

5. 半古典論 (WKB 近似)

- 近似解が比較的簡単に求まる (← 解の定性的な反振の舞い)
- 古典画像との対応
 ↔ 解の物理的解釈
 : 直観的理解

5.1. WKB 波動関数

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))}_{k^2(x)} \psi(x) = 0$$

(note) 若し $V(x) = \text{const.}$ → $\psi(x) \propto e^{\pm ikx}$

WKB Ansatz: $\psi(x) = \exp\left(i \int^x \eta(x') dx'\right)$

↓

$$\psi' = i\eta \psi$$

$$\begin{aligned} \psi'' &= i(\eta' \psi + \eta \psi') \\ &= i\eta' \psi - \eta^2 \psi = -k^2 \psi \end{aligned}$$

↓

$$\boxed{\eta^2 = k^2 + i\eta'}$$

若し $V(x)$ が十分に小さい

と近似すれば

$$\begin{aligned} \psi(x+\Delta x) &\sim e^{i\eta(x)\Delta x} \\ &\times \psi(x) \end{aligned}$$

半古典近似: η : μ, κ と変化する関数
 $\leftrightarrow |\eta'| \ll |\eta|^2$

↓

$$\eta_0^2(x) \sim k^2(x) \quad \rightarrow \quad \eta_0(x) = \pm k(x)$$

↓ 補正のみをとり

$$\begin{aligned} \eta^2(x) &\sim \eta_0^2(x) + i\eta_0'(x) \\ &= k^2(x) \pm i k'(x) \\ &= k^2(x) \left(1 \pm i \frac{k'(x)}{k^2(x)} \right) \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \eta(x) &\sim \pm k(x) \left(1 \pm \frac{i}{2} \frac{k'(x)}{k^2(x)} \right) \\ &= \pm k(x) + \frac{i}{2} \frac{k'(x)}{k(x)} \end{aligned}$$

(note) $e^{i \int dx' \frac{i}{2} \frac{k'(x')}{k(x')}} = e^{-\frac{1}{2} \int dx' \frac{k'(x')}{k(x')}} = e^{-\frac{1}{2} \log k(x)} = c \cdot k(x)^{-\frac{1}{2}}$

↓

$$\psi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} e^{i \int k(x') dx'} + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} e^{-i \int k(x') dx'}$$

(note) $\psi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$

$$\psi' = \frac{i}{\hbar} S' \psi$$

$$\psi'' - \frac{i}{\hbar} S'' \psi - \frac{1}{\hbar^2} (S')^2 \psi = -k^2 \psi$$
$$= -\frac{P^2}{\hbar^2} \psi$$

↓

$$i\hbar S'' - (S')^2 = -P^2$$

\hbar -展開 : $S = S_0 + \hbar S_1 + \dots$

↓ $O(\hbar^0)$: $-(S_0')^2 = -P^2$

$$\rightarrow S_0' = \pm P$$

$$S_0(x) = \pm \int^x P(x') dx'$$

$O(\hbar^1)$: $i S_0'' - 2 S_0' S_1' = 0$

$$\rightarrow S_1' = \frac{i}{2} \frac{S_0''}{S_0'} = \frac{i}{2} (\ln S_0')'$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{i}{2} \ln S_0' + \text{const.}$$

$$= \frac{i}{2} \ln P(x) + \text{const.}$$

↓

$$\psi(x) \sim e^{\pm i \int^x \frac{1}{\hbar} P(x') dx'} e^{-\frac{i}{2} \ln P(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{P(x)}} e^{\pm i \int^x k(x') dx'}$$

(note) 古典的に許されない領域 ($E < V(x)$)

$$k(x) = i\gamma(x) \quad \text{or} \quad \gamma(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)$$

$$\downarrow \quad \psi(x) = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{\gamma(x)}} e^{-\int^x \gamma(x') dx'} + \frac{\tilde{C}_2}{\sqrt{\gamma(x)}} e^{+\int^x \gamma(x') dx'}$$

○ WKB近似の妥当性

$$|\eta'| \ll |\eta|^2 \quad \downarrow \quad |k'(x)| \ll |k(x)|^2$$

$$\downarrow \quad \left| \frac{d\eta(x)}{dx} \right| \ll 1 \quad \left(\eta(x) = \frac{1}{k(x)} \right)$$

↓ 波長の変化量が非常にゆるやか

↓ - 波長内でポテンシャルの変化が非常にゆるやか

← 高エネルギー - 又は m が大きい場合

(note) $k'(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{V'(x)}{2k(x)} = \frac{m}{\hbar^2} \eta(x) V'(x)$

$$\downarrow \quad \left| \frac{V'(x)}{\eta(x)} \right| \ll \frac{k^2(x) \hbar^2}{m} = \frac{P(x)^2}{m}$$

↓ - 波長内のポテンシャルの変化が

局所運動エネルギーに比べて充分小さい。

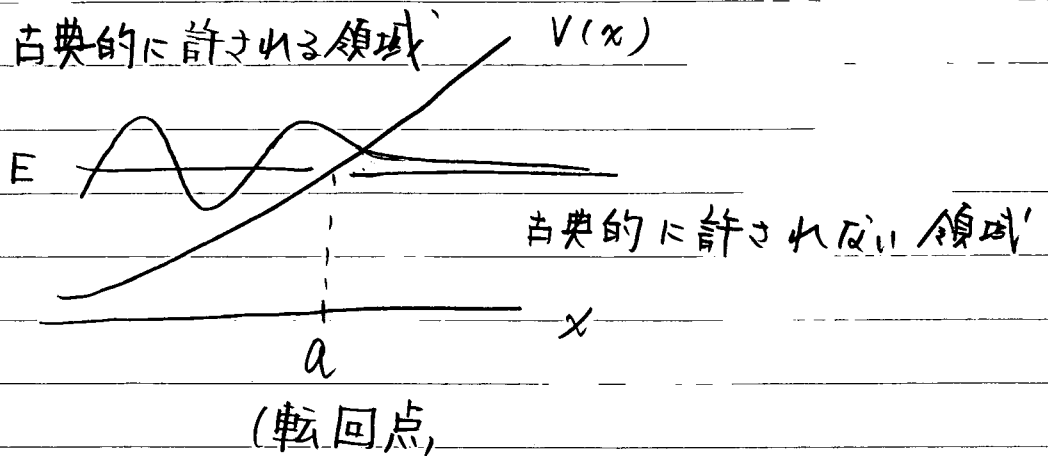
5.2. WKB 接続公式

WKB 近似: 古典的 転回点, $(E = V(x))$ のまわり
では成り立たない。 cf. $\frac{1}{\sqrt{k(x)}} = \text{発散}$

→ WKB 近似は実際に役に立たないか?

↓
WKB 接続公式

(転回点のまわりをうまく避ける)



$$x \gg a : \psi(x) \sim c \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} e^{-\int_a^x \kappa(x') dx'}$$

$$x \ll a : \psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \left\{ c_1 e^{i \int_a^x k(x') dx'} + c_2 e^{-i \int_a^x k(x') dx'} \right\}$$

$c \leftrightarrow c_1, c_2$ の関係式

↑

WKB 接続公式

考え方 : $x=a$ の周りで $V(x)$ を展開

$$\begin{aligned} V(x) &= V(a) - F_0(x-a) \\ &= E - F_0(x-a) \end{aligned}$$

$$F_0 = -V'(a)$$

↓
シュレディンガー方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} F_0(x-a) \psi(x) = 0$$

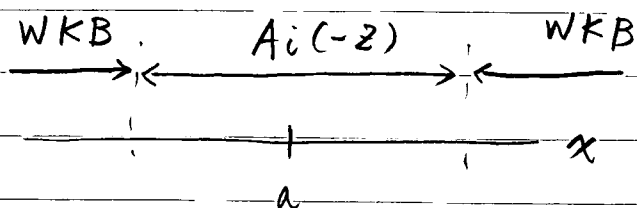
(note) $z = \left(\frac{2m}{\hbar^2} F_0\right)^{\frac{1}{3}} (x-a)$

↓
 $\frac{d^2}{dz^2} \psi + z \psi = 0$

解 : エブリ関数 $\psi(z) = Ai(-z)$

↓

$Ai(-z)$ (の漸近形) と WKB 解を比較



↓

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} \gamma(x)^{-1/2} e^{-\int_a^x \gamma(x') dx'} & (x > a) \\ C k(x)^{-1/2} \cos\left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4}\right) & (x < a) \end{cases}$$

一般に

$$\textcircled{\frac{C}{2}} \gamma(x)^{-1/2} e^{-|\int_a^x \gamma(x') dx'|} \quad (E < V(x))$$

$$\leftrightarrow C k(x)^{-1/2} \cos\left(|\int_a^x k(x') dx'| - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(E > V(x))$$

$$\textcircled{D} \gamma(x)^{-1/2} e^{+|\int_a^x \gamma(x') dx'|} \quad (E < V(x))$$

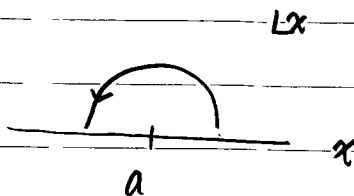
$$\leftrightarrow -D k(x)^{-1/2} \sin\left(|\int_a^x k(x') dx'| - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(E > V(x))$$

※ 他にも解析接続の方法も
(ランダウ-リフシッツを見よ)

(note) for $V(x) = E - F_0(x-a)$

$$\frac{1}{\sqrt{k(x)}} \propto (x-a)^{1/4}$$



$$x-a = \rho e^{i\varphi}$$

$\varphi: 0 \rightarrow \pi$

$$(x-a)^{1/4} \rightarrow (a-x)^{1/4} e^{i\pi/4}$$