# 3. 散乱理論

## 3.0. 散乱の基本概念

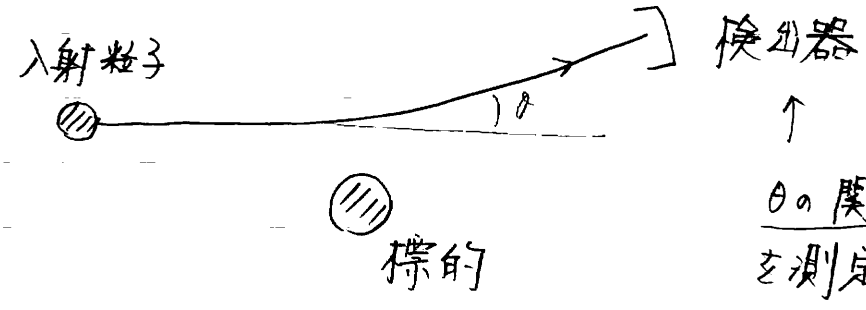
$$\underbrace{\text{刺激} \xrightarrow{\text{input}} \text{対象} \xrightarrow{\text{output}} \text{応答}}_{\text{散乱理論}}$$

マクロな物体（古典的）

input：（太陽からくる）光
output：反射光
光の波長：色
光の方向：形

ミクロな物体（量子系）

input：加速器で加速された入射粒子
output：出てくる粒子

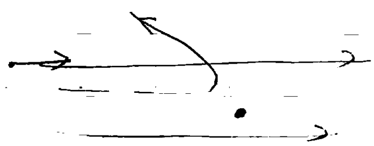



θの関数として粒子強度を測定

散乱断面積

→ 原子や原子核の形や相互作用

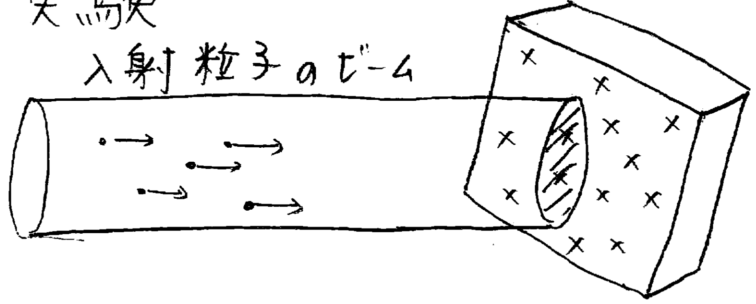
α粒子



ラザフォードα散乱

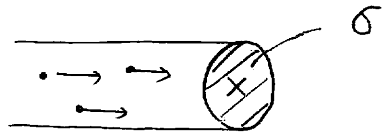
## 3.1. 散乱断面積

散乱実験




散乱断面積 = 入射粒子が見る標的粒子の実効的（effective）な大きさ

標的粒子が 1つだけある場合




標的粒子のまわりの 断面積 σ を通過する粒子のみが反応をおこす

↓

反応の起きる数 = 断面積 σ を通過する入射粒子の数
= σ × 単位面積を通過する粒子の数

単位時間当りでは

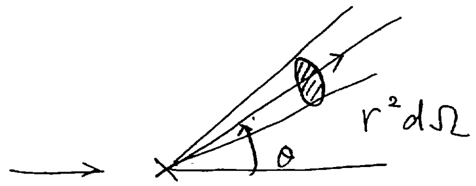
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \sigma \times j$$

反応の数

フラックス

単位時間当たり単位面積を通過する粒子の数.

・微分散乱 断面積




$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 d\Omega \text{ を通過するフラックス}}{\text{入射フラックス}}$$

全断面積 $\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$

(複習) フラックス $\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \quad \text{(連続の方程式)}$$

$$\rho = |\psi|^2, \quad \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

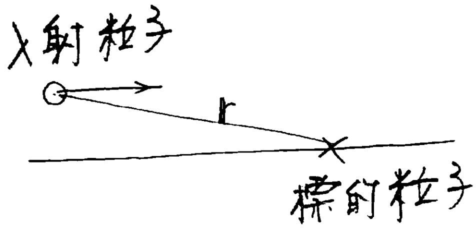
$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の場合

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\cdot i\boldsymbol{k}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(-i\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)$$

$$= \frac{\boldsymbol{k}\hbar}{m}$$

## 3.2. ボルン近似

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi = 0$$




$E \gg |V(r)|$ （高エネルギー散乱）

$\longrightarrow$ $|V(r)|$ を小さいとして摂動として取り扱う

$V(r)=0$ とした時の解 $\longrightarrow$ $\psi(r) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$

$\downarrow$

$$\psi_i(r) = e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{r}_i/\hbar} \xrightarrow[\text{遷移}]{V(r)} e^{i\vec{p}_f\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$\left(\frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} = E\right)$$

フェルミの黄金則

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{d^3p_f}{(2\pi\hbar)^3}\,|\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle|^2 \times \delta(E_f - E_i)$$

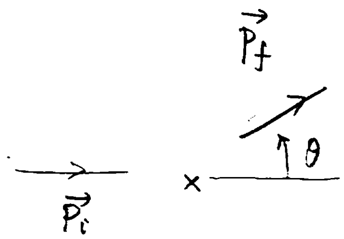
$$E_f = \frac{p_f^2}{2m} \rightarrow dE_f = \frac{p_f}{m} dp_f$$

$$\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r}\ \psi_f^*(\mathbf{r})\, V(\mathbf{r})\, \psi_i(\mathbf{r})$$

$$= \int d\mathbf{r}\ e^{i(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\cdot \vec{r}/\hbar}\ V(r)$$

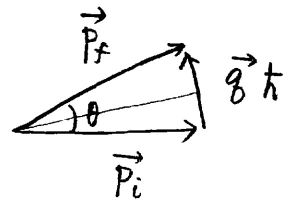
$$\equiv \int d\mathbf{r}\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ V(r) \equiv \tilde{V}(\vec{q})$$

フーリエ変換




$$\vec{q} \equiv (\vec{p}_f - \vec{p}_i)/\hbar$$

運動量移行
momentum transfer




$$q\hbar = 2 p_i \sin\frac{\theta}{2}$$

↓

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{p_f^2\, dp_f}{(2\pi\hbar)^3}\, d\Omega\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2\ \delta(E_f - E)$$

↑ 散乱粒子の放出角度

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int m\, p_f\, dE_f\, d\Omega\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2\, \delta(E_f - E)$$

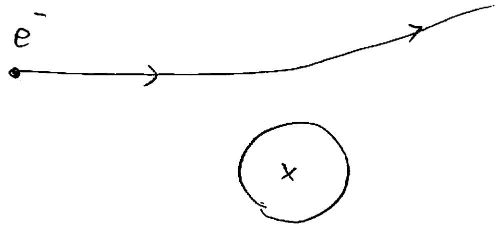
$$= \frac{m\, p_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

これを入射フラックスの大きさ $j = \frac{k\hbar}{m}$ で割ると断面積が出る

$$\sigma = \frac{W_{if}}{j} = \int d\Omega\ \underbrace{\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{= \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

◦具体的な応用例

電荷密度 $e\rho(r)$ を持つ標的粒子と電子の散乱




$$V(r) = -e^2 \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

(note) ポアソン方程式
$$\nabla^2 V = 4\pi e^2 \rho$$

↓
$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})$$

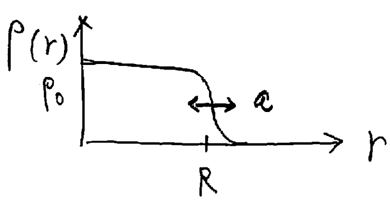
$$= \cancel{\frac{1}{-iq} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \Big|_{-\infty}^{\infty}} \rightarrow 0 + \frac{1}{iq} \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \nabla V$$

$$= \cancel{\frac{1}{q^2} \nabla V \Big|_{-\infty}^{\infty}} \rightarrow 0 - \frac{1}{q^2} \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \nabla^2 V$$

$$= -\frac{4\pi}{q^2} e^2 \underbrace{\int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \rho(\vec{r})}$$

↓
電荷密度のフーリエ変換

cf. 電子散乱による原子核の密度の決定




$\rho_0 \sim 0.17\ \mathrm{fm}^{-3}$
$R \sim 1.1\, A^{1/3}\ \mathrm{fm}$ } 陽子+中性子の密度
$a \sim 0.53\ \mathrm{fm}$

cf. SCRIT

(note) 点電荷の場合

$$\rho(\mathbb{r}) = Z\,\delta(\mathbb{r}) \quad \longrightarrow \quad F(\vec{q}) = Z$$

$\downarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z e^2}{4E \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

古典的なラザフォード散乱の式と一致.