Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

- 球面調和関数

以上より ℓ^2 と ℓ_z の同時固有関数は

$$\boxed{Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

球面調和関数

$$\boxed{\begin{aligned} \ell^2\,|Y_{\ell m}\rangle &= \ell(\ell+1)\,|Y_{\ell m}\rangle \\ \ell_z\,|Y_{\ell m}\rangle &= m\,|Y_{\ell m}\rangle \end{aligned}}$$

ℓ：整数（ゼロ又は正）
$-\ell \leq m \leq \ell$

$\ell=0$: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

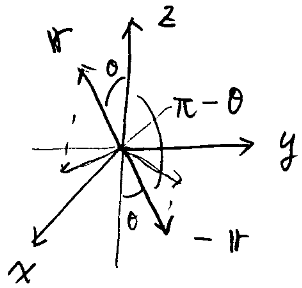
$\ell=1$: $Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$

$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$

$\ell=2$: $Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\cdot\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$

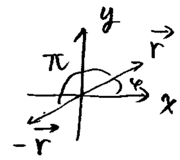
Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan



性質

$$Y_{l-m}(\underbrace{\hat{r}}_{=(\theta,\varphi)}) = (-1)^m Y_{lm}(\hat{r})^*$$

$$\longrightarrow \quad Y_{lm}(-\hat{r}) = Y_{lm}(\pi-\theta, \varphi+\pi) = \underbrace{(-1)^l}_{\text{パリティ}} Y_{lm}(\hat{r})$$



{ 偶数の l は正パリティ
{ 奇数 〃 負 〃

規格化：

(note) $d\mathbf{r} = r^2 dr \boxed{\sin\theta d\theta d\varphi}$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}_{=\int d\hat{r}} \; Y_{lm}^*(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$$

$$\langle Y_{lm} | Y_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'}\delta_{m,m'}$$

加法定理

$$\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{r}_1) Y_{lm}(\hat{r}_2)^* = P_l(\cos\gamma)$$

P_l：ルジャンドル多項式

γ：$\hat{r}_1$ と $\hat{r}_2$ のなす角

(note)

$$r Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) \propto r\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$
$$= r\sin\theta\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$
$$= x \pm i y$$

$$r Y_{10}(\theta,\varphi) \propto r\cos\theta = z$$

$$r^2 Y_{20}(\theta,\varphi) \propto 3r^2\cos^2\theta - r^2 = 3z^2 - r^2$$
$$(= 2z^2 - x^2 - y^2)$$

cf. 3次元調和振動子

$$H = \frac{\mathbb{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{= r^2}$$

基底状態：$(n_x, n_y, n_z) = (0,0,0)$

$$\psi_{000}(\mathbf{r}) \propto e^{-\alpha x^2} e^{-\alpha y^2} e^{-\alpha z^2} = e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$$
$$= e^{-\alpha r^2}$$
$$\left(\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}\right)$$

第一励起状態：$(n_x, n_y, n_z) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) \propto x e^{-\alpha r^2},\quad \psi_{010} \propto y e^{-\alpha r^2},\quad \psi_{001} \propto z e^{-\alpha r^2}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \psi_{100} \pm i\psi_{010} \propto r e^{-\alpha r^2} Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) \\ \psi_{001} \propto r e^{-\alpha r^2} Y_{10}(\theta,\varphi) \end{array}\right\}$$ 第一励起状態は $l=1$ の状態

cf.
$rY_{1\pm1} \propto (x \pm iy)$

2.4 昇降演算子

(猪木・川合の7.4章)

$L_\pm \equiv L_x \pm i L_y$ を定義する（昇降演算子）。

(note) $(L_+)^\dagger = L_-$, $(L_-)^\dagger = L_+$

$$
\begin{aligned}
L_+ L_- &= (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) \\
&= L_x^2 + L_y^2 - i(L_x L_y - L_y L_x) \\
&= L_x^2 + L_y^2 - i \underbrace{[L_x, L_y]}_{= i\hbar L_z} \\
&= L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \mathbb{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$

同様に $\mathbb{L}^2 = L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$

(note) $[L_+, L_z] = [L_x + iL_y, L_z]$
$= -i\hbar L_y + i \cdot i\hbar L_x = -\hbar L_+$

同様に $[L_-, L_z] = \hbar L_-$

(note) $[\mathbb{L}^2, L_\pm] = 0$

$\uparrow$

$[\mathbb{L}^2, L_x] = [\mathbb{L}^2, L_y] = 0$

$[L_\pm, L_z] = \mp \hbar L_\pm$

$$\begin{cases} \mathbb{L}^2 \, |Y_{\ell m}\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |Y_{\ell m}\rangle \\ L_z \, |Y_{\ell m}\rangle = m\hbar \, |Y_{\ell m}\rangle \end{cases}$$

$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle$ という状態を考える。

$$\mathbb{L}^2 L_\pm |Y_{\ell m}\rangle \underset{[\mathbb{L}^2, L_\pm]=0}{\underset{\uparrow}{=}} L_\pm \mathbb{L}^2 |Y_{\ell m}\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 L_\pm |Y_{\ell m}\rangle$$

$\leadsto$ $L_\pm |Y_{\ell m}\rangle$ は $\mathbb{L}^2$ の固有状態で
固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$

$$L_z L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = (L_\pm L_z \pm \hbar L_\pm) |Y_{\ell m}\rangle$$
$$= (m \pm 1)\hbar \, L_\pm |Y_{\ell m}\rangle$$

$\leadsto$ $L_\pm |Y_{\ell m}\rangle$ は L_z の固有状態で
固有値は $(m\pm 1)\hbar$

$\leadsto$

$$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = \alpha_\pm |Y_{\ell \, m\pm 1}\rangle$$

m が ± 1 変わる
（昇降演算子）

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

- $\alpha_\pm$ の決定

$$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = \alpha_\pm |Y_{\ell m\pm1}\rangle$$

$\Downarrow$

$$\langle Y_{\ell m}|\underbrace{(L_\pm)^\dagger L_\pm}_{\substack{\parallel \\ L_\mp L_\pm}}|Y_{\ell m}\rangle = |\alpha_\pm|^2 \langle Y_{\ell m\pm1}|Y_{\ell m\pm1}\rangle = |\alpha_\pm|^2$$

(note) $$L_- L_+ = \mathbb{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$
$$L_+ L_- = \mathbb{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$\Downarrow$

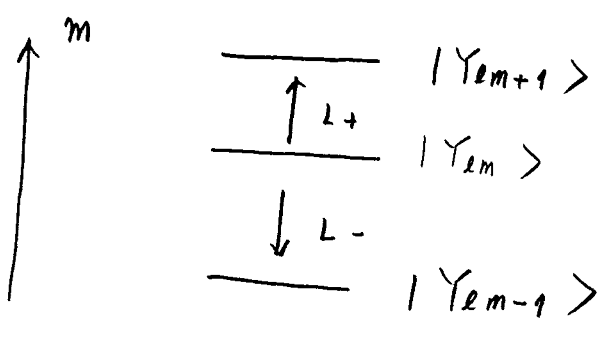
$$左辺 = \ell(\ell+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 \mp m\hbar^2 = \hbar^2[\ell(\ell+1) - m(m\pm1)]$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\alpha_\pm = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}}$$

$\Downarrow$

$$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\ |Y_{\ell m\pm1}\rangle$$

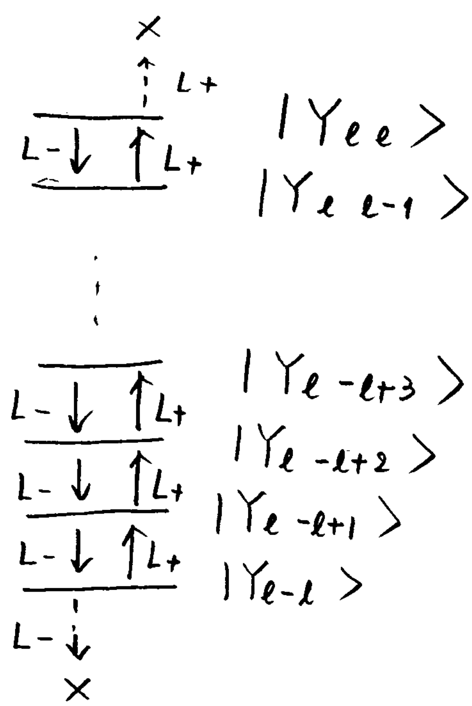


Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

(note)

$$L_+ |Y_{ll}\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - l(l+1)}\, |Y_{l\,l+1}\rangle = 0$$

$$L_- |Y_{l\,-l}\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) + l(-l-1)}\, |Y_{l\,-l-1}\rangle = 0$$



※角運動量の合成のときに重要となる

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

(note) $\hat{\ell}^2$ の固有値が $\ell(\ell+1)$ となること：

$\hat{\ell}^2$ の固有値を λ とする。

$$\hat{L}_+ |Y_{\ell\ell}\rangle = 0 \rightarrow \underbrace{\hat{L}_- \hat{L}_+}_{\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar L_z} |Y_{\ell\ell}\rangle = 0$$

$$= (\lambda - m^2 - m)\hbar^2 |Y_{\ell\ell}\rangle = 0$$

$(m = \ell)$

$\Downarrow$

$$\lambda = \ell^2 + \ell = \ell(\ell+1)$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

(note) m について：

$$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = \underbrace{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}}_{=|\alpha_\pm|^2} |Y_{\ell\, m\pm1}\rangle$$

$\Downarrow$ $\quad \ell(\ell+1) \geq m(m\pm1)$ （$\sqrt{\ }$ の中身）

$\rightarrow$ $\boxed{-\ell \leq m \leq \ell}$

最小の m を m_{min} とする。

$\longrightarrow$ $L_-|Y_{\ell\, m_{min}}\rangle = 0$

$\Downarrow$ $\quad m_{min} = -\ell$

同様に最大の m は $L_+|Y_{\ell\, m_{max}}\rangle = 0$ より
$m_{max} = +\ell$

$L_\pm$ により m の値は 1 ずつ変わる

$\Downarrow$ $\quad m = -\ell,\ -\ell+1,\ \cdots,\ \ell-1,\ \ell$

この条件のみからは ℓ として $\begin{cases}\text{整数}\\ \text{半整数}\end{cases}$ の両方の場合が許される。