

(note) 許される相対角運動量

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(|r_1 - r_2|)$$

$$= \frac{P^2}{4m} + \frac{P^2}{m} + V(r)$$

$$R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad r = r_1 - r_2$$

$$P = P_1 + P_2, \quad p = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$

波動関数: $\Psi(r_1, r_2) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \underbrace{\phi(r)}_{\text{Re}(r)} \underbrace{Y_{lm}(\hat{r})}_{\text{Y}_{lm}(\hat{r})}$

2粒子の入れかえ" ($r_1 \leftrightarrow r_2$)

$$R \rightarrow R$$

$$r \rightarrow r_2 - r_1 = -r$$

$\Psi(r_1, r_2) \rightarrow \Psi(r_2, r_1) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \text{Re}(r) \underbrace{Y_{lm}(-\hat{r})}_{\text{Y}_{lm}(\hat{r})} = (-1)^l Y_{lm}(\hat{r})$

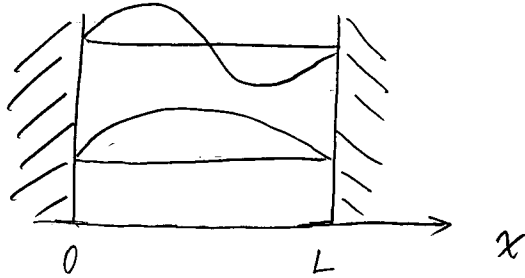
スピン 0 のボソン 2粒子 $\rightarrow l$: 偶数
 $\frac{1}{2}$ フェルミオン

$$S=0 \rightarrow l: \text{偶数}$$

$$S=1 \rightarrow l: \text{奇数}$$

7.4. フェルミ・ガス 模型

相互作用しない多フェルミオン系 (ポテンシャルなし)



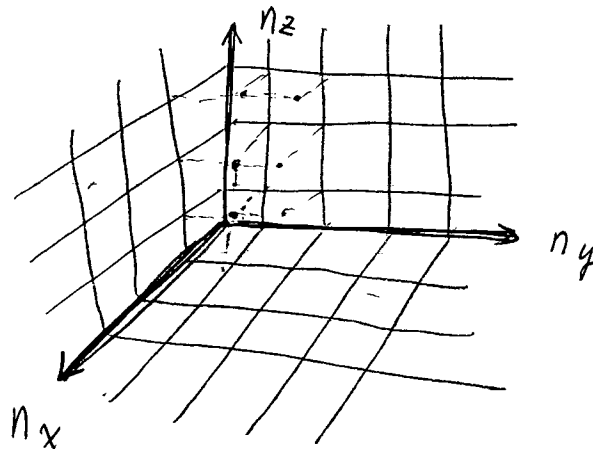
1次元 \rightarrow $U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$, $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

\rightarrow 3次元:

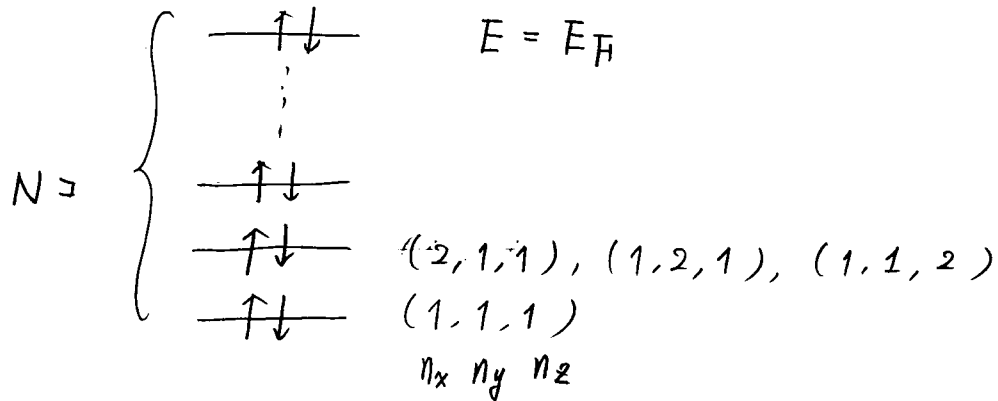
$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \times \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

各エネルギーの (n_x, n_y, n_z) の組で 1 の準位。
スピンの \uparrow と \downarrow の 2 の粒子を入れられる。



粒子を2個ずつのペアとして置く ← パウリ原理

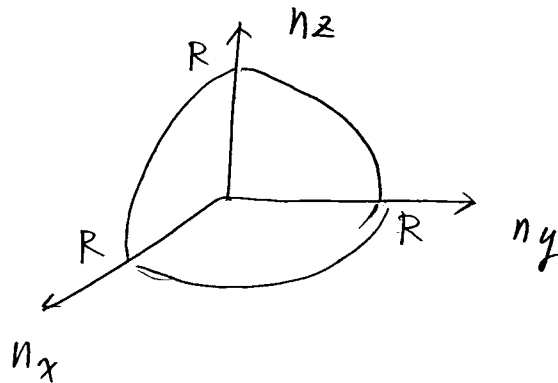


→ $E \leq E_F$ を満たす全ての点に粒子を2つずつ置く。

$E = E_F$ を満たす (n_x, n_y, n_z) は

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = E_F$$

$$\rightarrow n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = R^2 = \frac{2m E_F}{\hbar^2 \pi^2} L^2$$



~ 半径 R の球の内部
にある点,

$$\leadsto N = 2 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $2 \times$ $\frac{1}{8}$ \times $\left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$
 \uparrow \uparrow \uparrow
 $2 \times$ \uparrow, \downarrow $n_x, n_y, n_z > 0$ \leftarrow 半径 R の球の体積

$$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{2m E_F}{\hbar^2 \pi^2} L^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2m E_F}{\hbar^2 \pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \underbrace{V}_{L^3}$$

E_F : フェルミエネルギー

全エネルギー :

$$E_{\text{tot}} = 2 \times \frac{1}{8} \int_{|\vec{n}| \leq R} \underbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_{E_{n_x n_y n_z}} \cdot d^3 n$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \int_0^R 4\pi n^2 dn \cdot n^2$$

↪ \vec{n} に対する
極座標,

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \cdot 4\pi \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10mL^2} R^5$$

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

(note) $N = \frac{\pi}{3} R^3 \quad \Downarrow \quad R = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Downarrow \quad E_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10mL^2} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2 \pi^{\cancel{3}^2}}{10mL^2} \cdot \frac{3N}{\cancel{\pi}} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{5} N \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \cdot \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

・灰用 (白色の星)

小さな恒星 ($M < 1.4 M_{\odot}$)

→ 核融合の燃料がなくなると重力崩壊

→ ある程度縮むと電子の縮退圧と釣り合い安定

$V \downarrow \quad E_{\text{tot}} \uparrow$

半径 r の星の全エネルギー — $E = E_G + E_K$

$$\text{重力エネルギー} : E_G = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{r}$$

$\left. \begin{array}{l} \alpha \cdot N \text{ の陽子} \\ (1-\alpha) \cdot N \text{ の中性子} \\ \alpha \cdot N \text{ の電子} \end{array} \right\} \text{からなる星}$

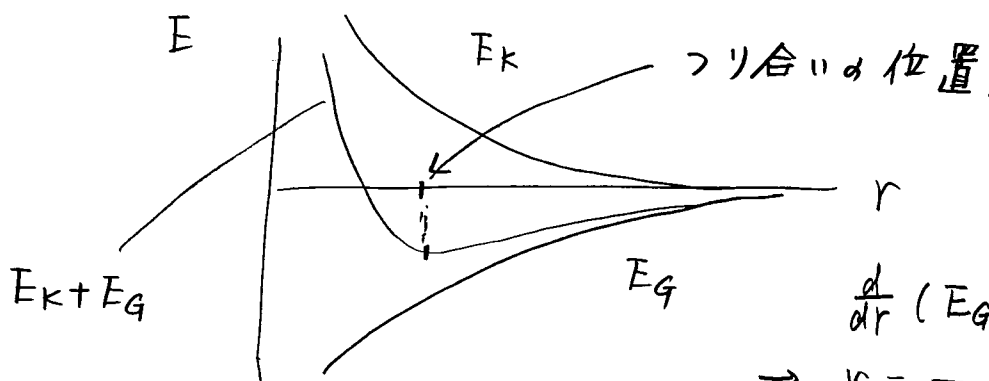
↓

$$E_K = E_e + E_p + E_n \sim E_e$$

$$= \frac{3}{5} \alpha N \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \cdot \frac{\alpha N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{5} \alpha N \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \cdot \frac{\alpha N}{\frac{4}{3}\pi r^3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{\alpha N}{r^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \alpha N \right)^{\frac{2}{3}}$$



$$\frac{d}{dr} (E_G + E_K) = 0$$

$$\rightarrow r = \frac{\alpha}{G \cdot N m_N^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \alpha N \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$M = N m_N$$

$\frac{M_0}{m_N}$

$N = 10^{57}, \quad \chi = \frac{1}{2}$ とLT平衡点を見つると,

$$r = \frac{\chi}{G \cdot N m_N^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \cdot \chi N \right)^{\frac{2}{3}}$$

$M = N m_N$

$$\left(\begin{array}{l} G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ J} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2} \\ m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ 1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J} \end{array} \right.$$

$$= \dots = 3858 \text{ km} \qquad = 5.5 \times 10^{-3} \times 696200 \text{ km}$$

(1/500 1/55"α)

$$\rho = \frac{m_N \cdot 10^{57}}{\frac{4\pi}{3} r^3} = 6.9 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$$

cf. 太陽 : 半径 696200 km
平均密度 1411 kg/m³