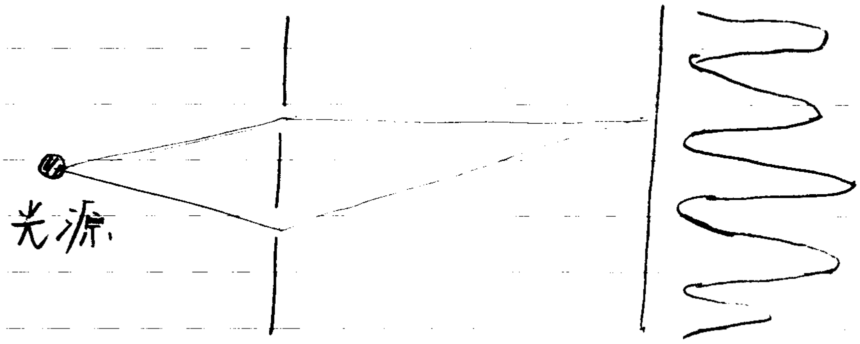
1. 前期量子論

1.1. 量子の世界

a) 電子の回折と干渉

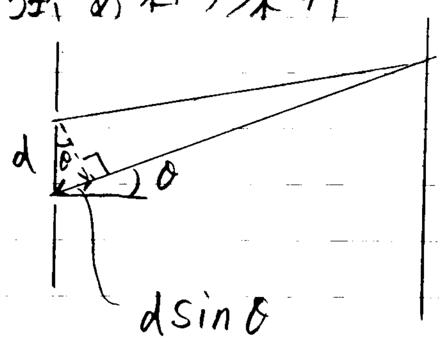
2重スリット



干渉パターン

光は波（電磁波）

波が強め合う条件

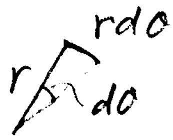


$\boxed{d\sin\theta = n\lambda}$

電子を使っても同様の干渉パターン
外村彰氏の実験（1989年）

cf. 「光子の裁判」朝永振一郎

→ 電子は波のようにふるまっている。

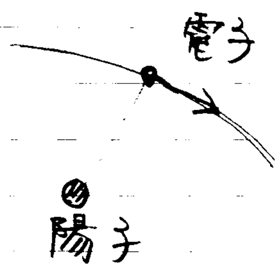


$v = r\dot{\theta}$

$mr^2\dot{\theta} = \ell$

b) 原子の安定性

水素原子



古典力学 : $m\dot{v} = -\frac{e^2}{r^2} e_r$

$\rightarrow |\dot{v}| = \frac{e^2}{mr^2}$

荷電粒子が加速度運動
→ 電磁放射によるエネルギー消失

単位時間当たりのエネルギー消失
(電磁気)

$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{v})^2$ (erg/s)

$$S = -\frac{dE}{dt} = \frac{2e^6}{3m^2c^3r^4}$$

(note)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$$

(ビリアル定理)

↓

$V(r) = ar^{n+1}$

$\langle T \rangle = \frac{n+1}{2}\langle V \rangle$

$n = -2 \rightarrow \langle T \rangle = -\frac{\langle V \rangle}{2}$

$E = \frac{1}{2}\langle V \rangle$

$$\dot{E} = \frac{e^2}{2r^2}\dot{r}$$

$$\underbrace{r^2\dot{r}}_{=\frac{1}{3}\frac{d}{dt}r^3} = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}$$

$$r^3(t) = r_0^3 - \frac{4e^4}{m^2c^3}t$$

$r(t)=0$ となる t は

$$t = \frac{m^2c^3}{4e^4} r_0^3$$

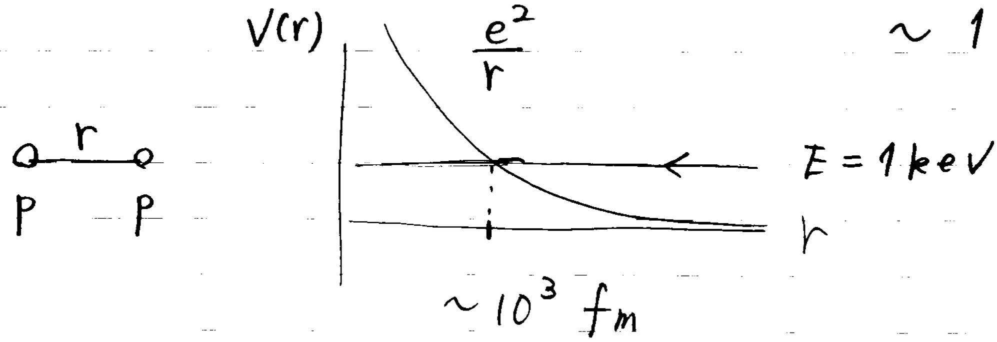
$r_0 = 1\,\text{Å}$ とすると $t \sim 10^{-10}$ sec.

→ 古典力学では原子の寿命は 10^{-10} 秒

c) トンネル効果

太陽：陽子＋陽子の核融合反応

太陽の中心温度：1500万度 $=1.5\times10^7$ K



核融合が起こるためには
核力がはたらくくらい近づかなくてはならない（～ 1 fm）

→ 古典力学では太陽は燃えない

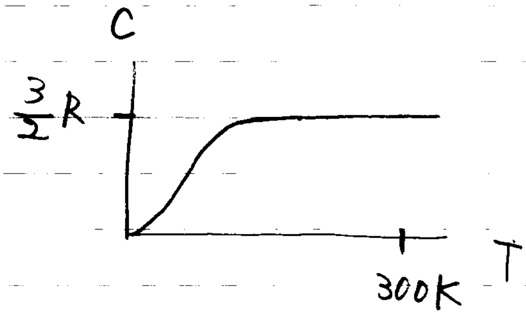
⤳ トンネル効果

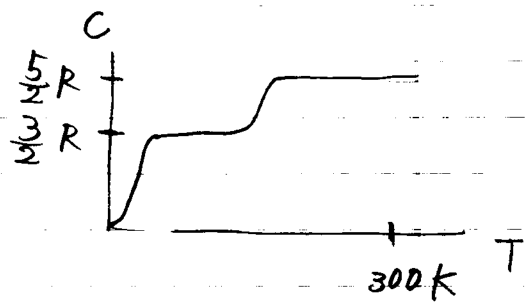
d) 比熱の問題

エネルギー等分配則：各自由度に $\frac{1}{2}k_BT$ のエネルギー

$$\begin{cases} 1\text{モルの}\ 1\text{原子分子} \rightarrow E = \frac{3}{2}N_A k_B T = \frac{3}{2}RT \\ \quad〃 \quad\ \ 2\text{原子分子} \rightarrow E = \frac{5}{2}N_A k_B T = \frac{5}{2}RT \end{cases}$$

モル比熱 $C = \frac{\partial E}{\partial T} = \begin{cases} \frac{3}{2}R & (1\text{原子分子}) \\ \frac{5}{2}R & (2\text{原子分子}) \end{cases}$

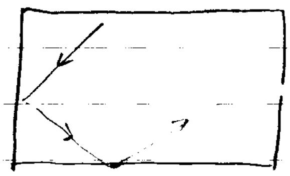




低温で等分配則が成り立たなくなる。

1.2. 真空の比熱とエネルギー量子の発見

温度Tの真空 → 様々な波長の電磁波が存在



小孔

空洞放射

小孔から空洞に入った電磁波は
外に出ない →「黒体」
黒体放射

小孔から空洞内の色を観測したときに
温度Tがわかるか?

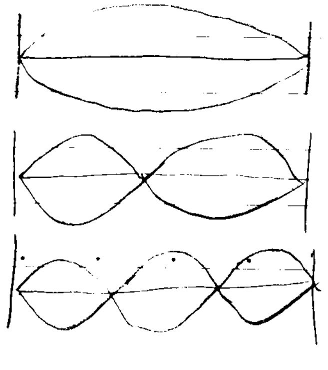
cf. 18世紀後半 産業革命
→ 鉄を精錬する溶鉱炉の温度
を知りたい。

cf. 3度K輻射 (WMAP)

a) レイリー・ジーンズの式 (古典論)

電磁波 ↔ ばねの振動

長さLのばね



$\lambda = 2L$

$\lambda = L$

$\lambda = \frac{2}{3}L$ …… $\lambda = \frac{2L}{n}$

$(n=1,2,\cdots)$

振動数　$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L}$　$(n = 1, 2, \cdots)$

→ ν と $\nu + d\nu$ のあいだの固有振動の数

$$\equiv Z(\nu)\,d\nu = \frac{2L}{c}\,d\nu \qquad \leftarrow \; d\nu = \frac{c}{2L}\,dn$$

3次元：

$$Z(\nu)\,d\nu = \frac{1}{8}\left(\frac{2L}{c}\right)^3 \cdot 4\pi\nu^2 d\nu \times 2 = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

↑ $n_i > 0$ $(i = x, y, z)$　　↑ 偏極

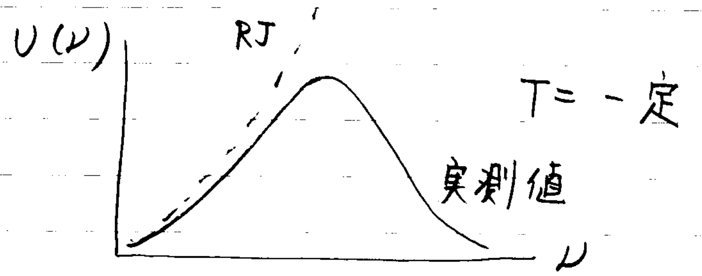
これらの固有振動すべてに k_BT のエネルギーが分配されるとすると

$k_BT = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2}k_BT \times 2$

(単位体積あたり, ν と $\nu + d\nu$ のあいだの振動数をもつ光のエネルギー)

$$\equiv U(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_BT\,d\nu$$

(レイリー・ジーンズの式)



• ν が小さいときには実測値をよく再現

• 全エネルギー：

$$E = \int_0^\infty U(\nu)\,d\nu = k_BT \underbrace{\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu}_{\text{発散}}$$

比熱：$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \infty$

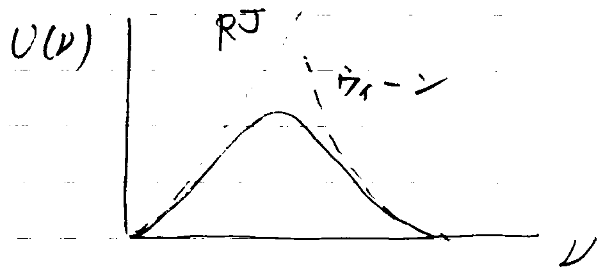
→ 温度を1度上げるために無限の熱が必要

b) ウィーンの式

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) \nu^3 d\nu$$ とした。
(導出は朝永を見よ。)

cf. $F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \left(\frac{\nu}{k_B T}\right)^{-1}$ にとるとRJの式になる。

ウィーン：$F(x) = k_B \beta e^{-\beta x}$ とおいた



c) プランクの式

RJとウィーンを結ぶ内挿公式を発見

$$F(x) = \frac{k_B \beta}{e^{\beta x} - 1}$$

βは現象論的に決める

$\rightarrow$ $h \equiv k_B \beta = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s とすると
実験データとぴったり（プランク定数）

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{h}{1 + h\nu/k_B T - 1} = \dfrac{k_B T}{\nu} & (\nu : \text{小}) \\ \dfrac{h}{e^{h\nu/k_B T}} = h e^{-h\nu/k_B T} & (\nu : \text{大}) \end{cases}$$