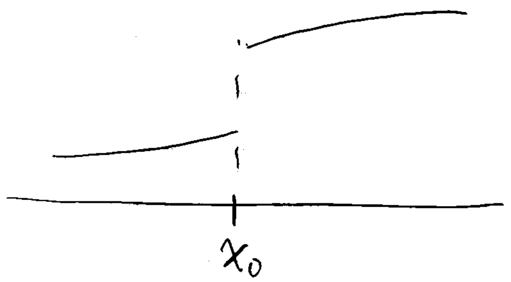
四 波動関数の連続性（補足）

連続の方程式（一次元）： $\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)=0$

$$j(x,t)=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)-\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right)$$

波動関数が $x=x_0$ で不連続であるとする。

例えば



$$\psi(x,t)=\begin{cases}Ae^{ikx}e^{-iEt/\hbar} & (x<x_0)\\ Be^{ikx}e^{-iEt/\hbar} & (x>x_0)\end{cases}$$

このとき，連続の方程式を　$x_0-\varepsilon\leq x\leq x_0+\varepsilon$　で積分してみる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\rho(x,t)\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\left(|B|^2(x_0+\varepsilon)-|A|^2(x_0-\varepsilon)\right)=0$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)\,dx=j(x_+,t)-j(x_-,t)$$
$$=\frac{\hbar}{2im}\cdot 2ik\left(|B|^2-|A|^2\right)$$
$$=\frac{k\hbar}{m}\left(|B|^2-|A|^2\right)$$

$|B|\neq|A|$ のとき連続の方程式が成り立たない。

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x,t)$$

を　$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$　で積分して　$\varepsilon \to 0$　とすると

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \psi(x,t)\, dx = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} V(x)\, \psi(x,t)\, dx = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \ \frac{d^2}{dx^2} \psi(x,t)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x_0+\varepsilon} - \frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x_0-\varepsilon} \right)$$

$$\Downarrow \qquad \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{>} = \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{<}$$

$\Downarrow$　位相を含めて　$A = B$　でなければならない。