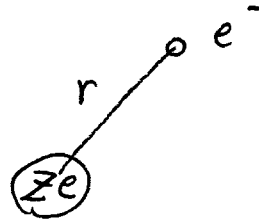


(複習)

水素原子

$$V(r) = -\frac{ze^2}{r}$$

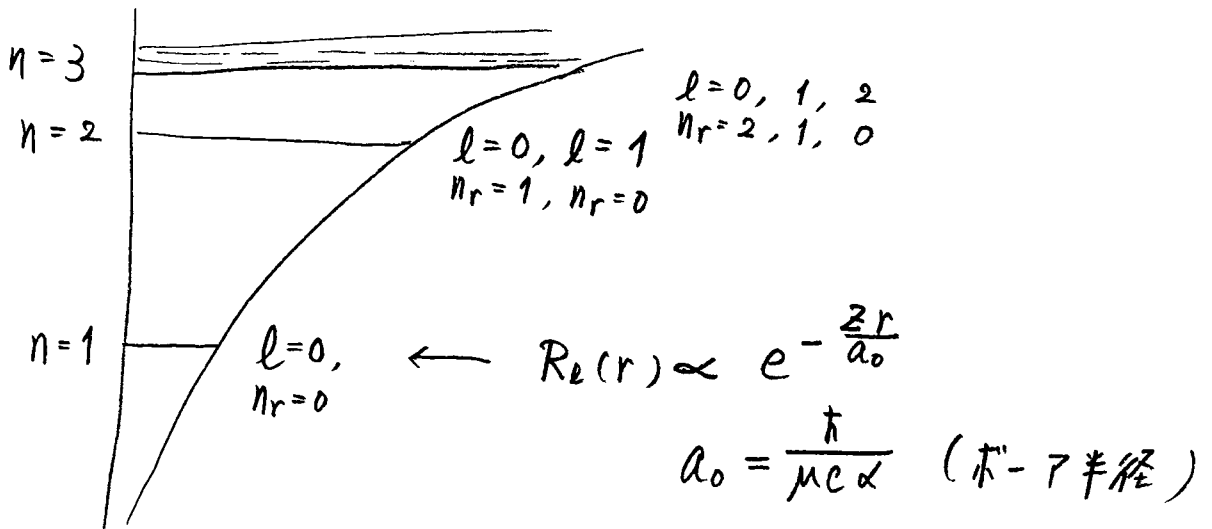


$$\Psi(r) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{r})$$

$$(L_z \Psi(r) = m\hbar \Psi(r))$$

$$n = l + 1 + n_r \quad \text{と } L_T$$

$$E = -\frac{(z\alpha)^2}{2n^2} \mu c^2 \quad \left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}\right)$$



- 各 n に対して $l=0, 1, \dots, n-1$ が縮退
- 無限個の束縛状態

4.3. 磁場中の“木素”原子

(note) 古典的運動方程式 (ローレンツ力)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

U

$$(note) \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

としてもマクスウェル方程式は不変

(ゲージ不変性)

→ $\rho(\mathbf{r})$ が時間に依存しない時

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

となるようなゲージをとると便利

(クロン・ゲージ)

U

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{V} \times (-\nabla \times A))_i &= \epsilon_{kji} v_k (-\nabla \times A)_j && \text{Department of Physics} \\
 &= \underbrace{\epsilon_{ikj} \epsilon_{i'k'j}}_{\delta_{ii'} \delta_{kk'} - \delta_{ik'} \delta_{ji'}} v_k (-\partial_{i'} A_{k'}) && \text{Tohoku University} \\
 &= \delta_{ii'} \delta_{kk'} - \delta_{ik'} \delta_{ji'} && \text{Sendai Japan} \\
 &= v_k (-\partial_i A_k + \partial_k A_i)
 \end{aligned}$$

(note)

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e\phi(\mathbf{r})$$

とすると古典的Hamilton運動方程式が得られる。

<証明> $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right)$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{1}{m} \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \right) \left(\frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)$$

$$\downarrow m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) = \frac{dp_i}{dt} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right)$$

$$= -\frac{e}{c} \frac{1}{m} \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \right) \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$$

$$= e \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}}_{-E_i} \right) + \frac{e}{c} \left(\underbrace{\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}}_{-(\mathcal{V} \times (\nabla \times A))_i} \right) \frac{dx_k}{dt} = -e (E_i + (\mathcal{V} \times \mathbf{B})_i)$$

$$= -e (E_i + (\mathcal{V} \times \mathbf{B})_i)$$

↓

磁場中の水素原子は

$$H = \frac{1}{2\mu} \cdot \left(\mathbb{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \underbrace{\frac{ze^2}{r}}_{\substack{\uparrow \\ -e\phi}}$$

↑ 記述される。

U

$$(note) \frac{1}{2\mu} \left(\mathbb{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbb{P}^2 + \frac{e}{c} \mathbb{P} \cdot \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbb{P} + \underbrace{\frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2}_{\substack{\uparrow \\ e \text{ の } 2 \text{ 次 } (\rightarrow \text{小})}} \right)$$

$$\underbrace{\mathbb{P} \cdot \mathbf{A}}_{\substack{\parallel \\ \frac{\hbar}{i} \nabla}} \psi = \underbrace{(\mathbb{P} \cdot \mathbf{A})}_{\parallel 0} \psi + \mathbf{A} \cdot (\mathbb{P} \psi)$$

(↑-ロ>, ↑"-ジ" ∇·A=0)

↓

U

$$H \sim \frac{\mathbb{P}^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r} + \frac{e}{\mu c} \mathbf{A} \cdot \mathbb{P}$$

• 一様磁場の場合

$$A = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad \text{とと413.}$$

(note) $A = -\frac{1}{2} (y B_z - z B_y, z B_x - x B_z, x B_y - y B_x)$

↓

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= \left(+\frac{1}{2} B_x + \frac{1}{2} B_x, B_y, B_z \right) \\ &= (B_x, B_y, B_z) = \mathbf{B} \end{aligned}$$

↷

$$\frac{e}{\mu c} A \cdot \mathbf{P} = -\frac{e}{2\mu c} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P} = \frac{e}{2\mu c} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}$$

(note) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$
 $= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

↷

$$= \frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

↷

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r} + \frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

\mathbf{B} の向きを z 軸にとると

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r} + \frac{e}{2\mu c} B L_z$$

(note)

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r}$$

の固有関数 $\psi_{n\ell m}(r) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\hat{r})$
は L_z の固有関数

↓

$$H R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\hat{r}) = \left(\underbrace{-\frac{(z\alpha)^2}{2n^2} \mu c^2}_{H_0} + \overset{\text{WL}}{\underset{\text{III}}{\left(\frac{e}{2\mu c} B \cdot m \hbar \right)}} \right) \times R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\hat{r})$$

2S, 2P ———

————— 2P, m=1
————— 2S, m=0; 2P, m=0
————— 2P, m=-1

⇒

1S ———

————— 1S, m=0

ゼー-マン効果

[note] ランダウ準位 (ポテンシャルがない場合の荷電粒子)

$$\mathbb{B} = B e_z \quad \text{は} \quad \mathbb{A} = (0, Bx, 0) \quad \text{として可。}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{A} &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= (0, 0, B) \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\mathbb{P} + \frac{e}{c} \mathbb{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(P_x^2 + (P_y + \frac{e}{c} Bx)^2 + P_z^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + \frac{2e}{c} Bx P_y + \frac{e^2}{c^2} B^2 x^2 \right) \end{aligned}$$

(note) $[H, P_y] = [H, P_z] = 0$

↓ P_y, P_z, H の同時固有状態

○ 簡単のため, P_z の固有値が 0, P_y の固有値が $\hbar k$ の状態を考へる

↓

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \phi(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \cancel{\frac{k^2 \hbar^2}{2m}} + \underbrace{\frac{eB}{mc} \hbar k x + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} x^2}_{\parallel} \right) \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{\hbar k c}{eB} \cdot x \right)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x + \frac{\hbar k c}{eB} \right)^2$$

$$- \cancel{\frac{k^2 \hbar^2}{2m}}$$

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} \left(x + \frac{k\hbar c}{eB} \right)^2 \right) \phi(x) = E \phi(x)$$

||

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (x + x_0)^2$$

$$\omega = \frac{eB}{mc}, \quad x_0 = \frac{k\hbar c}{eB}$$

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ランダム準位.

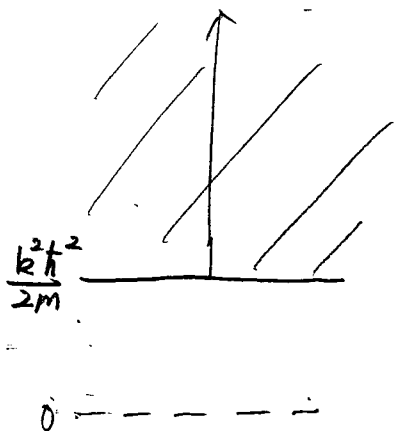
(k は変わらない)

$$\begin{aligned} \text{波動関数: } \psi(x, y) &= e^{iky} \phi_{HO}(x + x_0) \\ &= e^{i \frac{eB}{\hbar c} x_0 y} \phi_{HO}(x + x_0) \end{aligned}$$

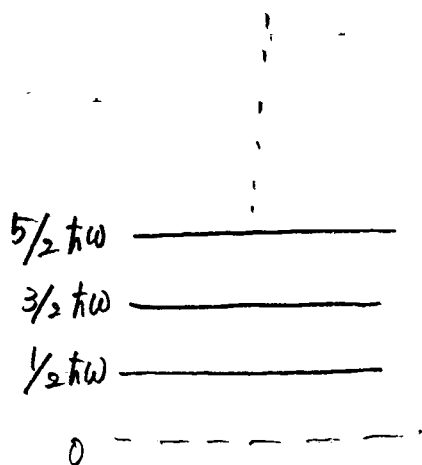
cf. 量子ホール効果

$$k = \frac{eB}{\hbar c} x_0$$

• $B = 0$

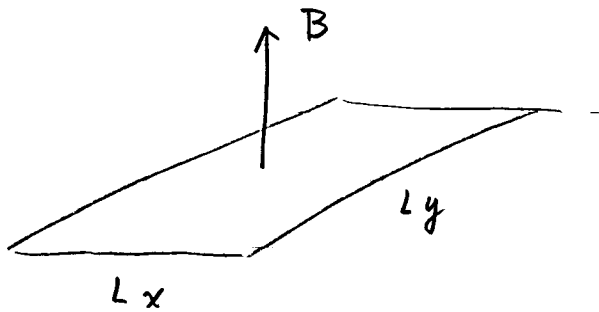


• $B \neq 0$



← k は変化する

- もし電子が長 $L_x \times L_y$ の 2次元 xy 面内に閉じこめられているとすると



$$\psi(x, y) = \psi(x, y + L_y) \quad (\text{周期境界条件})$$

$$\rightarrow e^{iky} = e^{ik(y+L_y)}$$

$$\rightarrow kL_y = 2\pi n_y \quad (n_y = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\rightarrow \frac{eB}{\hbar c} x_0 L_y = 2\pi n_y$$

(note) $0 \leq x_0 \leq L_x$

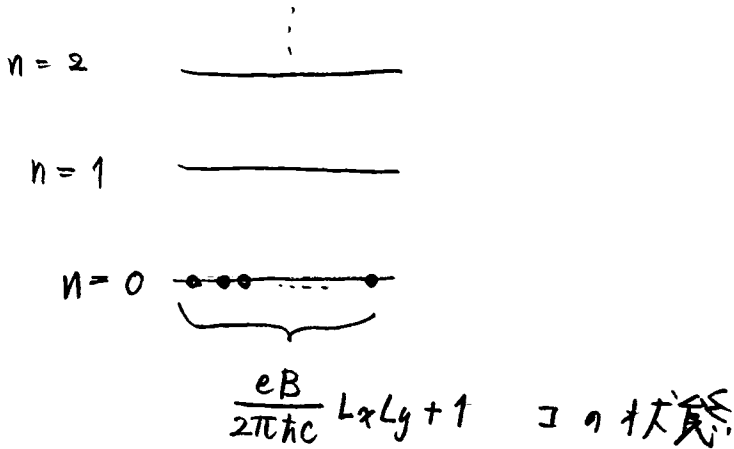
$$\rightarrow 0 \leq n_y \leq \frac{eB}{2\pi\hbar c} \underbrace{(L_x L_y)}_S$$

- 各 n に対し, $n_y = 0, 1, \dots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} S$ 個のレベルが縮退.

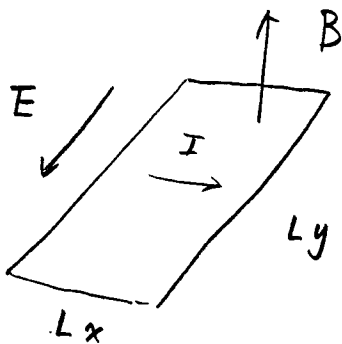
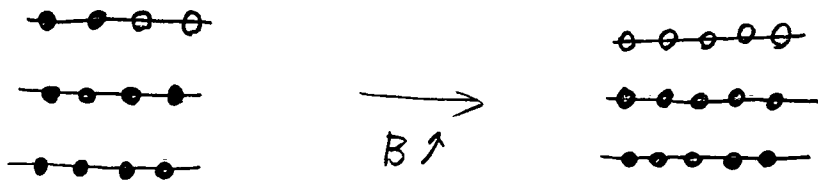
$$\leftrightarrow \text{単位面積当たりの縮退度} : \frac{eB}{2\pi\hbar c}$$

$$\psi(x, y) = e^{iky} \phi_n(x)$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad \left(k = \frac{2\pi}{L_y} n_y ; n_y = 0, 1, \dots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} L_x L_y\right)$$



Bを変化させたときに各準位に入る電子の個数が変わる。



準位が完全に占有

↓
y方向に電場をかけても状態は変化できない

↓
y方向に電流が流れない

$$\begin{cases} I_x = \sigma_{xy} E_y \\ I_y = \sigma_{yy} E_y \end{cases}$$

$$E_y = \rho_{yx} I_x + \rho_{yy} I_y$$

とすると $\sigma_{yy} = 0$.
このとき、縦抵抗率

$$\rho_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2} \text{ は } 0.$$

状態を変えない
↓ 90° エネルギー散逸がない。

ホ-ル抵抗率 $\rho_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2}$ は量子化
(量子ホ-ル効果)