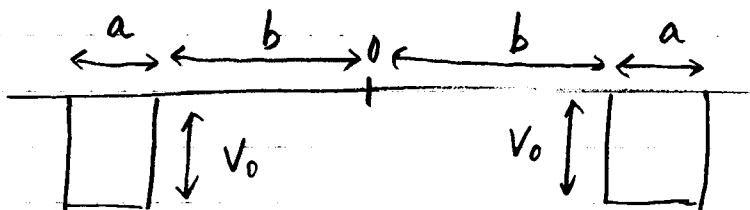
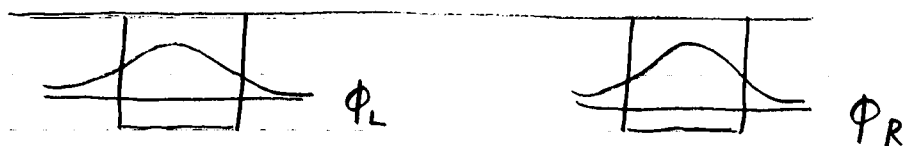


3.5 2重井戸型ポテンシャル

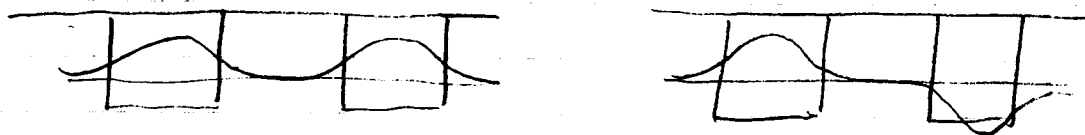


「 b が非常に大きければ」 2つの井戸は独立



エネルギー E_1 の 2つの状態が縮退

「 b が小さいと縮退がとれる」



エネルギー a の状態を作ると

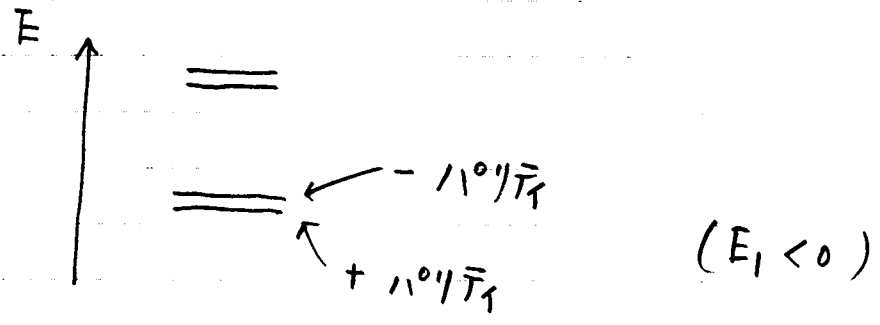
$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L \pm \phi_R)$$

$$H = T + V_L + V_R$$

$$\begin{cases} H\phi_L \sim E_1\phi_L \\ H\phi_R \sim E_1\phi_R \end{cases}$$

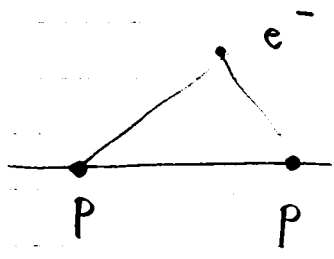
$$\langle \phi_{\pm} | H | \phi_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \phi_L | H | \phi_L \rangle + \langle \phi_R | H | \phi_R \rangle) \pm \frac{1}{2} (\langle \phi_L | H | \phi_R \rangle + \langle \phi_R | H | \phi_L \rangle)$$

$$\sim E_1 \pm \underbrace{E_1 \langle \phi_L | \phi_R \rangle}$$

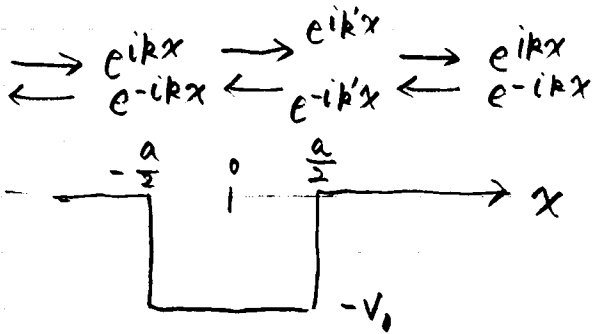


トンネル分離 (ダブレット)

(note) He^+ イオン



3.6. 有限井戸型ポテンシャル (連続状態: $E > 0$)



$$\phi(x) = \begin{cases} A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ B_+ e^{ik'x} + B_- e^{-ik'x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)}$$

* 1Dポテンシャルの固有状態と異なる解も存在するが、ここでは一般的に書く。

* 束縛状態: 遠方では $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ のどちらかのみゼロ \rightarrow エネルギーは離散化

散乱状態: $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ のどちらも存在 \rightarrow エネルギーも解がある (連続状態)

$x = -\frac{a}{2}$ での波動関数の接続

$$\begin{cases} \phi_>(-\frac{a}{2}) = \phi_<(-\frac{a}{2}) \\ \phi'_>(-\frac{a}{2}) = \phi'_<(-\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{2kk' e^{-ika}}{2kk' \cos k'a - i(k^2 + k'^2) \sin k'a}$$

$$R = \frac{-i(k^2 - k'^2) e^{-ika} \sin k'a}{2kk' \cos k'a - i(k^2 + k'^2) \sin k'a}$$

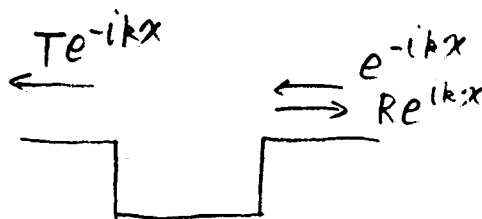
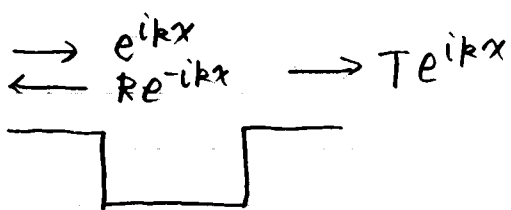
$\chi = \frac{a}{2}$ の接続条件

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = S > \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

両者を合わせると

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S < S > \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

物理的に興味がある解:



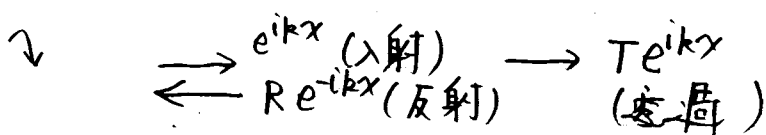
左から入射した波: ϕ_L

右から入射した波: ϕ_R

*ポテンシャルがパリティ対称なら、 R と T は ϕ_L と ϕ_R で同じ

フラックス: $j(x) = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^*(x) \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right)$

$\psi(x) = e^{\pm ikx}$ に対して $j = \pm \frac{\hbar k}{m}$



T: 透過係数
R: 反射係数



フラックスの保存:
 $1 = |T|^2 + |R|^2$

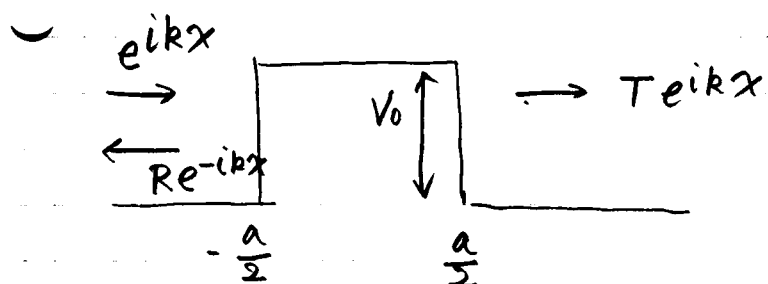
cf. 量子反射

井戸型ポテンシャルでは解析的に求まる

に等しい

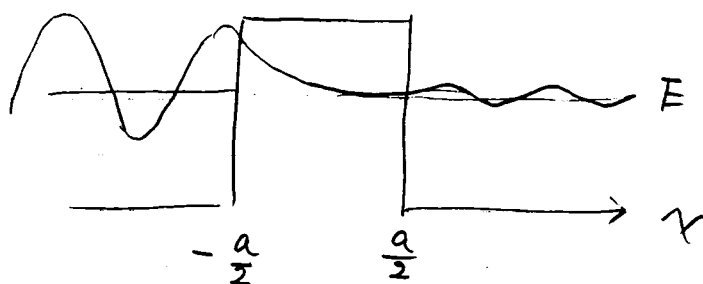
$$1 = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| + \int_0^\infty dE |\phi_{E,L}\rangle \langle \phi_{E,L}| + \int_0^\infty dE |\phi_{E,R}\rangle \langle \phi_{E,R}|$$

3.7. ボーテ=シアル障壁と量子トンネル現象



$E < V_0$ のとき $T \neq 0 \Rightarrow$ 「量子トンネル現象」

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ T e^{ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$



$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

$$T = \frac{2k\kappa e^{-i\kappa a}}{2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2) \sinh(\kappa a)}$$

トネル確率 : $P(E) = \frac{J_{out}}{J_{in}} = |T|^2$

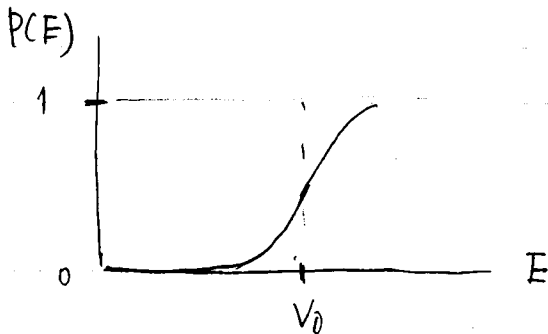
(note) $V_0 \gg E$ のとき

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ll K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

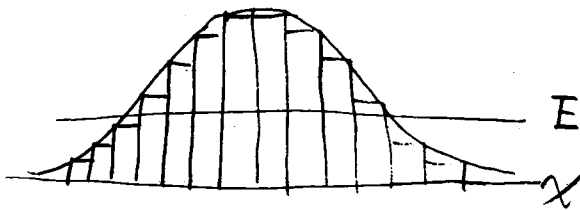
↓

$$|T|^2 \sim \frac{4k^2 K^2}{K^4 \cdot \left(\frac{e^{Ka}}{2}\right)^2} = \frac{16k^2}{K^2} e^{-2Ka}$$

指数関数



一般の障壁の場合 :

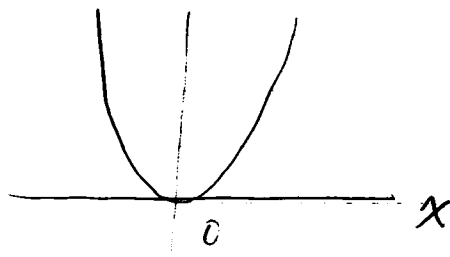


$$P(E) \sim \pi e^{-2\kappa_0 a} \sim e^{-2 \int_{\text{障壁}} dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)}}$$

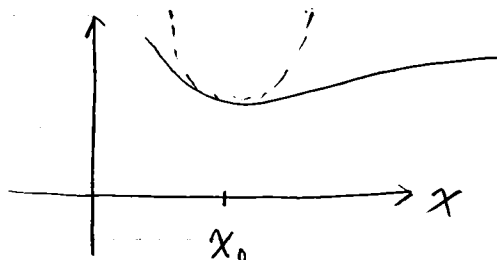
* より詳しくは議論は WKB 近似の項に.

3.8. 調和振動子ポテンシャル

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



(note)



$$V(x) \sim V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) (x-x_0)^2 + \dots$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \phi(x) = E \phi(x)$$

• $x \rightarrow \pm\infty$ での解の様子:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \phi(x) \sim 0$$

$$\text{解: } \phi(x) \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\phi'(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\phi''(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\sim \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

∴ $\phi(x) = f(x) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$ とおくと $f(x)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ で有限.

$$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} f'' + \hbar\omega x f' = \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) f$$

or $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$

$$\rightarrow f'' - 2y f' + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) f(y) = 0$$

(note) エルミート多項式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n\right) H_n(x) = 0$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{m,n}$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

⋮

$$\rightarrow f(y) = H_n(y) \quad ; \quad \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n$$

$$\rightarrow E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

規格化まで含めると

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

