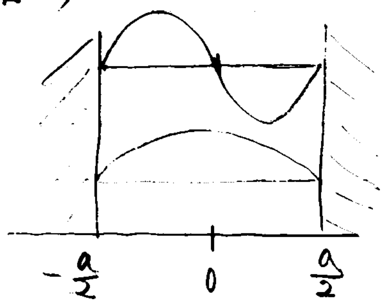
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(復習)



波動関数

$$\phi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

$$\phi\left(x = \pm\frac{a}{2}\right) = \pm A\sin\frac{ka}{2} + B\cos\frac{ka}{2} = 0$$

$\rightarrow$ $A=0,\ \frac{ka}{2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0,1,\cdots)$

又は $B=0,\ \frac{ka}{2} = n\pi \quad (n=1,\cdots)$

$k_1 = \frac{\pi}{a}$, $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$, $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

$k_2 = \frac{2\pi}{a}$, $\phi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$, $E = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

$k_3 = \frac{3\pi}{a}$, $\phi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$, $E = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

ポテンシャル $V(x)$ は $x \to -x$ で不変:「パリティ対称性を持つ」

$$\Pi V(x)\Pi^{-1} \equiv V(-x) = V(x)$$

$$\Pi\frac{p^2}{2m}\Pi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d^2}{d(-x)^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{p^2}{2m}$$

なので $\Pi H \Pi^{-1} = H$

$\Downarrow$ $\Pi H = H\Pi$ すなわち $[H, \Pi] = 0$

H と Π の同時固有状態

(note) $\Pi\psi(x) = \psi(-x)$

$$\Pi^2\psi(x) = \Pi\psi(-x) = \psi(x)$$

$\rightarrow \Pi^2 = 1$ ↓ Πの固有値は± 1.

無限井戸ポテンシャル：

$\Pi\phi_1(x) = \phi_1(x)$ 「正パリティ状態」$\rightarrow \phi'(0)=0$

$\Pi\phi_2(x) = -\phi_2(x)$ 「負パリティ状態」$\rightarrow \phi(0)=0$

(note)

$$\langle\phi_+|x^2|\phi_-\rangle = \langle\phi_-|x^2|\phi_+\rangle = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}dx\ \underbrace{x^2\phi_+(x)\phi_-(x)}_{x\text{の奇関数}}$$

$$\langle\phi_+|x|\phi_+\rangle = \langle\phi_-|x|\phi_-\rangle = 0$$

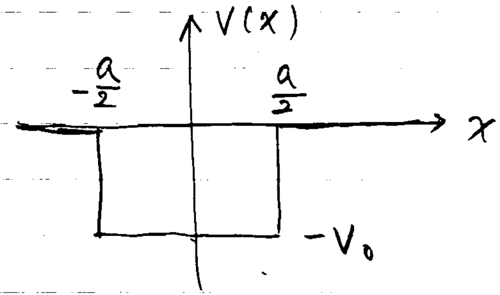
$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \underbrace{x\,\phi_+(x)\phi_+(x)}_{x\text{の奇関数}}$$

$$\langle\phi_+|x|\phi_+\rangle = \langle\phi_+|\underbrace{\tilde{\phi}}_{\text{パリティ負}}\rangle = 0$$

$|\tilde{\phi}\rangle \equiv x|\phi_+\rangle$ とすると

$$\tilde{\phi}(x) = x\,\phi_+(x) \ ; \ \tilde{\phi}(-x) = -x\,\phi_+(-x) = -x\,\phi_+(x)$$
$$= -\tilde{\phi}(x)$$

3.3. 有限井戸型ポテンシャル（束縛状態：$E<0$）



$$V(x)=\begin{cases}-V_0 & \left(-\frac{a}{2}\le x\le \frac{a}{2}\right)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

(note) この場合もパリティ対称性あり

$x<-\frac{a}{2}$ および $x>\frac{a}{2}$ で $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)=E\phi(x)$

$$\rightarrow \phi(x)\propto e^{\pm\kappa x}$$

$$\kappa=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

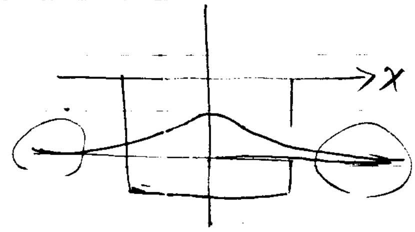
$-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}$ で $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)-V_0\phi(x)=E\phi(x)$

$$\rightarrow \phi(x)\propto e^{\pm ik'x}$$

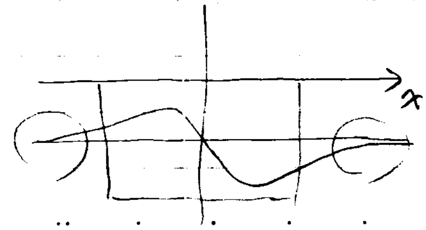
$$k'=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}$$

$x\to\pm\infty$ で $\phi(x)\to 0$ かつ パリティの固有状態

$$\phi_+(x)=\begin{cases}Ae^{+\kappa x} & \left(x<-\frac{a}{2}\right)\\ B\cos k'x & \left(-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right)\\ Ae^{-\kappa x} & \left(x>\frac{a}{2}\right)\end{cases}$$



$$\phi_-(x)=\begin{cases}A'e^{+\kappa x} & \left(x<-\frac{a}{2}\right)\\ B'\sin k'x & \left(-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right)\\ -A'e^{-\kappa x} & \left(x>\frac{a}{2}\right)\end{cases}$$



DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

接続条件：
$$\begin{cases} \phi_<(\pm\frac{a}{2}) = \phi_>(\pm\frac{a}{2}) \\ \phi'_<(\pm\frac{a}{2}) = \phi'_>(\pm\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$\phi(x)$ と $\phi'(x)$ は境界で連続につながる

(note)
$$\phi'_>(b) - \phi'_<(b) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dx\, \frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dx\, \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)\phi(x)$$
↑
シュレーディンガー方程式

$= 0$ （もし $V(x)$ が有限であれば）

※デルタ関数型ポテンシャルでは
これが成り立たない。

$x = \frac{a}{2}$ での接続条件：

$$\begin{cases} A e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B\cos\frac{k'a}{2} \\ -A\kappa e^{-\frac{\kappa a}{2}} = -Bk'\sin\frac{k'a}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -A' e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B'\sin\frac{k'a}{2} \\ A'\kappa e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B'k'\cos\frac{k'a}{2} \end{cases}$$

（＋パリティ）　　　　（－パリティ）

$$\rightarrow \quad \kappa = k'\tan\frac{k'a}{2} \quad ; \quad \kappa = -k'\cot\left(\frac{k'a}{2}\right)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(note)

$$\left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}(-E)$$

$$\left(\frac{k'a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E) = \frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0 - \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2$$

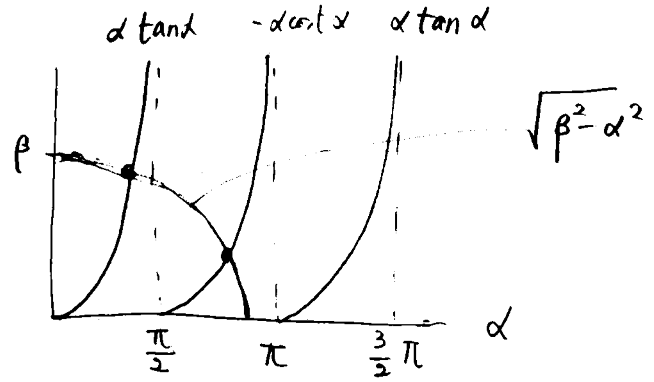
↓

$$\frac{k'a}{2}\tan\frac{k'a}{2} = \frac{\kappa a}{2} = \sqrt{\frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0 - \left(\frac{k'a}{2}\right)^2}$$

or $\alpha\tan\alpha = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ （＋パリティ）

$\left(\alpha = \frac{k'a}{2},\ \beta^2 = \frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0\right)$

$-\alpha\cot\alpha = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ （－パリティ）

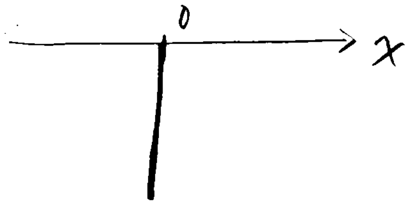


→ ・最低1つは解（束縛状態）がある
・束縛状態は有限個
・βが大きいほど解の個数は多.
（V_0：大 and/or a：大）
・無限井戸の場合よりエネルギーは下がる
（運動エネルギーが下がる）

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

3.4. デルタ関数型ポテンシャル（束縛状態）

$$V(x) = -g\,\delta(x) \qquad (g > 0)$$



（井戸型で $V_0 a =$ 一定のまま $a \to 0$ としたもの）

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{\kappa x} & (x<0) \\ A e^{-\kappa x} & (x>0) \end{cases} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

(note) 波動関数は $x=0$ で連続

$$\phi_>'(x) - \phi_<'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, \frac{2m}{\hbar^2} \left(V(x) - E\right)\phi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (-g)\, \delta(x)\, \phi(x)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} g\, \phi(0)$$

$\Downarrow$

$$-2\kappa = -\frac{2m}{\hbar^2} g$$

$\Downarrow$

$$\kappa = \frac{m}{\hbar^2} g$$

$\Downarrow$

$$E = -\frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m} = -\frac{m g^2}{2\hbar^2}$$