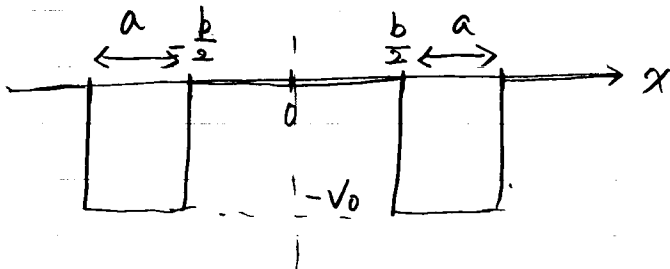
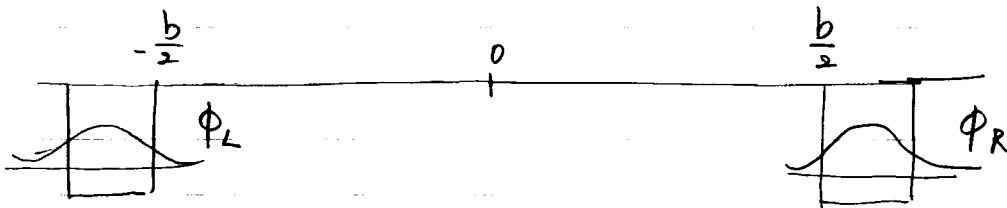


### 3.5. 2重井戸型ポテンシャル



$b$  が非常に大きければ 2つの井戸は独立



エネルギーは  $E_1$  の 2つの状態が縮退

$b$  が近いと縮退がとける

$\Phi(x) \sim \alpha \phi_L(x) + \beta \phi_R(x)$  とおいて近似的に解を求めよ。

$$H\Phi = E\Phi$$

$$\rightarrow H(\alpha\phi_L + \beta\phi_R) = E(\alpha\phi_L + \beta\phi_R)$$

$$\langle \phi_L | H | \phi_L \rangle = \langle \phi_R | H | \phi_R \rangle \equiv \epsilon \sim E_1$$

$$\langle \phi_L | \phi_R \rangle = \langle \phi_R | \phi_L \rangle \sim 0$$

↓

$$\begin{cases} \alpha \epsilon + \beta \langle \phi_L | H | \phi_R \rangle \sim E \alpha \\ \langle \phi_R | H | \phi_L \rangle \alpha + \epsilon \beta \sim E \beta \end{cases}$$

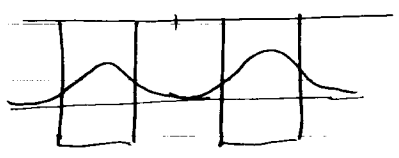
↓

$$\begin{pmatrix} \epsilon & V \\ V & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

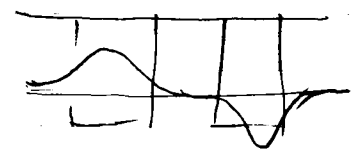
$$V \equiv \langle \phi_L | H | \phi_R \rangle = \langle \phi_R | H | \phi_L \rangle$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_0 = \epsilon - |V|, & \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L(x) + \phi_R(x)) \\ E_1 = \epsilon + |V|, & \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L(x) - \phi_R(x)) \end{cases}$$

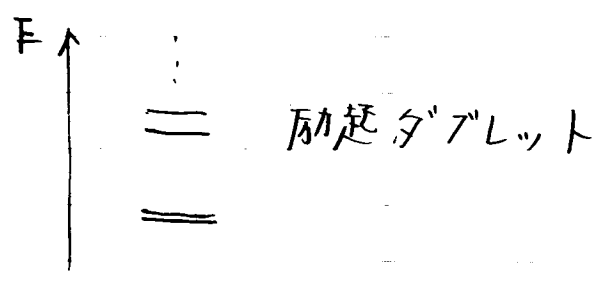
トンネル分岐



ノド 0  
 パリティ +

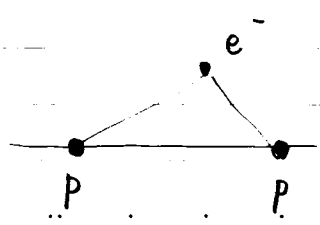


ノド 1  
 パリティ -

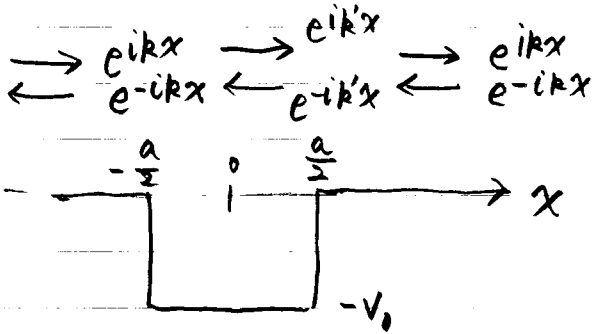


(note)

He<sup>+</sup> イオン



### 3.6. 有限井戸型ポテンシャル (連続状態: $E > 0$ )



$$\phi(x) = \begin{cases} A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ B_+ e^{ik'x} + B_- e^{-ik'x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

\* 110% の固有状態と異なる解もつくられるが、ここでは一般的に書く。

\* 束縛状態: 遠方では  $Ae^{kx} + Be^{-kx}$  のどちらか一方がゼロ  $\rightarrow$  エネルギーは離散化

散乱状態:  $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  のどちらも存在  $\rightarrow$  どんな  $E$  でも解がある (連続状態)

$x = -\frac{a}{2}$  での波動関数の接続

$$\begin{cases} \phi_>(-\frac{a}{2}) = \phi_<(-\frac{a}{2}) \\ \phi'_>(-\frac{a}{2}) = \phi'_<(-\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{2kk' e^{-ika}}{2kk' \cos k'a - i(k^2 + k'^2) \sin k'a}$$

$$R = \frac{-i(k^2 - k'^2) e^{-ika} \sin k'a}{2kk' \cos k'a - i(k^2 + k'^2) \sin k'a}$$

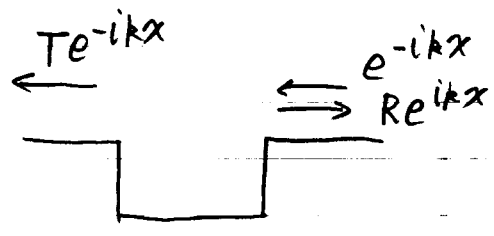
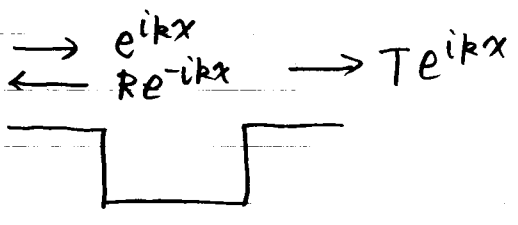
$\chi = \frac{a}{2}$  の接続条件

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = S > \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

両者を合わせると

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S < S > \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

物理的に興味がある解:



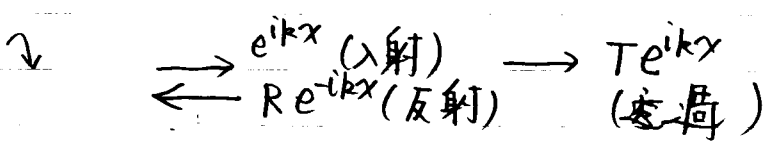
左から入射した波:  $\phi_L$

右から入射した波:  $\phi_R$

\*ポテンシャルがパリティ対称なら、 $R$  と  $T$  は  $\phi_L$  と  $\phi_R$  で同じ

フックルズ:  $j(x) = \frac{\hbar}{2im} \left( \psi^*(x) \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right)$

$\psi(x) = e^{\pm ikx}$  に対して  $j = \pm \frac{\hbar k}{m}$



T: 透過係数  
R: 反射係数



フックルズの保存:  $1 = |T|^2 + |R|^2$

cf. 量子反射

# 型ポテンシャルは解析的に求まる

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} = 2\pi \delta(k-k')$$

• 散乱波動関数の規格化と完全性

$$\phi_{R,L}(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{ikx} + R e^{-ikx}) & (x < -\frac{a}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T e^{ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\phi_{R,R}(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-ikx} + R e^{ikx}) & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

を定義すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{R,R}^*(x) \phi_{R',R}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{R,L}^*(x) \phi_{R',L}(x) = \delta(k-k')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{R,R}^*(x) \phi_{R',L}(x) = 0$$

完全系は

$$1 = \sum_{n: \text{束缚}} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| + \int_0^{\infty} dk |\phi_{R,R}\rangle \langle \phi_{R,R}| + \int_0^{\infty} dk |\phi_{R,L}\rangle \langle \phi_{R,L}|$$

あるいは  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  を用いると

$$\phi_{E,L}(x) \equiv \sqrt{\frac{m}{2\pi \hbar^2 k}} (e^{ikx} + R e^{-ikx}) \quad (x < -\frac{a}{2})$$

etc.  $\epsilon \ll \tau$

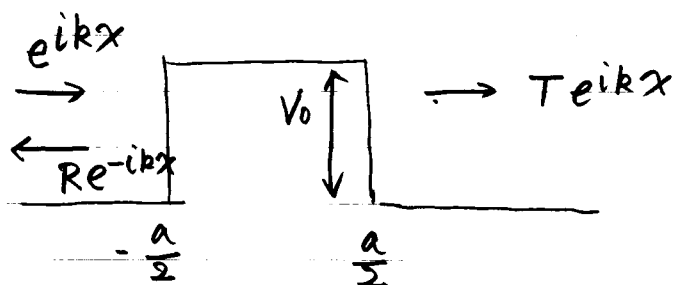
$$\langle \phi_{E,L} | \phi_{E',L} \rangle = \langle \phi_{E,R} | \phi_{E',R} \rangle = \delta(E-E')$$

$$\langle \phi_{E,L} | \phi_{E',R} \rangle = 0$$

∴ a と 3

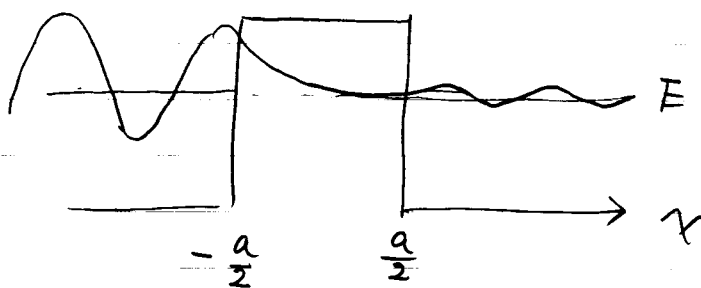
$$1 = \sum_n |\langle \phi_n | \rangle| + \int_0^\infty dE |\langle \phi_{E,L} | \rangle| + \int_0^\infty dE |\langle \phi_{E,R} | \rangle|$$

### 3.7. ボテンシャル障壁と量子トンネル現象



$E < V_0$  のとき  $T \neq 0 \Rightarrow$  「量子トンネル現象」

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ T e^{ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$



$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

$$T = \frac{2k\kappa e^{-i\kappa a}}{2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2) \sinh(\kappa a)}$$

トネル確率 :  $P(E) = \frac{j_{out}}{j_{in}} = |T|^2$

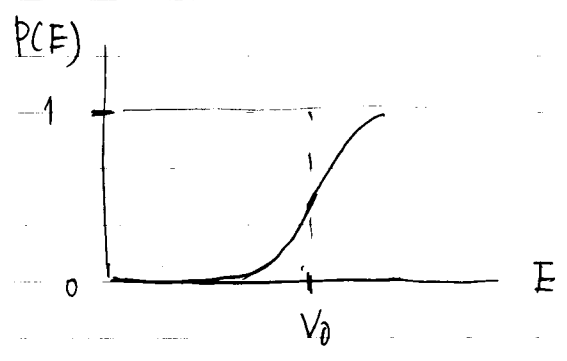
(note)  $V_0 \gg E$  のとき

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ll \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

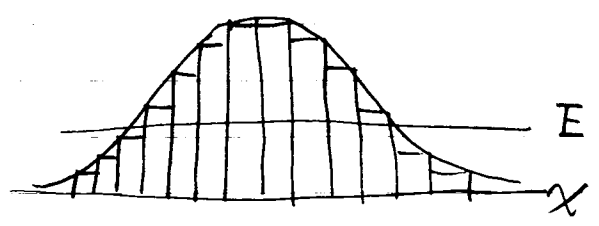
↓

$$|T|^2 \sim \frac{4k^2 \kappa^2}{\kappa^4 \cdot \left(\frac{e^{\kappa a}}{2}\right)^2} = \frac{16k^2}{\kappa^2} e^{-2\kappa a}$$

指数関数.



一般の障壁の場合 :



$$P(E) \sim \pi \int_{\text{障壁}} e^{-2\kappa(x)} dx \sim e^{-2 \int_{\text{障壁}} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} dx}$$

※ より詳しくは議論は WKB 近似のとき.