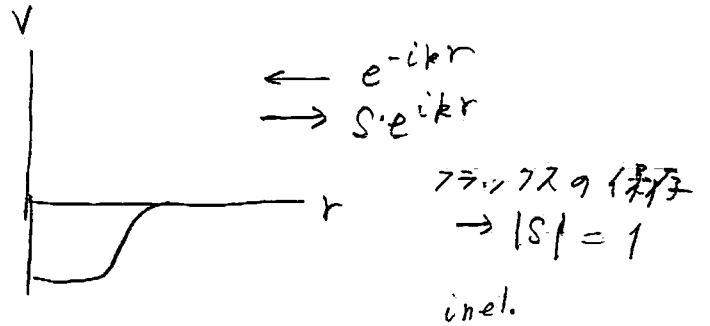


$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V - iW\right) \psi = E \psi$$

・吸収断面積

反応プロセス

- ・弾性散乱
- ・非弾性散乱
- ・粒子移行
- ・複合粒子形成 (核融合)



弾性フラックス減少 (吸収)

$$|S| < 1$$

光学ポテンシャル

$$V_{opt}(r) = V(r) - iW(r)$$

$$(W > 0)$$

(note) $\nabla \cdot \mathbf{j}$ (フラックスの発散)

$$= \frac{\hbar}{2im} (\cancel{\nabla \psi^* \cdot \nabla \psi} + \psi^* \nabla^2 \psi - \cancel{\nabla \psi \cdot \nabla \psi^*} - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \left\{ \psi^* \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right) (E - V + iW) \psi - \psi \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right) (E - V - iW) \psi^* \right\}$$

$$= -\frac{2}{\hbar} |\psi|^2 W = -\frac{2}{\hbar} \rho W$$

フラックスの減少

$$\leftrightarrow |S_e| < 1$$

(note) ガウスの定理

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV$$

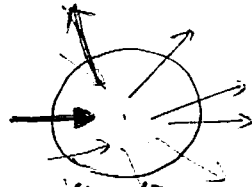
$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

連続の方程式が成り立たない

$$\vec{j} \sim \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \partial_r \psi - \text{c.c.})$$

$$\psi(r) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} \left[\frac{e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{r} - S_{\ell} \frac{e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{r} \right] P_{\ell}(\cos\theta)$$

全内向 フラックス:



$$\begin{aligned} \psi_{in}(r) &= \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} \frac{e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{r} P_{\ell}(\cos\theta) \\ &= \frac{i}{2kr} \sum_{\ell} (2\ell+1) \cdot (-)^{\ell} e^{-ikr} P_{\ell}(\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\dot{j}_{in} = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{1}{r^2} \left| \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell+1) (-)^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \right|^2 e_r$$

$$\downarrow \dot{j}_{in}^{net} = \int r^2 d\Omega \dot{j}_{in} = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \cdot 4\pi$$

全外向 フラックス

$$\psi_{out} = \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} S_{\ell} \frac{e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{r} P_{\ell}(\cos\theta)$$

$$\dot{j}_{out}^{net} = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) |S_{\ell}|^2$$

↓

吸収断面積:

$$\sigma_{abs} = \frac{\dot{j}_{in} - \dot{j}_{out}}{\dot{j}_{inc}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) (1 - |S_{\ell}|^2)$$

(note) if $|S_{\ell}| = 1$, $\sigma_{abs} = 0$.

$$(note) \quad \sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_l|^2$$

↓

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs}$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left\{ \cancel{1 - |S_l|^2} + 1 - (S_l + S_l^*) + \cancel{|S_l|^2} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2} \right)$$

(note)

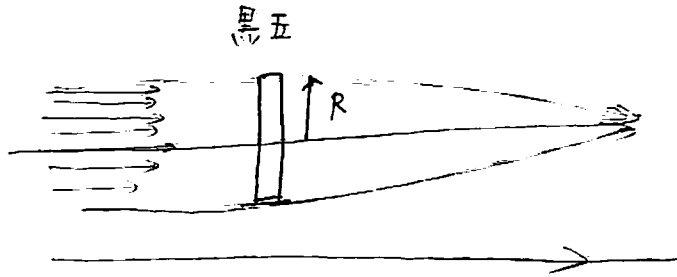
$$\text{Im} f(\theta=0) = \text{Im} \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik}$$

$$= - \sum_l (2l+1) \frac{\text{Re}[S_l] - 1}{2k} = \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) \left(1 - \frac{S_l + S_l^*}{2} \right)$$

$$= \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}$$



。陰散乱



$L = k(b)$
 $r \approx p$ impact parameter

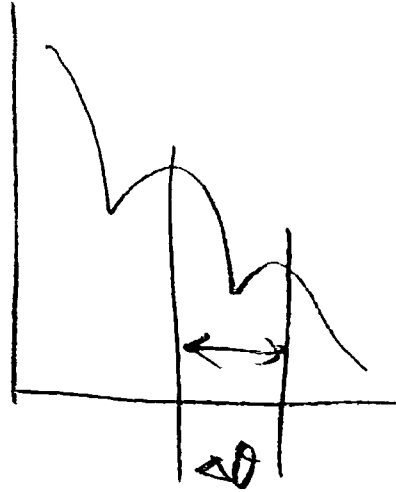
$$S_e = \begin{cases} 0 & l \leq kR \\ 1 & l > kR \end{cases} \quad (\text{全吸収})$$

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) \underbrace{(1-|S_e|^2)}_1 = \frac{\pi}{k^2} \cdot (kR)^2 = \pi R^2$$

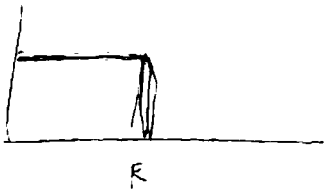
\updownarrow
 geometric region

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) |1-S_e|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) = \pi R^2 \end{aligned}$$

弾性散乱 : ディスクの端での回折
 \leftrightarrow geometric radius = R



$$\frac{1A}{\frac{2}{3}R^2}$$



$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^R r^2 dr p(r) \cdot r^2}{\int_0^R r^2 dr p(r)} = \frac{\frac{1}{5} R^5}{\frac{1}{3} R^3} = \frac{3}{5} R^2$$

$$R \sim \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \underbrace{1.2 \text{ v } A^{1/3}}_{3.023 \text{ \AA}}$$

$$= 3.9 \text{ fm}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 938 \times 10^3}{1972}}$$

$$= 6.96 \text{ fm}^{-1}$$

$$R \sim \frac{\pi}{k} \left\langle \frac{1}{\Delta\theta} \right\rangle = \frac{\pi}{k} \times \frac{180}{8\pi}$$

$$\Delta\theta = 8^\circ$$

$$\frac{\pi}{k} \cdot \frac{180}{8\pi} = 3.23 \text{ fm}$$

$$= \frac{\pi}{k} \times \frac{180}{8\pi}$$

$$= 4.31 \text{ fm}$$

$$\Delta\theta \sim \frac{\pi}{k} \times \frac{180}{100}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

$$= - \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) \cdot \frac{1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

$f(\theta)$: strongly peaked at $\theta = 0$ (焦点現象)

(note) $P_l(1) = 1$ for any l

↓

$P_l(\cos\theta) \approx J_0(l\theta)$ for $\theta \ll 1, l \gg 1$

↓

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2k} \sum_l (2l+1) J_0(l\theta)$$

$$\sim ik \int_0^R b db J_0(kb\theta)$$

$l = kb$

$$\int dl (2l+1)$$

$$\sim 2k^2 \int b db$$

$$= \frac{iR}{\theta} \underbrace{J_1(kR\theta)}$$

(フーリエ変換)

$$\int x J_0(x) dx$$

$$= x J_1(x)$$

$$\Delta\theta \sim \frac{\pi}{kR}$$

cf. 軽イオン反応: $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ @ 168 MeV $E_{\text{lab}}(^{16}\text{O}) =$

$$V_C(r_1, r_2) = \frac{e^2}{|r_1 - r_2|}$$

$$= V(r_2, r_1)$$

4. 多体論入門：同種粒子

多体系のハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$x = (r, \vec{s})$: 座標とスピンを合わせた
 \uparrow 書いた一般化された座標
 スピン

$$H \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = E \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$1 = \int \underbrace{dx_1}_{\parallel} \dots dx_N |\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2$$

$$\int dr_1 \sum_{S_{z1}}$$

4.1. 入れかえ対称性：フェルミオンとボソン

同種粒子：区別できない。

↓

$N=2$ の系 (2粒子系) を考えたと

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)$$

↑ 1と2を入れかえても H は不変。

$$\downarrow H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)}_{\parallel} = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_2, x_1)}_{\parallel\parallel}$$

$$H(1, 2) \qquad H(2, 1)$$

シュレディンガー方程式:

$$H(1,2) \Psi(1,2) = E \Psi(1,2).$$

2つの粒子は区別できないので, どちらを"1"とよんでもよい。

$$\downarrow \begin{array}{l} \underline{H(2,1)} \Psi(2,1) = E \Psi(2,1) \quad (\text{右側の } \Psi \text{ を } \Psi(2,1) \text{ とする}) \\ \parallel \\ H(1,2) \end{array}$$

・ 入れかえ操作 P_{12} :

$$\boxed{P_{12} \Psi(1,2) \equiv \Psi(2,1)}$$

(粒子 1 と 2 を入れかえる)

⇓

$$\begin{aligned} H(1,2) P_{12} \Psi(1,2) &= E P_{12} \Psi(1,2) \\ &= P_{12} E \Psi(1,2) \\ &= P_{12} H(1,2) \Psi(1,2) \end{aligned}$$

$$\downarrow [H, P_{12}] = 0$$

↑

ハミルトニアンは $(1 \leftrightarrow 2)$ で不変。

$$P_{12} \Psi(1, 2) = \Psi(2, 1)$$

↓

$$(P_{12})^2 \Psi(1, 2) = P_{12} \Psi(2, 1) = \Psi(1, 2)$$

↓

$$(P_{12})^2 = 1 \quad \downarrow \quad P_{12} = \pm 1.$$

↓

$$\Psi^{(\pm)}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi(1, 2) \pm \Psi(2, 1)]$$

の2通りが考えられる。

(note). $[H, P_{12}] = 0$ より波動関数は P_{12} の固有関数にもなっている必要がある。

・ P_{12} の固有値は保存量。

<自然法則> P_{12} の固有値は粒子の種類によって決まる。
(例えば、実験のセットアップにより決まるものではない。)

- ・ 半整数スピン $\rightarrow P_{12} = -1$ (フェルミ統計) "フェルミオン"
電子, 陽子, 中性子など
- ・ 整数スピン $\rightarrow P_{12} = 1$ (ボース統計) "ボゾン"
 π 中間子など

パウリ原理 (パウリの排他律):

2個のフェルミオンは同じ状態をとることができない。

$$H = \underbrace{\frac{P_1^2}{2m} + V(x_1)}_{\text{H}_1} + \underbrace{\frac{P_2^2}{2m} + V(x_2)}_{\text{H}_2}$$

とす。

変数分離型 \rightarrow 波動関数は積の形。

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x) \right) \phi_n(x) = \epsilon_n \phi_n(x)$$

を \rightarrow

$$\Psi^{(\pm)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_n(x_1) \phi_{n'}(x_2) - \phi_n(x_2) \phi_{n'}(x_1)]$$

$n = n'$ だと $\Psi^{(\pm)}(x_1, x_2) = 0$ 。(パウリ原理)

◦ N 粒子系 Λ の拡張:

N のフェルミオン (ボソン) から成る系は Λ の 2 粒子の入れかえに対し 反対称 (対称)。

例) $N=3$ の場合:

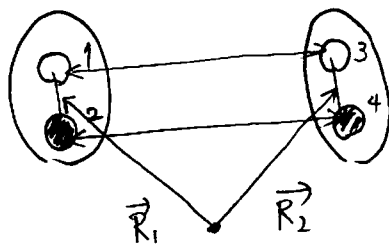
$$\Psi^{(\pm)}(1, 2, 3) = \frac{1}{\sqrt{6}} [\Psi(1, 2, 3) \pm \Psi(2, 1, 3) + \Psi(2, 3, 1) \pm \Psi(3, 2, 1) + \Psi(3, 1, 2) \pm \Psi(1, 3, 2)]$$

◦ 複合粒子の統計性

核子: スピン $= \frac{1}{2}$

α 粒子: 陽子 2 個, 中性子 2 個
 \rightarrow 合成スピン は $0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow$ ボソン
 ↑
 基底状態

重陽子: 陽子 1, 中性子 1
 \rightarrow 合成スピン は $0, 1 \rightarrow$ ボソン



2 重陽子系の波動関数

$$\Psi(R_1, R_2)$$

$$= \Psi(\underbrace{x_1, x_2}_{R_1}, \underbrace{x_3, x_4}_{R_2})$$

2つの重陽子を入れかえ:

$$\Psi(\mathbb{R}_2, \mathbb{R}_1) = \Psi(\overset{\mathbb{R}_2}{\underbrace{x_3, x_4}}, \overset{\mathbb{R}_1}{\underbrace{x_1, x_2}})$$

$$= (-)^2 \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= \Psi(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$$