Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

[note] ランダウ準位 （ポテンシャルがない場合の荷電粒子）

$\mathbb{B} = B\,\mathbf{e}_z$ は $A = (0, Bx, 0)$ としても可。

$$\nabla \times A = (\partial_y A_z - \partial_z A_y,\ \partial_z A_x - \partial_x A_z,\ \partial_x A_y - \partial_y A_x) = (0, 0, B)$$

↓

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P} + \frac{e}{c}A\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c}Bx\right)^2 + p_z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{2e}{c}Bx\,p_y + \frac{e^2}{c^2}B^2x^2\right)$$

(note) $[H, p_y] = [H, p_z] = 0$

↓ p_y, p_z, H の同時固有状態

- 簡単のため、p_z の固有値が 0、p_y の固有値が $k\hbar$ の状態を考える

↓

$$\psi(x, y) = e^{iky}\phi(x)$$

↓

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \cancel{\frac{k^2\hbar^2}{2m}} + \frac{eB}{mc}k\hbar\,x + \frac{e^2B^2}{2mc^2}x^2\right)\phi(x) = E\phi(x)$$

$$\frac{eB}{mc}k\hbar\,x + \frac{e^2B^2}{2mc^2}x^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{eB}{c}\right)^2\left(x^2 + 2\cdot\frac{k\hbar c}{eB}\cdot x\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{eB}{c}\right)^2\left(x + \frac{k\hbar c}{eB}\right)^2 \cancel{- \frac{k^2\hbar^2}{2m}}$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\underbrace{\frac{e^2B^2}{2mc^2}\left(x+\frac{k\hbar c}{eB}\right)^2}_{\frac{1}{2}m\omega^2(x+x_0)^2}\right)\phi(x)=E\,\phi(x)$$

$$\omega=\frac{eB}{mc}\ ,\quad x_0=\frac{k\hbar c}{eB}$$

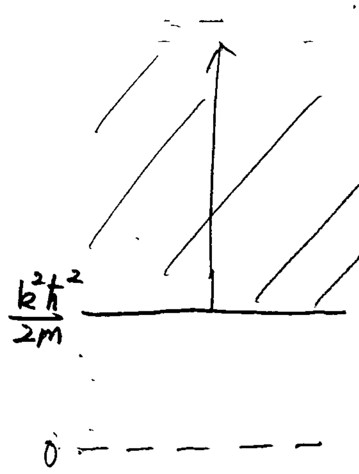
$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad n=0,1,2,\cdots$$

ランダウ準位.
（kには依らない）

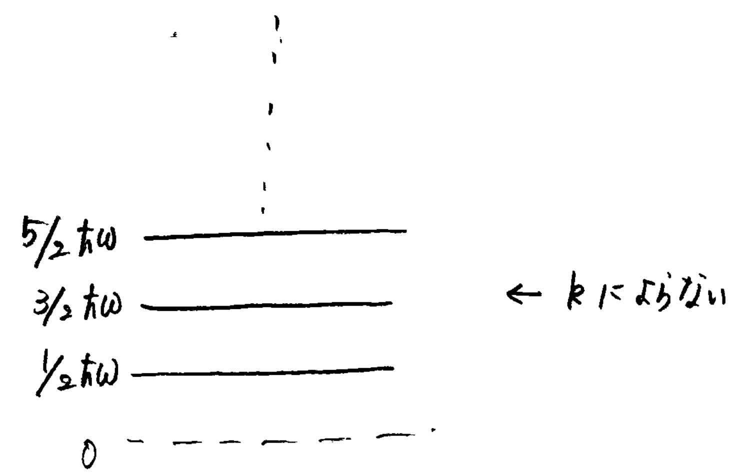
波動関数：$\psi(x,y)=e^{iky}\,\phi_{HO}(x+x_0)$
$=e^{i\frac{eB}{\hbar c}x_0 y}\,\phi_{HO}(x+x_0)$

cf. 量子ホール効果　　$k=\frac{eB}{\hbar c}x_0$

・$B=0$

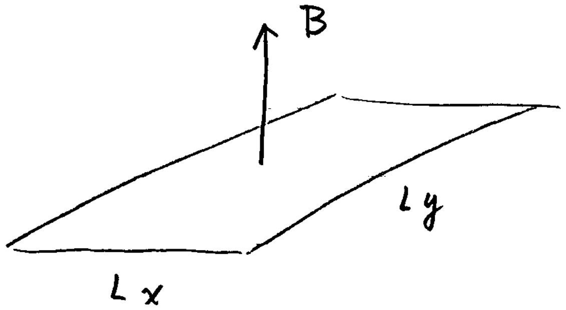


・$B\neq 0$



Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

。もし電子が 長さ $L_x \times L_y$ の 2次元 xy 面内に閉じこめられていると すると



$$\psi(x, y) = \psi(x, y+L_y) \quad \text{（周期境界条件）}$$

$$\rightarrow \quad e^{iky} = e^{ik(y+L_y)}$$

$$\Downarrow \quad kL_y = 2\pi n_y \quad (n_y = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\Downarrow \quad \frac{eB}{\hbar c} x_0 L_y = 2\pi n_y$$

(note) $\quad 0 \leq x_0 \leq L_x$

$$\Downarrow \quad \boxed{0 \leq n_y \leq \frac{eB}{2\pi\hbar c} \underbrace{L_x L_y}_{= S}}$$

$\Downarrow$ 各 n に対し， $n_y = 0, 1, \cdots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} S$ 個 のレベルが縮退．

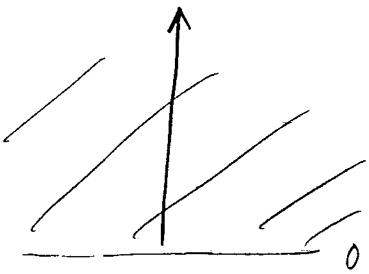
$\longleftrightarrow$ 単位面積当たりの縮退度 ： $\frac{eB}{2\pi\hbar c}$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

- $B = 0$

$$\psi(x, y) = e^{ik_x x} e^{ik_y y}$$

$$E = \frac{1}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2\right)\hbar^2$$



- $B \neq 0$

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y}\, \phi_{HO}(x + x_0)$$

$$x_0 = \frac{\hbar c}{eB} k_y$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

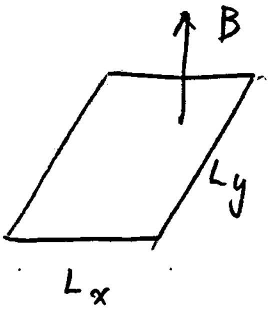
$\vdots$

$5/2\, \hbar\omega \quad (0 \leq k_y \leq \infty)$

$3/2\, \hbar\omega \quad (0 \leq k_y \leq \infty)$

$1/2\, \hbar\omega \quad (0 \leq k_y \leq \infty)$

0



(L_x, L_y) の2次元平面内では

$\vdots$

$3/2\, \hbar\omega \quad \left(k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y \ ;\ n_y = 0, 1, \cdots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} L_x L_y\right)$

$1/2\, \hbar\omega \quad \left(k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y \ ;\ n_y = 0, 1, \cdots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} L_x L_y\right)$

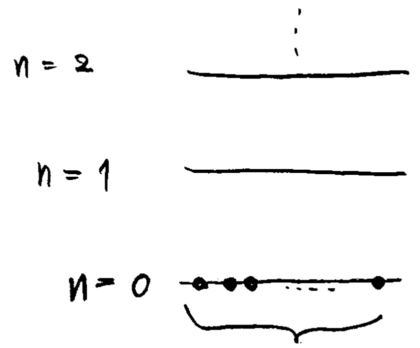
0

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

$$\Psi(x, y) = e^{iky}\,\phi_n(x)$$

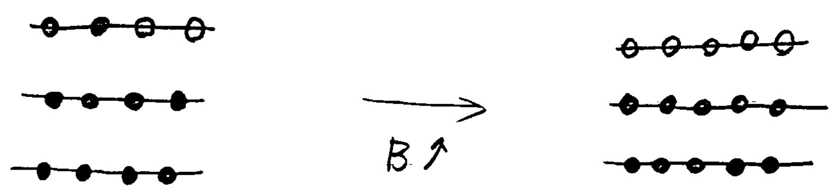
$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

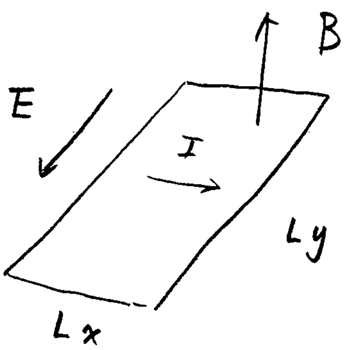
$$\left(k = \frac{2\pi}{L_y} n_y \;;\quad n_y = 0, 1, \cdots, \frac{eB}{2\pi\hbar c} L_x L_y\right)$$



$\frac{eB}{2\pi\hbar c} L_x L_y + 1$ コの状態

Bを変化させたときに各準位に入る電子の個数が変わる。





準位が完全に占有

↓

y方向に電場をかけても状態は変化できない

↓

y方向に電流が流れない

$$\begin{cases} I_x = \sigma_{xy} E_y \\ I_y = \sigma_{yy} E_y \end{cases}$$

とすると $\sigma_{yy} = 0$.

このとき、縦抵抗率

$$E_y = \rho_{yx} I_x + \rho_{yy} I_y \longrightarrow \rho_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2}$$ は 0.

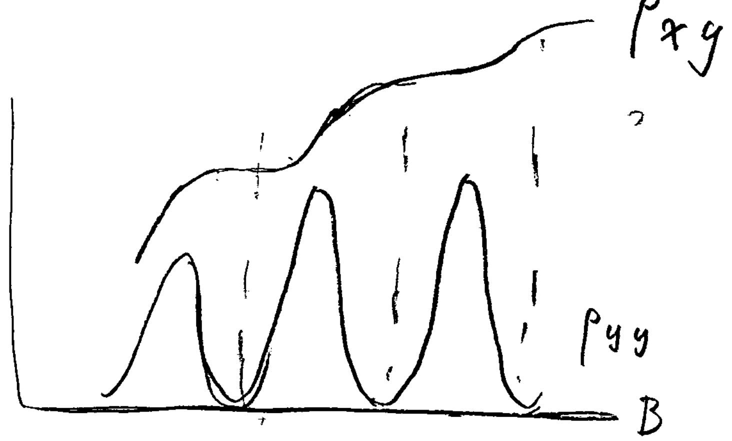
状態を変えないのでエネルギー散逸がない。

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

ホール抵抗率 $\rho_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2}$ は量子化

(量子ホール効果)

$$\sigma_{xy} = -n\frac{e^2}{h}$$



(note) 電子が x 方向に v_x で運動している時
→ y 方向: ローレンツ力と電場からの力の打ち消し合い

$$eE_y = \frac{1}{c}ev_x B \qquad \Downarrow \quad \frac{1}{c}v_x B = E_y$$

n 番目のランダウ準位まで占有されている時
の電子密度 → $n\cdot\dfrac{eB}{2\pi\hbar c}$

$\Downarrow$

x方向の電流: $I_x = -e\cdot\left(n\cdot\dfrac{eB}{2\pi\hbar c}\right)\cdot v_x$

$$= -\boxed{n\cdot\frac{e^2}{2\pi\hbar}}\,E_y$$

$$\parallel$$

σ_{xy} ← 量子化

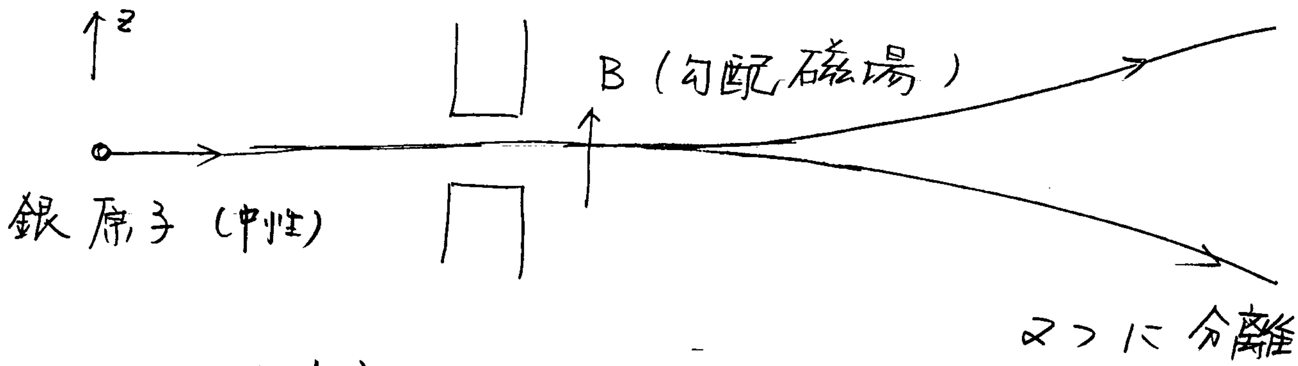
(note) 参考: ガシオロウィッツ §16-4, 16-5

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

5. スピン

5.1. スピンの存在

■ シュテルン－ゲルラッハの実験



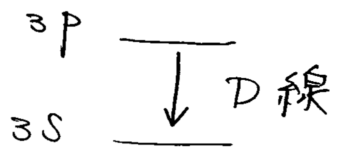
(note)

$$H' = \frac{e}{2\mu c}\,\mathbb{B}\cdot\mathbb{L}$$

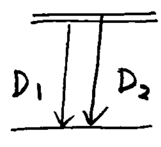
$$\rightarrow \quad \mathbb{F} = -\frac{e}{2\mu c}\,\nabla(\mathbb{B}\cdot\mathbb{L})$$

↔ 角運動量の大きさが $|\mathbb{L}| = \frac{\hbar}{2}$ で
$L_z = \frac{\hbar}{2}$ と $L_z = -\frac{\hbar}{2}$ の成分が反対
向きの力を受けて2つに分離

■ ナトリウム D線の多重構造



よく見ると2本のD線



他のアルカリ金属でも同様の多重構造

→ $\boxed{\text{電子は固有の角運動量 } \hbar/2 \text{ を持つ}}$

スピン角運動量 $\mathbb{S}$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

$l_z = -L, -L+1, \cdots, +L$

$s_z = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+1 \cdots +\frac{1}{2}$

スピン角運動量は大きさが半整数なだけで、
性質は軌道角運動量 $\mathbb{L}$ と同じ：

$$[S_i, S_j] = i\hbar \, \varepsilon_{ijk} S_k$$
$$[S_i, \mathbb{S}^2] = 0$$

5.2. スピン 1/2 の量子論

軌道角運動量オペレーターの固有状態
→ 球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$$
$$\hat{l}_z Y_{lm} = m \, Y_{lm}$$

スピン角運動量 ⟶ 軌道の概念がない
→ 座標の関数として状態を表わせない
→ ブラ・ケット表示が必要

スピンの大きさが $\frac{\hbar}{2}$
↔ z成分は $\frac{\hbar}{2}$ か $-\frac{\hbar}{2}$ の2通り

$$|\uparrow\rangle = |S=\tfrac{\hbar}{2}, S_z=\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$|\downarrow\rangle = |S=\tfrac{\hbar}{2}, S_z=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$

$$\begin{cases} \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1 \\ \langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0 \end{cases}$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

$$\mathbf{S}^2|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2|\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\uparrow\rangle$$
$$S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$\mathbf{S}^2|\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\downarrow\rangle$$
$$S_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

一般のスピン状態は $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の線形結合で表わされる（$|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ は完全系を張る）：

$$|u\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

(note) $\langle\uparrow|u\rangle = a$
$\langle\downarrow|u\rangle = b$

$\downarrow$

$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とベクトルの形で書くこともできる。

(note) $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1,\quad \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$

$\Downarrow\quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

同様に $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

スピノル

$|u\rangle$ で $|\uparrow\rangle$ を見出す確率：$|a|^2$
$|\downarrow\rangle$ 〃 ：$|b|^2$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

スピン角運動量オペレーターも行列の形で表わすことができる

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} \boxed{\langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle} & \boxed{\langle\uparrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle} \\ \langle\downarrow|S_z|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(note) $\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_z|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$
$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$
$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

を満たすように $\hat{S}_x$ と $\hat{S}_y$ を決めると

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(note) $\hat{S}_x^2 = \hat{S}_y^2 = \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\cdot \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \cdot \mathbb{1}$

(note) $\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i\cdot\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hbar\hat{S}_z$

$$L_\pm |Y_{\ell m}\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}\ |Y_{\ell\, m\pm 1}\rangle$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

○ 昇降演算子

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$S_+ = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\cdot\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+ |\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar|\uparrow\rangle$$

$$S_+|\downarrow\rangle = \left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+1\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)\right]^{1/2}\hbar|\uparrow\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}}\,\hbar|\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle$$

ともコンシステント

$$\hat{S}_- |\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_- |\downarrow\rangle = 0$$

○ パウリ行列

$$\mathbb{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = 3$$