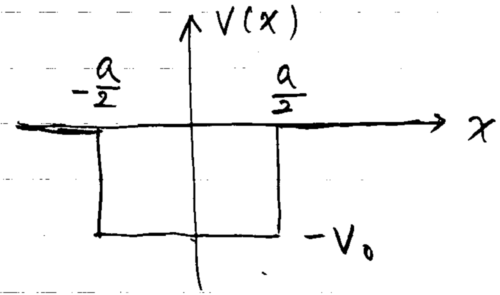
3.3. 有限井戸型ポテンシャル（束縛状態：$E<0$）



$$V(x)=\begin{cases} -V_0 & \left(-\frac{a}{2}\le x\le \frac{a}{2}\right) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(note) この場合もパリティ対称性あり

$x<-\frac{a}{2}$ および $x>\frac{a}{2}$ で $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)=E\,\phi(x)$

$$\rightarrow \phi(x)\propto e^{\pm\kappa x}$$

$$\kappa=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

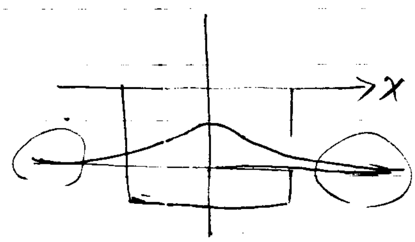
$-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}$ で $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)-V_0\,\phi(x)=E\,\phi(x)$

$$\rightarrow \phi(x)\propto e^{\pm ik'x}$$

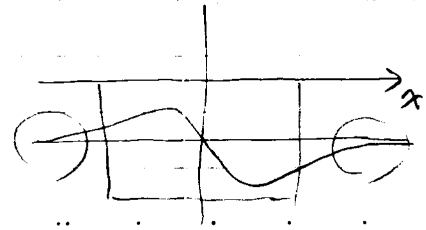
$$k'=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}$$

$x\rightarrow\pm\infty$ で $\phi(x)\rightarrow 0$ かつ パリティの固有状態

$$\phi_+(x)=\begin{cases} A\,e^{+\kappa x} & \left(x<-\frac{a}{2}\right) \\ B\cos k'x & \left(-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right) \\ A\,e^{-\kappa x} & \left(x>\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$



$$\phi_-(x)=\begin{cases} A'\,e^{+\kappa x} & \left(x<-\frac{a}{2}\right) \\ B'\sin k'x & \left(-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right) \\ -A'\,e^{-\kappa x} & \left(x>\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$



DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

接続条件： $\begin{cases} \phi_<(\pm\frac{a}{2}) = \phi_>(\pm\frac{a}{2}) \\ \phi'_<(\pm\frac{a}{2}) = \phi'_>(\pm\frac{a}{2}) \end{cases}$

$\phi(x)$ と $\phi'(x)$ は境界で連続につながる

(note)

$$\phi'_>(b) - \phi'_<(b) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dx \frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dx \quad \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\phi(x)$$

↑
シュレーディンガー方程式

$= 0$ （もし $V(x)$ が有限であれば）

※ デルタ関数型ポテンシャルでは
これが成り立たない。

$x = \frac{a}{2}$ での接続条件：

$$\begin{cases} A e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B\cos\frac{k'a}{2} \\ -A\kappa e^{-\frac{\kappa a}{2}} = -Bk'\sin\frac{k'a}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -A' e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B'\sin\frac{k'a}{2} \\ A'\kappa e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B'k'\cos\frac{k'a}{2} \end{cases}$$

（＋パリティ）　　　　（－パリティ）

$$\to \quad \kappa = k'\tan\frac{k'a}{2} \quad ; \quad \kappa = -k'\cot\left(\frac{k'a}{2}\right)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(note)

$$\left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}(-E)$$

$$\left(\frac{k'a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E) = \frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0 - \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2$$

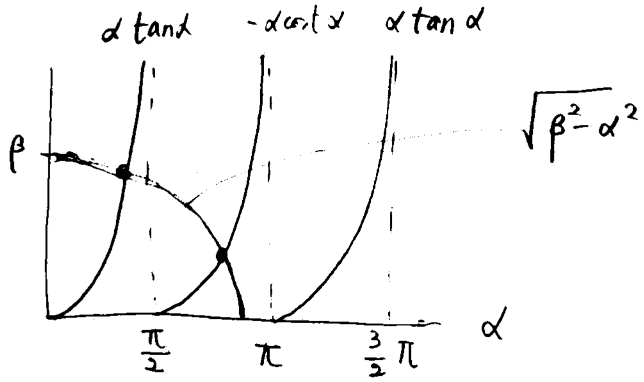
↓

$$\frac{k'a}{2}\tan\frac{k'a}{2} = \frac{\kappa a}{2} = \sqrt{\frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0 - \left(\frac{k'a}{2}\right)^2}$$

or $\alpha\tan\alpha = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ (＋パリティ)

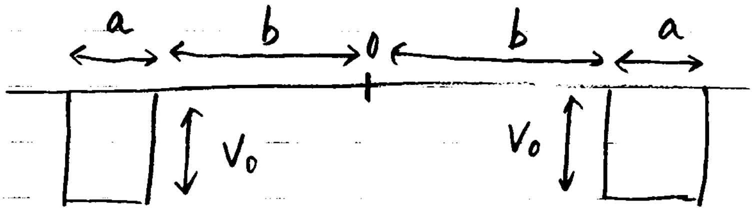
$\left(\alpha = \frac{k'a}{2},\ \beta^2 = \frac{ma^2}{2\hbar^2}V_0\right)$

$-\alpha\cot\alpha = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ (－パリティ)

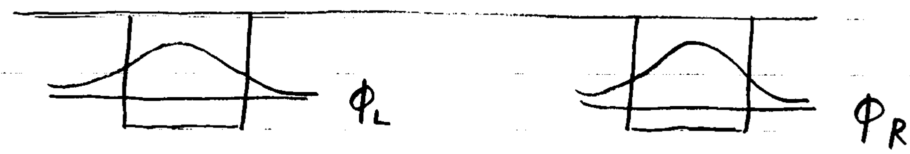


→ ・最低1つは解（束縛状態）がある
・束縛状態は有限個
・βが大きいほど解の個数は多．
（V_0：大 and/or a：大）
・無限井戸の場合よりエネルギーは下がる
（運動エネルギーが下がる）

3.5　2重井戸型ポテンシャル

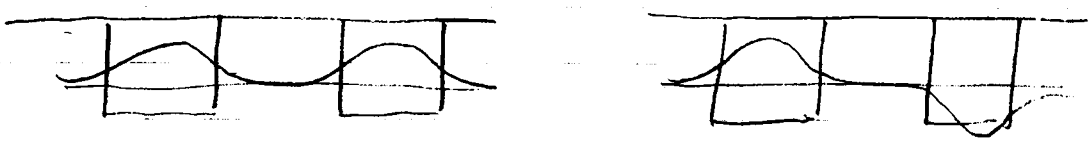


bが非常に大きければ2つの井戸は独立



エネルギー　E_1 で2つの状態が縮退

bが小さいと縮退がとける



パリティのいい状態を作ると

$$\phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_L \pm \phi_R\right)$$

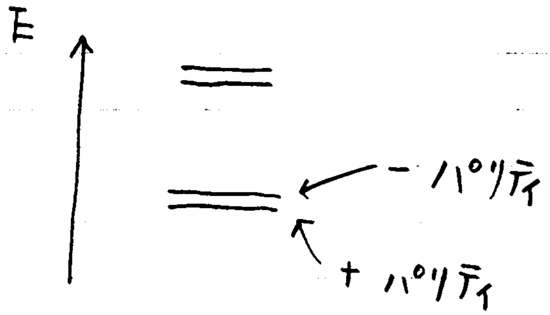
$$H = T + V_L + V_R$$

$$\begin{cases} H\phi_L \sim E_1 \phi_L \\ H\phi_R \sim E_1 \phi_R \end{cases}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$\langle \phi_\pm | H | \phi_\pm \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \phi_L | H | \phi_L \rangle + \langle \phi_R | H | \phi_R \rangle \right)$$
$$\pm \frac{1}{2} \left(\langle \phi_L | H | \phi_R \rangle + \langle \phi_R | H | \phi_L \rangle \right)$$

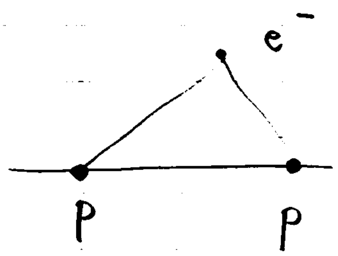
$$\sim E_1 \pm \underbrace{E_1 \langle \phi_L | \phi_R \rangle}$$



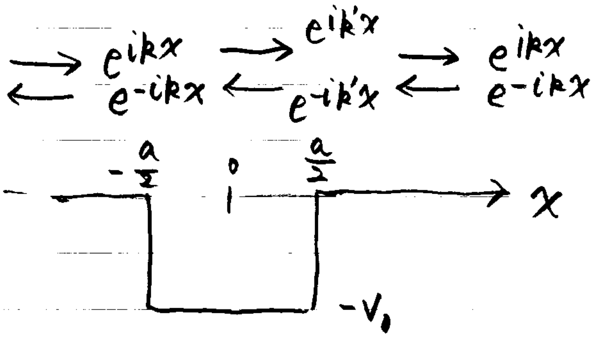
$(E_1 < 0)$

トンネル分離（ダブレット）

(note)　He^+ イオン



3.6. 有限井戸型ポテンシャル（連続状態：E > 0）



$$\phi(x) = \begin{cases} A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ B_+ e^{ik'x} + B_- e^{-ik'x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx} & \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)}$$

※ パリティの固有状態となる解もつくれるが、ここでは一般的に書く。

※ 束縛状態：遠方で $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ の
どちらかがゼロ → エネルギーは離散化

散乱状態：$Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ のどちらも存在
→ どんな E でも解がある
（連続状態）

$x = -\frac{a}{2}$ での波動関数の接続

$$\begin{cases} \phi_>(-\frac{a}{2}) = \phi_<(-\frac{a}{2}) \\ \phi'_>(-\frac{a}{2}) = \phi'_<(-\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$T = \frac{2kk' e^{-ika}}{2kk'\cos k'a - i(k^2+k'^2)\sin k'a}$$

$$R = \frac{-i(k^2-k'^2)e^{-ika}\sin k'a}{2kk'\cos k'a - i(k^2+k'^2)\sin k'a}$$

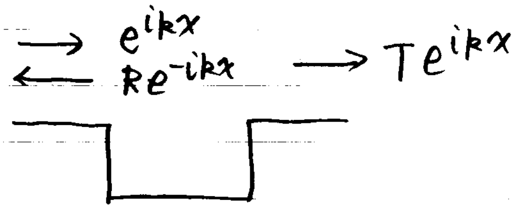
$x = \frac{a}{2}$ での接続条件

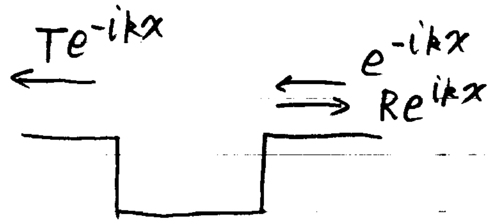
$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = S_> \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

両者を合わせると

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< S_> \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

物理的に興味がある解：



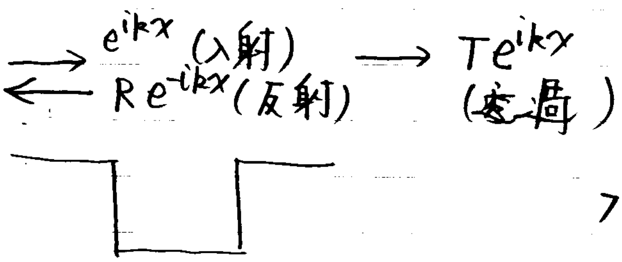


左から入射した波：ϕ_L　　　右から入射した波：ϕ_R

※ポテンシャルがパリティ対称なので，R と T は ϕ_L と ϕ_R で同じ

フラックス：$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x)\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$

$\psi(x) = e^{\pm ikx}$ に対して $j = \pm\frac{k\hbar}{m}$



T：透過係数
R：反射係数

井戸型ポテンシャルでは解析的に求まる

フラックスの保存：
$1 = |T|^2 + |R|^2$

cf. 量子反射