ボルン近似：　$e^{i\vec{P_i}\cdot\vec{r}/\hbar} \Rightarrow e^{i\vec{P_f}\cdot\vec{r}/\hbar}$

摂動　$V(r)$

Eが大きい時成り立つ.

(note)

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\cos\theta}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, i^{\ell}\, j_{\ell}(kr)\, P_{\ell}(\cos\theta)$$

↓

平面波　$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ には全ての部分波 ℓ が
まざっている

→ エネルギーが低くなると各 ℓ ごとに
考える必要がある。

(部分波解析)

[複習] 動径波動関数 (11章)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$$

$$\Psi_\ell(r) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell m}(\hat{r}) \qquad \text{or} \quad \Psi = R_\ell(r)\, Y_{\ell m}(\hat{r})$$

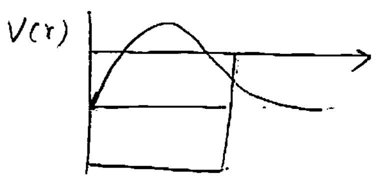
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R + \left(V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right)R = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_\ell(r) = 0.$$

$$u_\ell(r) \sim r^{\ell+1}$$

(i) $E < 0$ 束縛問題



spherical Hankel function

$$u_\ell(r) \propto h_\ell^{(1)}(i\kappa r) \qquad (r \to \infty)$$

$$h_0^{(1)}(i\kappa r) \sim e^{-\kappa r}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

(ii) $E > 0$ 散乱問題 : 連続スペクトル

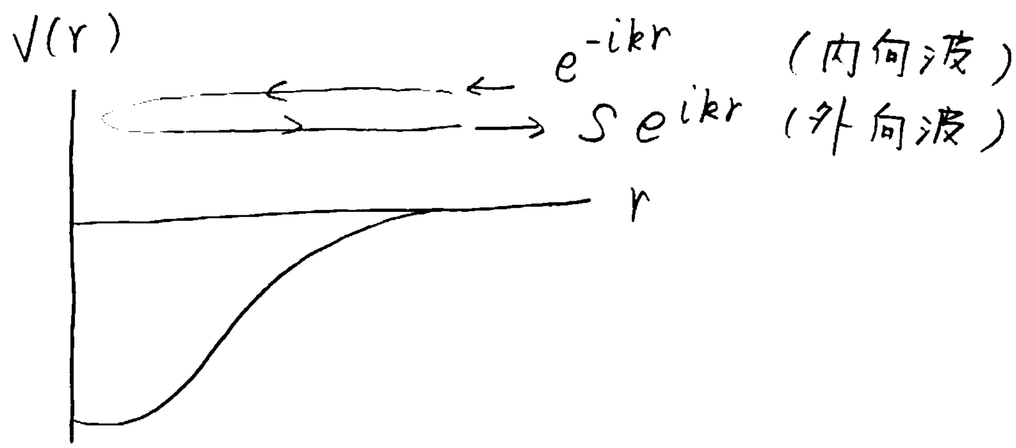
$$u_\ell(r) \to e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - \underbrace{S_\ell}_{e^{2i\delta_\ell}} e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \qquad (r \to \infty)$$

$$= -2i \cdot e^{i\delta} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \underbrace{\delta_\ell}_{\text{位相のずれ}}\right)$$

$$j_\ell(kr) \sim \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right), \qquad \sim \frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!}$$

$$n_\ell(kr) \sim -\frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \qquad \sim -\frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^{\ell+1}}$$

$$\Psi \to A\, j_\ell(kr) + B\, n_\ell(kr)$$


V(r)
e^{-ikr}
(内向波)
S e^{ikr}
(外向波)
r

(note 1) 自由粒子 $(V(r)=0)$

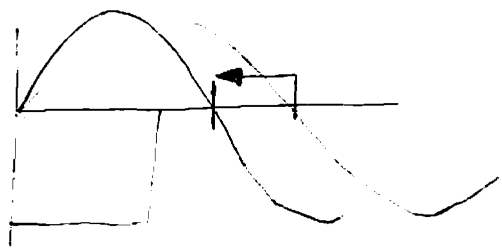
$$u_\ell(r) \propto kr\cdot j_\ell(kr)$$

$$\to \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

$\Updownarrow$ $\quad \delta_\ell = 0 \qquad \Updownarrow \quad S_\ell = 1$

(note 2)

引力ポテンシャル

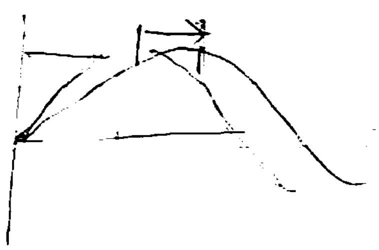


$V=0$

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))} > \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\sin(\tilde{k}r) \qquad \to \boxed{\delta_\ell > 0}$$

斥力ポテンシャル



$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))} < \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\to \boxed{\delta_\ell < 0}$$

$$j_l = \frac{f}{z}$$

$$\frac{f''}{z} \cancel{-2\frac{f'}{z^2}} \cancel{+2\frac{f}{z^3}} + \frac{2}{z}\left(\cancel{\frac{f'}{z}} \cancel{-\frac{f}{z^2}}\right) + \left(1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right)\frac{f}{z}$$

$$=0$$

球ベッセル関数：

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right)\right] j_l(z) = 0$$

(note)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - \overset{\frac{k^2\hbar^2}{2m}}{E}\right) u_l(r) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right) u_l = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{d(kr)^2} - \frac{l(l+1)}{k^2r^2} + 1\right) u_l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u_l = kr \cdot j_l(kr)$$

漸近形

$$j_l(z) \to \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{l\pi}{2}\right) \qquad (z\to\infty)$$

$$j_l(z) \sim z^l \qquad (r\sim 0)$$

球ノイマン関数

$$n_l(z) \to \frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{l\pi}{2}\right) \qquad (z\to\infty)$$

$n_l(z) \sim z^{-l-1} \quad (z\sim 0) \quad \leftarrow$ $z=0$で発散