2013.12.16

量子力学 III 宿題 2

- 次回の授業（1 月 6 日）の時に提出のこと。早めに出せる場合は、合同 B 棟 1047 号室（萩野オフィス）前の封筒の中に提出してもよい。
- 学籍番号、氏名をレポート用紙に明記のこと。

問題 1

ハミルトニアンが時間 t に陽に依存し、$H = H_0 + V(t)$ で与えられる系を考える。ここで、H_0 は時間に依らず、H_0 の全ての固有値、固有関数が $H_0\,\phi_n = \epsilon_n\,\phi_n$ と分かっているとする。$V(t)$ が非常に小さい場合に、時間を含むシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = (H_0 + V(t))\,\psi(t) \tag{1}$$

を 1 次の摂動論で解いてみよう。但し、$t = 0$ において、系の波動関数は $\psi(t = 0) = \phi_n$ で与えられているとする。

1) 時刻 t における波動関数 $\psi(t)$ を

$$\psi(t) = \sum_m C_m(t)\,e^{-i\epsilon_m t/\hbar}\,\phi_m \tag{2}$$

と展開する。この時、$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t)$ はどう表されるか答えよ。

2) 式 (1) の両辺で ϕ_k との内積を取ることによって、$C_k(t)$ の満たすべき方程式を導け。ϕ_k の直交性 $\langle\phi_k|\phi_m\rangle = \delta_{k,m}$ を用いよ。また、$V_{km}(t) \equiv \langle\phi_k|V(t)|\phi_m\rangle$ の記号を用いてよい。

3) 前問で導いた方程式を $V(t)$ が小さい場合に近似的に解く。$C_k(t)$ を $V(t)$ の次数に応じて

$$C_k(t) = C_k^{(0)}(t) + C_k^{(1)}(t) + C_k^{(2)}(t) + \cdots \tag{3}$$

と展開したとする。但し、$C_k^{(p)}$ は $[V(t)]^p$ のオーダーの数とする。このとき、$C_k^{(0)}(t)$ は初期条件 $\psi(t = 0) = \phi_n$ より $C_k^{(0)} = \delta_{k,n}$ と決まる。これを用いて $C_k^{(1)}(t)$ を求めよ。($C_k^{(1)}(t = 0) = 0$ としてよい。)

問題 2

次の式で記述される調和振動子を考える。

$$H = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{1}{2}m(\omega(t))^2x^2 \tag{4}$$

ここで、

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_1\,\cos ft \tag{5}$$

であり、$\omega_1 \ll \omega_0$ とする。このとき、ω_1 の 1 次の範囲で (4) 式のハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &\sim \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + m\omega_0\omega_1 \cos(ft)\cdot x^2 && (6)\\
&\equiv H_0 + V(t), \qquad \left[V(t) = m\omega_0\omega_1\cos(ft)\cdot x^2\right] && (7)
\end{aligned}
$$

となる。$t = 0$ において系が H_0 の基底状態にあったとして、時刻 $t\ (> 0)$ において系が基底状態でない確率を 1 次の摂動論を用いて求めよ。このとき、

$$
\begin{aligned}
\langle k|x^2|0\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega_0} \qquad (k=2) && (8)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega_0} \qquad (k=0) && (9)\\
&= 0 \qquad (\text{それ以外}) && (10)
\end{aligned}
$$

であることを用いよ。また、時間積分を実行する際、被積分関数の中で $\exp[i(2\omega_0+f)t']$ を含む項は時間に関して激しく振動するとして無視してもよい。H_0 のエネルギー固有値 ϵ_k は振動数 ω_0 の調和振動子ハミルトニアンの解であることに注意せよ。

問題３

以下のポテンシャルによる散乱問題（荷電粒子によるクーロン散乱）を考える：

$$V(\boldsymbol{r}) = Z_P e^2 \int d\boldsymbol{r}'\, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{11}$$

ただし、密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の規格化は、

$$\int d\boldsymbol{r}\, \rho(\boldsymbol{r}) = Z_T \tag{12}$$

とする。この時、ボルン近似を使って散乱断面積を評価すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\,|F(\boldsymbol{q})|^2 \tag{13}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)/\hbar$ であり、$F(\boldsymbol{q})$ は次の式で与えられる：

$$F(\boldsymbol{q}) \equiv \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\rho(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr\, e^{-iqr\cos\theta}\rho(\boldsymbol{r}). \tag{14}$$

球対称な密度 $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ を考えるとき、$|\boldsymbol{q}| \sim 0$ で $F(\boldsymbol{q})$ が

$$F(\boldsymbol{q}) \to Z_T\left[1 - \frac{q^2}{6}\langle r^2\rangle\right] \tag{15}$$

となることを示せ。ここで、

$$\langle r^2\rangle \equiv \frac{\int d\boldsymbol{r} r^2 \rho(\boldsymbol{r})}{\int d\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{4\pi\int_0^\infty r^4 dr\, \rho(r)}{Z_T} \tag{16}$$

は平均 2 乗半径（root mean square radius）と呼ばれる。

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan.

問題 1

1) $$\psi(t) = \sum_m c_m(t)\, e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}\, \phi_m$$

$$i\hbar\, \dot{\psi} = \sum_m \left(i\hbar\, \dot{c}_m + \varepsilon_m c_m\right) e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}\, \phi_m$$

2) $$\sum_m \left(i\hbar\, \dot{c}_m \cancel{+ \varepsilon_m c_m}\right) e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}\, \phi_m$$

$$= \sum_m \left(\cancel{\varepsilon_m} + V(t)\right) c_m\, e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}\, \phi_m$$

$\downarrow$

$$i\hbar\, \dot{c}_k\, e^{-i\varepsilon_k t/\hbar} = \sum_m V_{km}(t)\, c_m(t)\, e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}$$

$\downarrow$

$$\dot{c}_k = \frac{1}{i\hbar} \sum_m V_{km}(t)\, c_m(t)\, e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_m)t/\hbar}$$

3) $$\dot{c}_k^{(1)} \sim \frac{1}{i\hbar} \sum_m V_{km}(t)\, \underbrace{c_m^{(0)}(t)}_{=\,\delta_{m,n}}\, e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_m)t/\hbar}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\, V_{kn}(t)\, e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_n)t/\hbar}$$

$\downarrow$

$$c_k^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{kn}(t')\, e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_n)t'/\hbar}\, dt'$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

$\boxed{\text{問題 2}}$

$$V(t) = m\omega_0 \omega_1 \cos(ft) \cdot x^2$$

$$C_2^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' \quad m\omega_0\omega_1 \cos ft' \cdot \langle 2|x^2|0\rangle \times e^{i\cdot 2\hbar\omega_0 t'/\hbar}$$

$$= \frac{1}{i\cancel{\hbar}} \cdot \cancel{m\omega_0}\omega_1 \cdot \frac{\cancel{\hbar}}{\sqrt{2}\cancel{m\omega_0}}$$

$$\times \underbrace{\int_0^t dt' \quad \cos ft' \cdot e^{2i\omega_0 t'}}$$

$$\| $$

$$\int_0^t dt' \quad \frac{1}{2}\left(e^{ift'} + e^{-ift'}\right) e^{2i\omega_0 t'}$$

$$\sim \int_0^t dt' \quad \frac{1}{2} \quad e^{i(2\omega_0 - f)t'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(2\omega_0 - f)t} - 1\right) \frac{1}{i(2\omega_0 - f)}$$

$$= \frac{1}{2i} e^{\frac{i}{2}(2\omega_0 - f)t}\left(e^{+\frac{i}{2}(2\omega_0-f)t} - e^{-\frac{i}{2}(2\omega_0-f)t}\right) \times \frac{1}{2\omega_0 - f}$$

$$= e^{\frac{i}{2}(2\omega_0 - f)t} \sin\left[\frac{1}{2}(2\omega_0 - f)t\right] \times \frac{1}{2\omega_0 - f}$$

$$P = \sum_{k\neq 0} |C_k^{(1)}(t)|^2 = |C_2^{(1)}(t)|^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sin^2\left[\frac{1}{2}(2\omega_0 - f)t\right]}_{= \frac{1}{2}(1 - \cos[(2\omega_0 - f)t])} \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\omega_0 - f}\right)^2$$

でもOK

$\boxed{\text{問題 3}}$

$$F(q) = \int \underbrace{e^{-iq\cdot r}}_{\displaystyle\wr} \rho(r)\, dr$$

$$1 - iq\cdot r + \frac{1}{2}(iq\cdot r)^2$$

$$= 1 - iq\cdot r - \frac{1}{2}(qr)^2 \cos^2\theta$$

$$\int r\,\rho(r)\,dr = 0$$

$$\int d\hat{r}\,\cos^2\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cos^2\theta = 2\pi\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}$$

$\downarrow$

$$F(q) \sim \underbrace{\int dr\,\rho(r)}_{\substack{\parallel \\ Z_T}} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot q^2\cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{3}\int_0^\infty r^2 dr\cdot r^2\rho(r)$$

$$= Z_T\left(1 - \frac{2\pi}{3}q^2\cdot\frac{1}{Z_T}\int_0^\infty r^4 dr\,\rho(r)\right)$$

$$= Z_T\left(1 - \frac{q^2}{6}\cdot\underbrace{\frac{4\pi}{Z_T}\int_0^\infty r^4 dr\,\rho(r)}_{\substack{\parallel \\ \langle r^2\rangle}}\right)$$