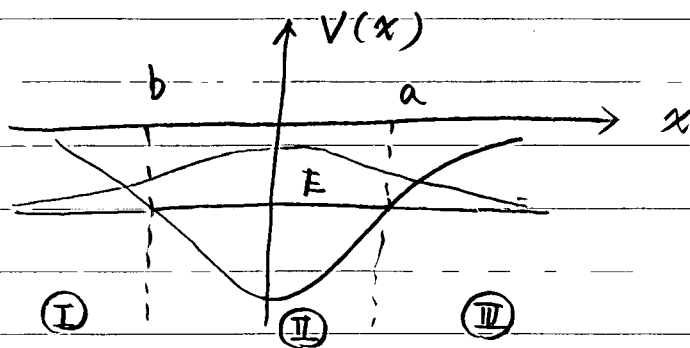


5.3. ホール-ア・ゾンマ-フェルトの量子化条件



領域 I ($x < b$) の波動関数

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} e^{-\int_x^b \chi(x') dx'} \quad (x < b)$$

この波動関数を接続公式を用いて領域 II ($b < x < a$)
更に領域 III ($x > a$) に接続

領域 I \rightarrow II :

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\underbrace{\int_b^x k(x') dx'}_{\int_b^a dx' - \int_x^a dx'} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (b < x < a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_b^a dx' k(x') \right) \cos \left(\int_x^a dx' k(x') + \frac{\pi}{4} \right) \\ + \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \sin \left(\int_b^a dx' k(x') \right) \sin \left(\int_x^a dx' k(x') + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_b^a dx' k(x')\right) \sin\left(\int_x^a dx' k(x') - \frac{\pi}{4}\right) \\ + \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_b^a dx' k(x')\right) \cos\left(\int_x^a dx' k(x') - \frac{\pi}{4}\right)$$

領域 II \rightarrow III

$$\psi(x) = +\frac{2}{\sqrt{\gamma(x)}} \cos\left(\int_b^a dx' k(x')\right) e^{+\int_a^x \gamma(x') dx'} \\ + \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} \sin\left(\int_b^a dx' k(x')\right) e^{-\int_a^x \gamma(x') dx'} \\ (x > a)$$

\rightarrow

領域 III での解が exponential 的に小さくなる
ためには

$$\cos\left(\int_b^a dx' k(x')\right) = 0 \quad \text{が必要}$$

\rightarrow

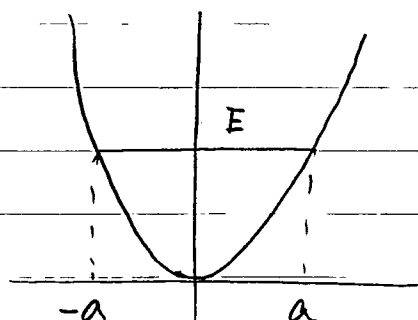
$$\int_b^a dx' k(x') = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0, 1, \dots)$$

\rightarrow

$$\int P(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\pi}{h}\right)$$



(note) 調和振動子: $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$



$$a = + \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$\int_{-a}^a k(x) dx = \int_{-a}^a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2)} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \quad y = \frac{x}{a}$$

$$= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} \cdot a dy$$

$$= \frac{2E}{\hbar\omega} \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy}_{\parallel \leftarrow y = \cos\theta}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

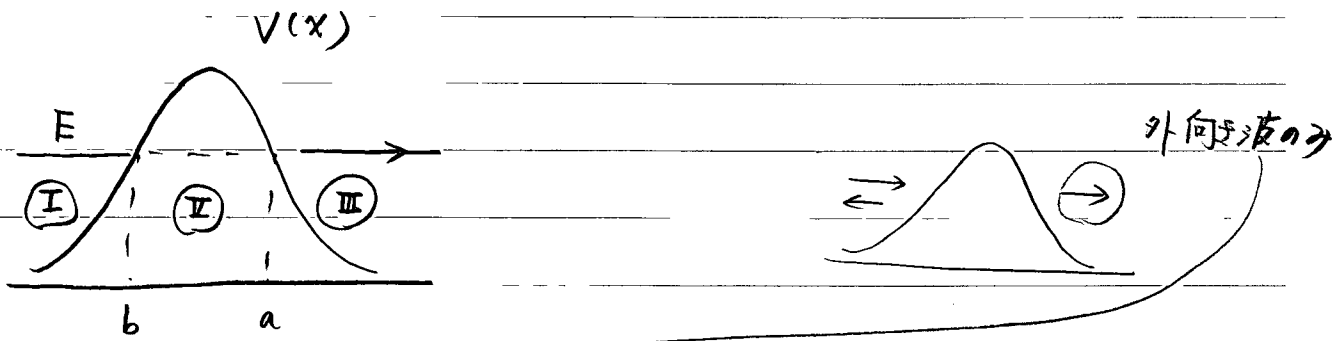
↓

$$E = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

調和振動子に対する WKB 近似は exact

cf. 経路積分

5.4. トンネリング



領域 II : $\psi(x) = \frac{i \cdot C}{\sqrt{k(x)}} e^{i \left(\int_a^x k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right)}$

$$= \frac{i \cdot C}{\sqrt{k(x)}} \left\{ \cos \left(\int_a^x k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\int_a^x k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

領域 II \rightarrow $\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{\gamma(x)}} e^{\int_x^a \gamma(x') dx'} + \frac{iC}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} e^{-\int_x^a \gamma(x') dx'}$

$$\sim \frac{C}{\sqrt{\gamma(x)}} e^{\int_b^a \gamma(x') dx' - \int_b^x \gamma(x') dx'}$$

領域 I \rightarrow $\psi(x) = \frac{2C}{\sqrt{k(x)}} e^{\int_b^a \gamma(x') dx'} \cos \left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right)$

$$= \frac{C}{\sqrt{k(x)}} e^{\int_b^a \gamma(x') dx'}$$

$$\times \left\{ e^{i \int_x^a k(x') dx' - \frac{i\pi}{4}} + e^{-i \int_x^a k(x') dx' + \frac{i\pi}{4}} \right\}$$

$$+ e^{-i \int_x^a k(x') dx' + \frac{i\pi}{4}}$$

Sendai, Japan.

トンネル確率: 入射フラックスと透過フラックスの比

$$P = e^{-2 \int_b^a \gamma(x) dx} = e^{-2 \int_b^a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} dx}$$

↓ m が大きいと P は小

(note) a と b が近いと接続公式が破綻

→ 一様近似

$$P = \frac{1}{1 + e^{2 \int_b^a \gamma(x) dx}}$$

(note) $E > V_b$ のとき一様近似は成立

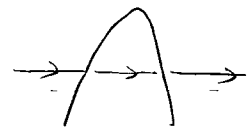
→ a, b は複素数

$$E = V_0 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{m \omega^2} (V_0 - E)}$$

(note) $V(x) = V_0 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ のとき

$$P = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2\pi}{\hbar \omega} (E - V_b)}}$$



↔ P_{WKB} と一致

5.5. 経路積分と半古典近似

経路積分

座標 $x_i \xrightarrow{\text{時間 } T} x_f$ への遷移

$$K(x_f, x_i; T) = \langle x_f | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | x_i \rangle$$

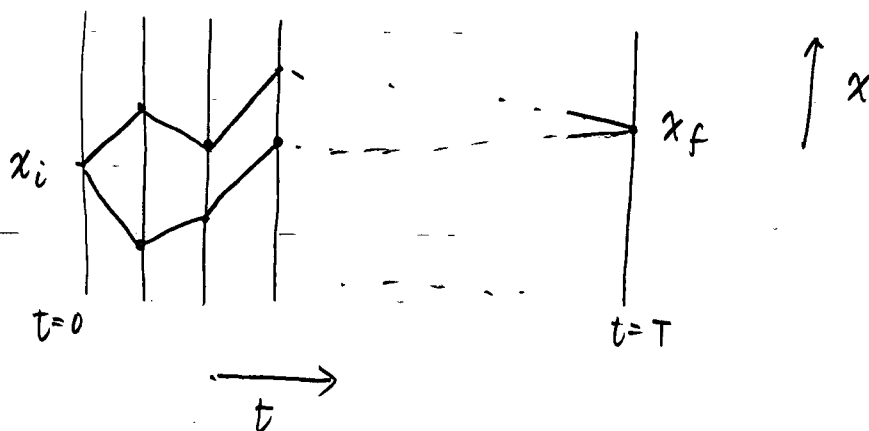
時間 インターバル $(0, T)$ を N 等分

$$\downarrow e^{-i\hat{H}T/\hbar} = \underbrace{e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \dots e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar}}_{N \text{ 回 } (\Delta t = \frac{T}{N})}$$

$$= \left(\int dx_N |x_N\rangle \langle x_N| \right) e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \left(\int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}| \right) \\ \times e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \dots \left(\int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1| \right) e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \\ \times \underbrace{\left(\int dx_0 |x_0\rangle \langle x_0| \right)}$$

" (完全性) "

" x_i と x_f を結ぶ"
あらゆる経路を足し
合わせる



↷

$$K(x_f, x_i; T) = \langle x_f | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | x_i \rangle$$

$$= \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar \cdot i\Delta t}} \prod_{i=1}^{N-1} \int \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}} dx_i \right)$$

$$\times e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right)}$$

$$\equiv \int_{\substack{x(0)=x_i \\ x(T)=x_f}} d\ell[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S(x, T)} \quad (\text{経路積分})$$

$$S(x, T) = \int_0^T dt L(x, \dot{x})$$

$$= \int_0^T dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right)$$

半古典近似

$\hbar \rightarrow 0$ では $e^{iS/\hbar}$ は激しく振動

→ 積分をよると正負が打ち消し合ってゼロ。

→ 但し、停留点 ($\frac{\delta S}{\delta x} = 0$) 近似では打ち消しがおこらない。

(note) 停留点, $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$ は古典軌道
(最小作用の原理)

半古典近似: $x(t) = x_{cl}(t) + \delta x(t)$ とおいて
 δx の2次まで考慮する
(停留位相近似)

↓

$$V(x) \sim V(x_{cl}) + \frac{(\delta x)^2}{2} V''(x_{cl}) + \dots$$

(∴ 半古典近似は2次関数
ポテンシャルに対しては exact)

↓

$$K(x_i, x_f; T) \sim (\text{係数}) \times e^{iS_{cl}/\hbar}$$