k\to 0)$$

$$\Downarrow\quad k\cot\delta = \frac{\tilde{k}\cos\tilde{k}R}{\sin\tilde{k}R - \tilde{k}R\cos\tilde{k}R} = \text{const.}$$

$$\equiv -\frac{1}{a} \qquad (a:\text{散乱長})$$

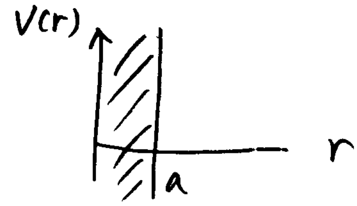
(note) $l \neq 0$ では $\delta_l \propto k^{2l+1}$ となる。

(note) $E \ll |V_0|$ のとき、$k\to -k$ にすると
$\tan\delta \to -\tan\delta$

$$\Downarrow\quad k\cot\delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\underbrace{r_{eff}}_{\text{有効距離}}k^2 + \cdots$$

cf. 剛体球による散乱 (s-wave)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r<a) \\ 0 & (r\geq a) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr+\delta)$$

$$u(r=a) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad ka+\delta = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\frac{k}{\delta}}_{\substack{\wr \\ k\cot\delta}} = -\frac{1}{\underbrace{a}_{\text{散乱長}}}$$

散乱長 $\longleftrightarrow$ 剛体球の半径.

$$k\cot\delta \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\mathrm{eff}} k^2$$

井戸型ポテンシャルに限らず、他のポテンシャルでも同じ振るまいをする。

⤵ 低エネルギー散乱は a, r_{eff} の2つのパラメータのみで記述でき、ポテンシャルの詳細にはよらない。(ポテンシャルの詳細を知るためには高エネルギー散乱が必要。)

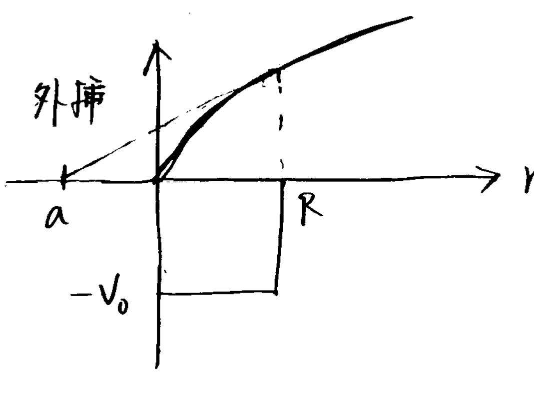
• 散乱長の意味

$r \geq R$ で $\quad u_0(r) \propto \sin(kr+\delta) \sim kr+\delta \quad (k\to 0)$
$\qquad\qquad = k\left(r + \frac{\delta}{k}\right)$

$$-\frac{1}{a} = k\cot\delta \sim \frac{k}{\delta} \quad (k\to 0)$$

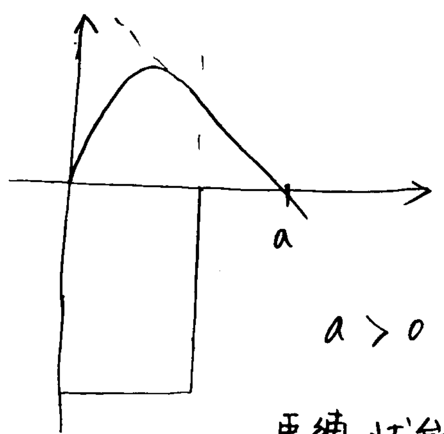
⤵ $u_0(r) \propto (r-a) \quad (k\to 0)$

これは $r=a$ でゼロ。



$a<0$

⇒



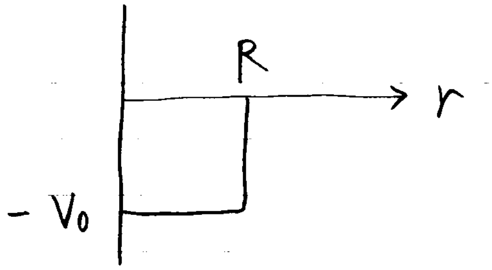
$a>0$

束縛状態があるとき

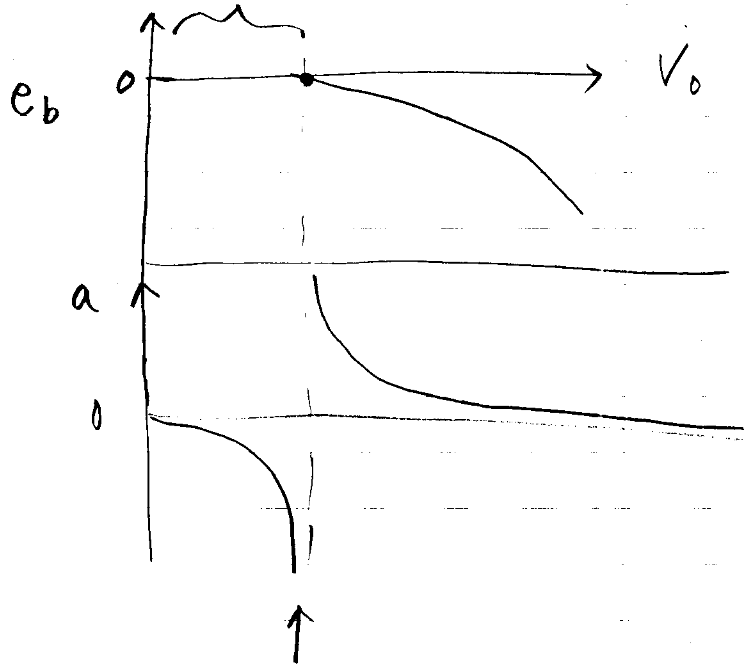
ゼロ・エネルギーで束縛するときは
$a=\infty$ (ユニタリー極限)

∘ユニタリー極限

井戸型ポテンシャル

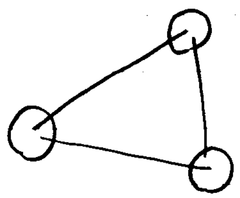


V_0が小さいと束縛状態がない



ユニタリー極限
（長さスケールがなくなる）

エフィモフ状態（ボゾン3体系）



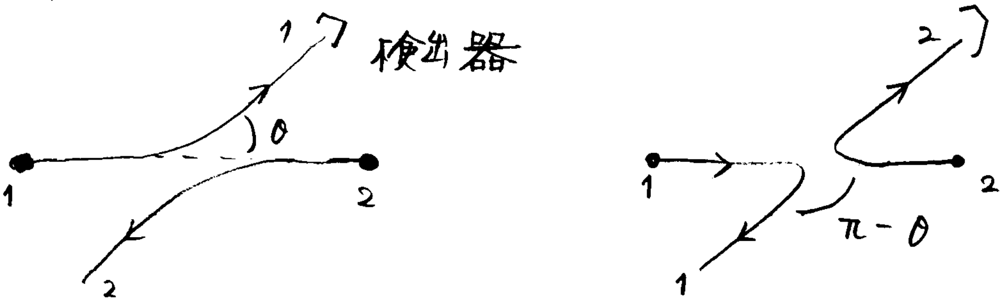
ユニタリー極限で
無限個の束縛状態

$$k\cot\delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\rm eff} k^2 + \cdots$$

井戸型ポテンシャル → ユニタリー極限で $r_{\rm eff} = R$

§. 同種粒子による散乱

同種粒子



検出器はこの2つのプロセスを原理的に区別できない

→ 量子力学では振幅を足してから2乗する
　　　　(こういう場合)

同種粒子：粒子の入れかえに対し波動関数は
対称／反対称

↓

$$\Psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) \pm \Psi(-\mathbf{r})$$

空間部分に対する対称性

$$\to \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) + \underbrace{\left[f(\theta) \pm f(\pi-\theta)\right]}_{\equiv f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \to \infty)$$

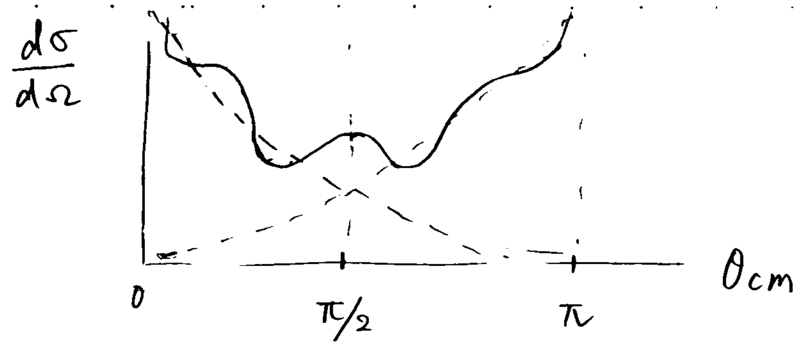
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 \underbrace{\pm 2\,\mathrm{Re}\left[f^*(\theta) f(\pi-\theta)\right]}_{\text{干渉項}}$$

↑

実際に $^{12}C + ^{12}C$ 反応などで観測

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY



・断面積は $\theta_{cm}=\pi/2$ で対称
・干渉項のために振動する

・スピン 0 の粒子（ボゾン）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f_+(\theta)|^2$$

・スピン 1/2 の粒子（フェルミオン）

$$\Psi(1,2)=\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\chi_{spin}$$

	対称	反対称
又は	反対称	対称

$S=0$

$\chi_{spin}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$ ：反対称
→ 空間部分は対称

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega}=|f_+(\theta)|^2$$

$S=1$

$\chi_{spin}=|\uparrow\uparrow\rangle,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle),\ |\downarrow\downarrow\rangle$ ：対称
→ 空間部分は反対称

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega}=|f_-(\theta)|^2$$

スピン偏極のない時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{3}{4}\frac{d\sigma_t}{d\Omega}+\frac{1}{4}\frac{d\sigma_s}{d\Omega}=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2-\mathrm{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$