

### 3.3. リップマン・シュウィンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V\right) \psi = E \psi$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E\right)}_{\hat{H}_0} \psi = -V \psi$$

形式解

$$\psi = \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \psi$$

リップマン・シュウィンガー方程式

$$(H_0 - E) \phi = 0$$

$\eta$ : 正の微小量

(note) グリーン関数

$$\hat{G}^{(+)} = + \frac{1}{\hat{H}_0 - E - i\eta}$$

外向きの境界条件

座標表示では

$$G^{(+)}(r, r') = + \langle r | \frac{1}{\hat{H}_0 - E - i\eta} | r' \rangle$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{+ik|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E})$$

(<http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/lecture2/konan08/green.pdf> を参照)

(note)

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \phi(r) - \int dr' G^{(+)}(r, r') V(r') \psi(r') \\ &= e^{ik \cdot r} - \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int dr' \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi(r') \end{aligned}$$

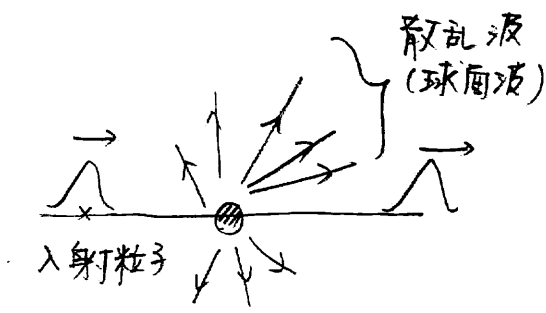
$r \rightarrow \infty$  近似

$$k|r-r'| = k\sqrt{r^2 - 2r \cdot r' + r'^2} \sim kr - \underbrace{\left(k \frac{r}{r'} \cdot r'\right)}_{\equiv k'}$$

$$\begin{aligned} \psi(r) &= e^{ik \cdot r} - \underbrace{\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr' e^{-ik' \cdot r'} V(r') \psi(r')}_{f(\theta)} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned}$$

散乱振幅

$$= \underbrace{e^{ik \cdot r}}_{\text{入射波}} + \underbrace{f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{散乱波}}$$



ポールの近似

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr' e^{-ik' \cdot r'} V(r') \underbrace{\psi(r')}_{\int \phi(r') = e^{ik \cdot r}} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr' e^{-i(k'-k) \cdot r'} V(r') \end{aligned}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \leftarrow$  ポールの黄金則による導出と一致.

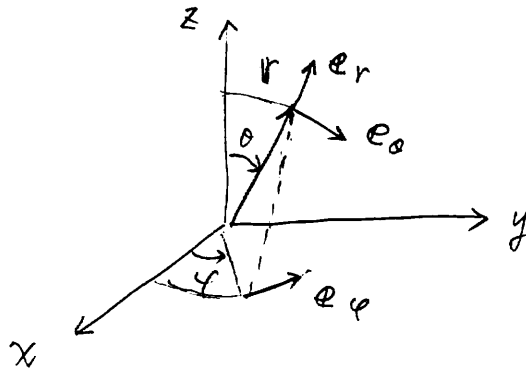
•  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$  を導出

散乱波  $\psi_{sc}(r) \sim f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$  に伴う 77... 72

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} [\psi_{sc}^* \nabla \psi_{sc} - c.c.]$$

(note)

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

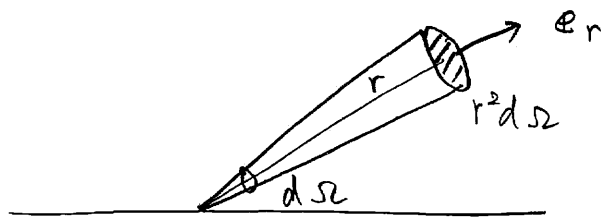


$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} \left[ f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} - c.c. \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \left[ f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \left\{ f(\theta) \left( \frac{e^{ikr}}{r} \cdot ik - \frac{1}{r^2} e^{ikr} \right) \mathbf{e}_r + \frac{e^{ikr}}{r^2} f'(\theta) \mathbf{e}_\theta \right\} - c.c. \right]$$

$$\sim \frac{\hbar}{2im} \cdot ik \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \cdot 2 \mathbf{e}_r \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{k\hbar}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \mathbf{e}_r$$



↓

単位時間に立体角  $d\Omega$  に散乱される  
粒子の数

$$\frac{k\hbar}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \cdot r^2 d\Omega$$

↓

散乱断面積:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{in}} \cdot \frac{k\hbar}{m} |f(\theta)|^2 = |f(\theta)|^2$$

### 3.4 部分波解析

ボルン近似 :  $e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar} \longrightarrow e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar}$   
 $\uparrow$   
 擾動  $V(r)$

$E$  が大きい時に成り立つ。

(note)  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \theta}$

$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \underbrace{j_l(kr)}_{\text{球バッセル関数}} P_l(\cos \theta)$   
 $\uparrow$   
 ルジャンドル多項式で展開

$l$ : 部分波

(note)  $\Psi_l(r) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{r})$

$\downarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R_l(r) + \left( V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E \right) R_l = 0$

中心ポテンシャルの問題

$V(r) = 0$  のとき (自由粒子) の解は  $R_l(r) = j_l(kr)$   
 $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$

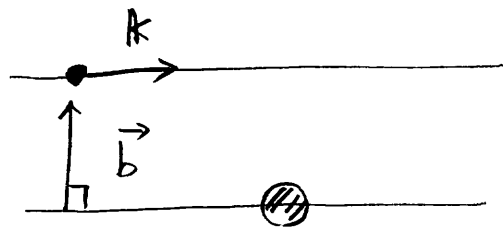
(note)  $j_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

$n_l(kr) \sim -\frac{1}{kr} \cos(kr - \frac{l\pi}{2})$  球ノイマン関数.

↓

平面波  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  には全ての部分波  $l$  が  
まじってゐる

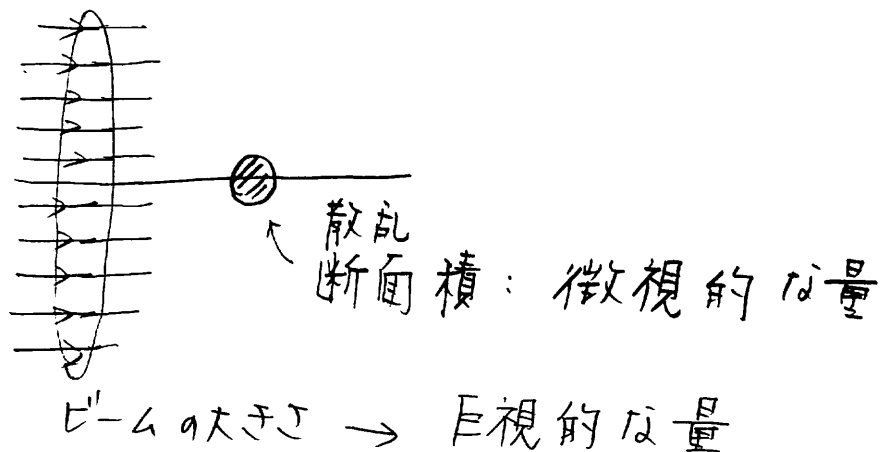
(note) 衝突係数 (impact parameter)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \rightarrow \quad l = b k \hbar$$

衝突係数

$\sum_{l=0}^{\infty} \dots \leftrightarrow$  いよいよは衝突係数が合わさってゐる



$\sim$   $l$  が低くなるに各  $l$  とに考える  
必要がある (部分波解析)