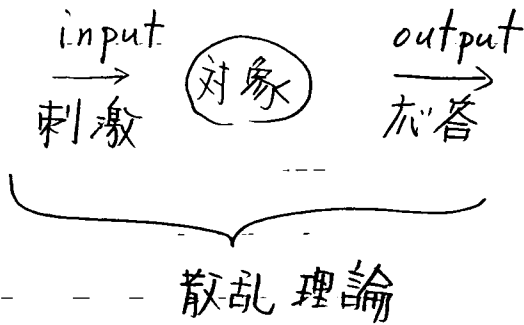


2. 散乱理論

2.0. 散乱の基本概念



マクロな物体 (古典的)

input: (太陽からくる) 光

output: 反射光

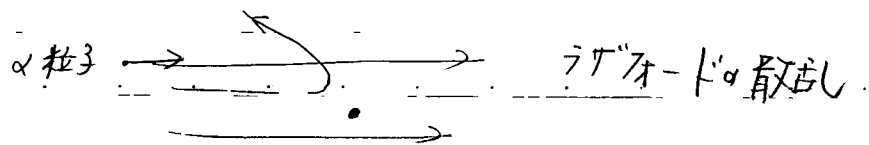
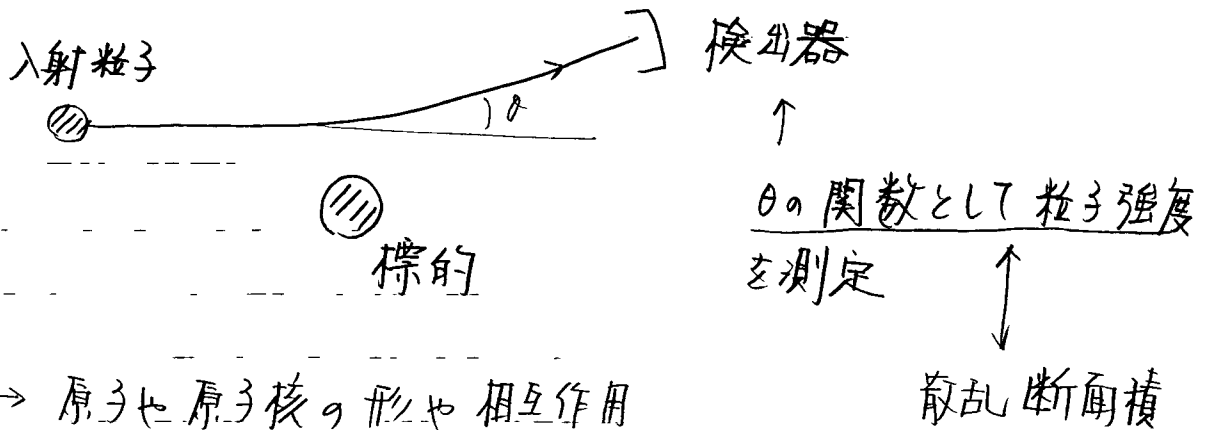
光の波長: 色

光の方向: 形

ミクロな物体 (量子系)

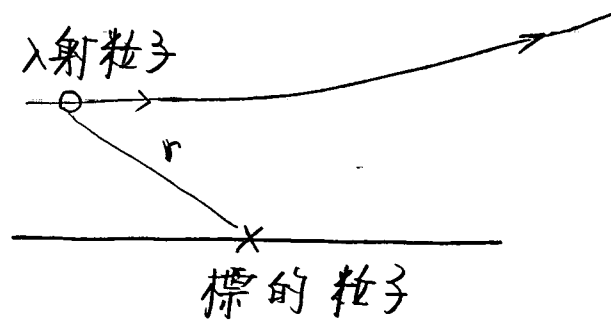
input: 加速器で加速された入射粒子

output: 出てくる粒子



2. 散乱理論

2.1. ボール近似



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - E \right) \psi(r) = 0$$

$E \gg |V(r)|$ (高エネルギー散乱)

→ $|V(r)|$ を小さいとして摂動として扱う

$V(r) = 0$ とした時の解 → $\psi(r) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$
(平面波)

↓
 $\psi_i(r) = e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r} / \hbar} \xrightarrow[\text{遷移}]{V(r)} \psi_f(r) = e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{r} / \hbar}$

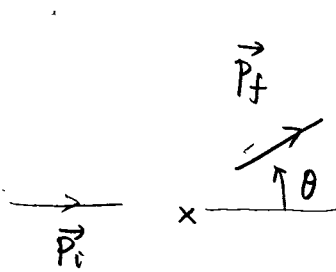
$$\left(\frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} = E \right)$$

フェルミの黄金則

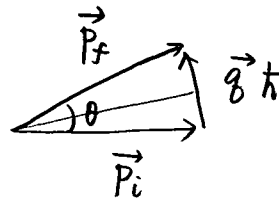
$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi \hbar)^3} |\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle &= \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i(\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} / \hbar} V(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\mathbf{r}) \equiv \tilde{V}(\vec{q}) \end{aligned}$$

フーリエ変換



$$\vec{q} = (\vec{P}_f - \vec{P}_i) / \hbar$$

 運動量移行
 momentum transfer


$$q \hbar = 2 P_i \sin \frac{\theta}{2}$$

 \Downarrow

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{P_f^2 dP_f}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{d\Omega}_{\text{scattered particle emission angle}} |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E)$$

散乱粒子の放出角度

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int m P_f dE_f d\Omega |\tilde{V}(\vec{q})|^2 \delta(E_f - E)$$

$$= \frac{m P_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

 これを入射フラックスの大きさ $j = \frac{\hbar k}{m}$ で割ると断面積が出る

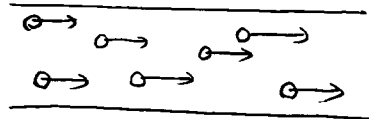
$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{W_{if}}{j} = \int d\Omega \underbrace{\frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{= \frac{d\sigma}{d\Omega}} \end{aligned}$$

2.2. 散乱断面積

平面波 $\psi(r) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$ は普通の意味では規格化できない:

$$\int dr |\psi(r)|^2 = \int dr \cdot 1 = \infty$$

解釈: 平面波は粒子の流れを表わす



フラックス (流れの密度)

単位時間当り単位面積を通過する粒子の数

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^*(r) \nabla \psi(r) - \psi(r) \nabla \psi^*(r))$$

(note)

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\psi} \psi^* + \psi \dot{\psi}^*) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \cancel{V\psi} \right) \psi^* - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + \cancel{V\psi^*} \right) \psi \right\} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \underbrace{(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)}_{= \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)} \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{aligned}$$

$$\rho(r) = |\psi(r)|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

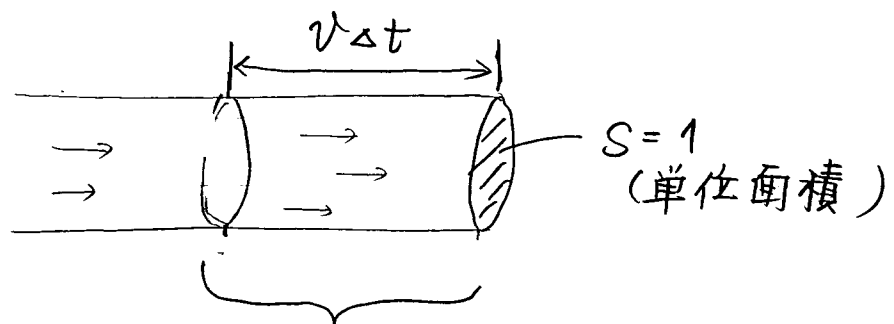
とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{連続の方程式})$$

$$\psi(r) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} \quad \text{の場合}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} \left(\cancel{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}} \cdot \frac{i\vec{p}}{\hbar} \cancel{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}} - \cancel{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}} \cdot \frac{-i\vec{p}}{\hbar} \cancel{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \cdot \frac{2i\vec{p}}{\hbar} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$$

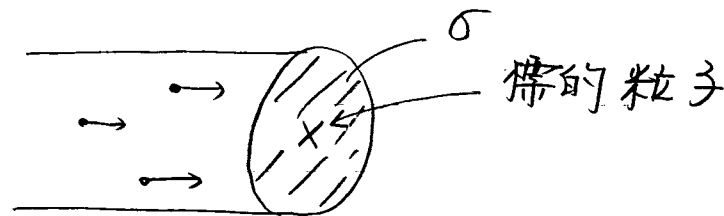


この中にあり粒子が時間 Δt のあいだに S を通過

$$\text{散乱断面積} = \frac{\text{単位時間当りの遷移確率}}{\text{入射粒子のフラックス}}$$

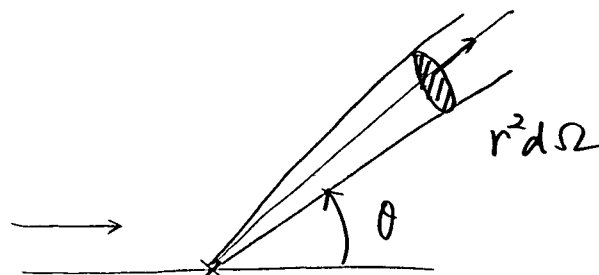
$$\text{次元} = \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \left(\frac{1}{T L^2}\right)^{-1} = L^2$$

(面積の単位)



標的粒子のまわりの断面積 σ を通過する粒子のみが反応する

(note) 微分散乱断面積



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 d\Omega \text{ を通過するフラックス}}{\text{入射フラックス}}$$

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (\text{全断面積})$$

ボルン近似 τ は

$$\begin{cases} W_{if} = \frac{m P_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega |\tilde{V}(\vec{k})|^2 \\ j = \frac{\hbar k}{m} = \frac{P_i}{m} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\sigma = \frac{W_{if}}{j} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega |\tilde{V}(\vec{k})|^2$$

散乱粒子の放出角度

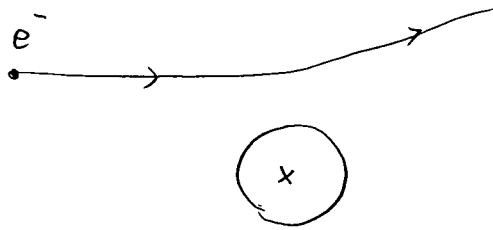
$$= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{と } \theta < \pi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\vec{k})|^2$$

$$\hbar k = 2 P_i \sin \frac{\theta}{2}$$

• ボールン近似による散乱断面積: $\sigma = \int d\Omega \underbrace{\frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2}_{= \frac{d\sigma}{d\Omega}}$

電荷密度 $e\rho(r)$ を持つ標的粒子と電子の散乱



$$V(r) = -e^2 \int dr' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$$

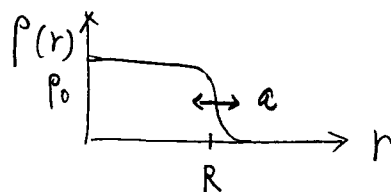
(note) ポアソンの方程式

$$\nabla^2 V = 4\pi e^2 \rho$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \tilde{V}(\vec{q}) &= \int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \\ &= \cancel{\frac{1}{-i\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \Big|_{-\infty}^{\infty}} + \frac{1}{i\vec{q}} \cdot \int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla V \\ &= \cancel{\frac{1}{q^2} \nabla V \Big|_{-\infty}^{\infty}} - \frac{1}{q^2} \int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla^2 V \\ &= -\frac{4\pi}{q^2} e^2 \underbrace{\int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})}_{\downarrow} \end{aligned}$$

電荷密度のフーリエ変換

cf. 電子散乱による原子核の密度の決定



$$\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$$

$$R \sim 1.1 A^{1/3} \text{ fm}$$

$$a \sim 0.53 \text{ fm}$$

} 陽子+中性子の密度

cf. SCRT

(note) 点電荷の場合

$$\rho(\mathbf{r}) = z \delta(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi(\vec{\theta}) = z$$

↓

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ze^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$$

古典的 Rutherford 散乱の
式と一致。