四 レイリー・ジーンズの式（もう一度）

電磁波 $\longleftrightarrow$ ばねの振動

長さLに閉じこめられた一次元のばね

・ばね1個につきエネルギー $k_B T$
（エネルギー等分配の式）

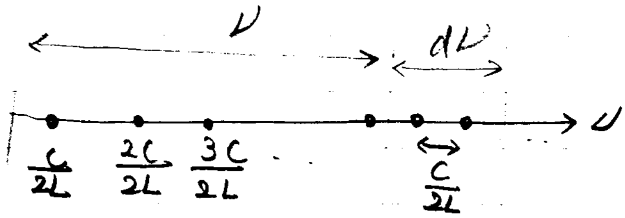
固有振動

・・・・ など

$\rightarrow \quad \lambda = \dfrac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$\rightarrow \quad \nu = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{nc}{2L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

振動数νと$\nu + d\nu$のあいだの固有振動の数

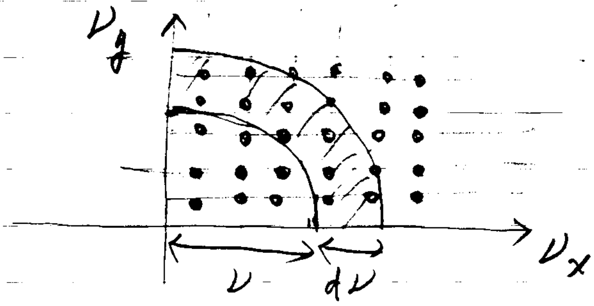


$$= Z(\nu)\,d\nu = \frac{d\nu}{\left(\frac{c}{2L}\right)} = \frac{2L}{c}\,d\nu \quad \longleftrightarrow \quad d\nu = \frac{c}{2L}\,dn$$

$h\nu = [E]$

$hc = [EL]$

・2次元の場合

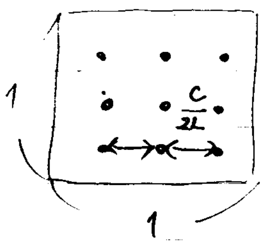


$\nu = \sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2}$ として

$\nu \sim \nu+d\nu$ のあいだにある固有振動の数

$\rightarrow$ 面積 $= 2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4}$

単位面積を考えると



x 方向に $1/\left(\frac{c}{2L}\right) = \frac{2L}{c}$ 個

y : $\frac{2L}{c}$ 個

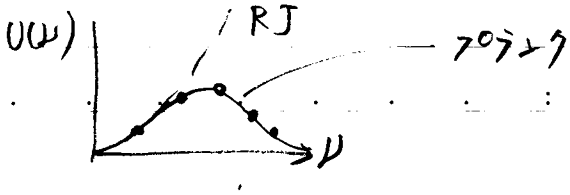
$\rightarrow \left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個の点,

$\therefore$ $Z(\nu)d\nu = 2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個の点,

・3次元の場合

$$Z(\nu)d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu \times \frac{1}{8} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{偏極}}}{2} \times \left(\frac{2L}{c}\right)^3 = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

$\therefore$ $U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T d\nu$



$$U(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{h}{e^{h\nu/k_BT}-1} \nu^3 d\nu$$

$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J・S

$$S = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} S$$

Ⅳ エネルギー量子の発見

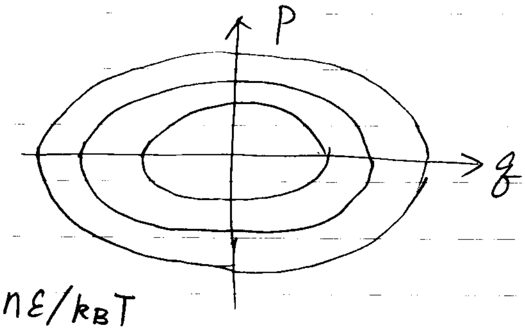
プランク：プランクの式が得られるための条件を考えた。

ばねのエネルギー $\quad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \equiv ap^2 + bq^2$

$$\rightarrow \langle E \rangle = n \int dq\,dp\,(ap^2 + bq^2)\, e^{-E/k_B T}$$

$$n = \left[\int dq\,dp\; e^{-E/k_B T} \right]^{-1}$$

プランク： $\boxed{E = ap^2 + bq^2 = n\varepsilon \quad (n = 0, 1, 2 \cdots) \text{ のみをとる}}$



$$\rightarrow \quad \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\, e^{-n\varepsilon/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_B T}}$$

(note) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_B T} = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}} + \cdots$

$$= \frac{e^{\varepsilon/k_B T}}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\, e^{-n\varepsilon/k_B T} = -\frac{\partial}{\partial(1/k_B T)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_B T}$$

$$= \frac{\varepsilon\, e^{\varepsilon/k_B T}}{[e^{\varepsilon/k_B T} - 1]^2}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1}$$

$\varepsilon = h\nu$ とすると

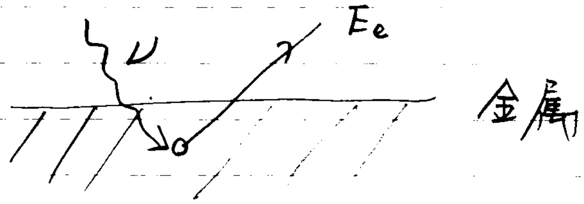
$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

電磁波のエネルギー：$h\nu$ の整数倍のみ

「エネルギー量子」

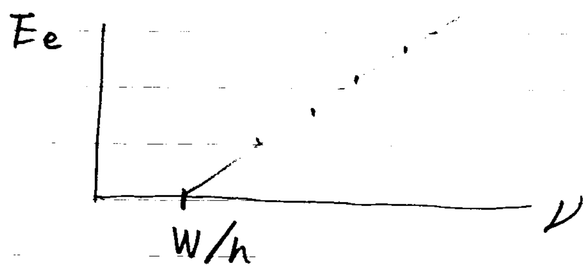
↳ 電磁波が粒子のように振るまう

1.3 光電効果と光量子仮説

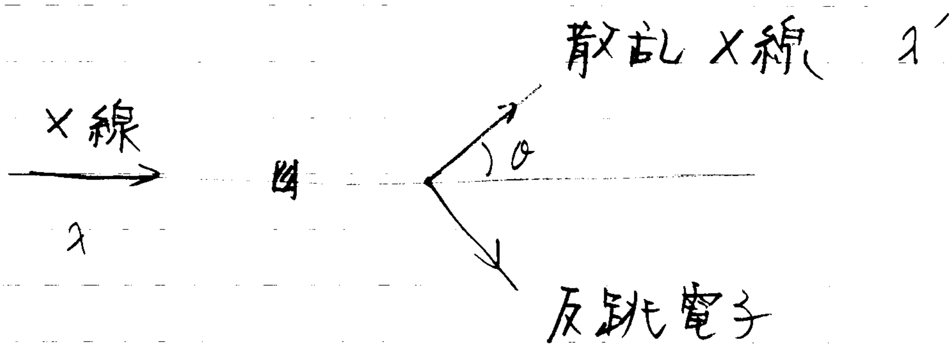


$E_e = h\nu - W$ （アインシュタイン光量子仮説）

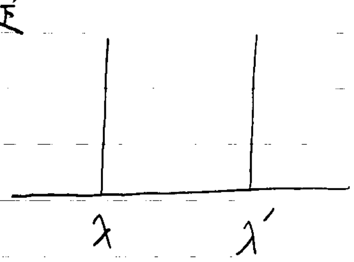
ミリカンの実験



・コンプトン効果



θ：一定



X線の「粒子」と電子の2体散乱を仮定すると
実験データをきれいに説明

1.4. ボーアの原子模型

エネルギーの離散性 → 原子でも

バルマーの公式（原子のスペクトル線に成り立つ式）

$$\frac{1}{\lambda} = R_y\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$ （n_1, n_2 は自然数）

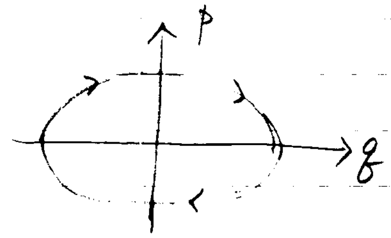
↪ 原子のエネルギーが $\frac{1}{n^2}$ に比例することを示唆。

ボーアの原子模型

i) 原子は離散的なエネルギーを持つ状態のみ。
「定常状態」。2つの定常状態間をジャンプするときにのみ光を放出・吸収する。

ii) $h\nu = E' - E''$

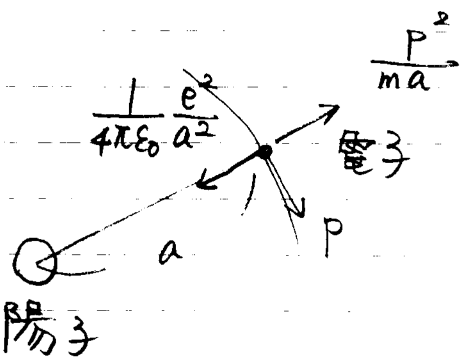
iii) 電子は古典的な運動のうち



$$\oint p\,dq = nh \quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たす状態のみが許される。

「ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件」



$$\begin{cases} 2\pi a \cdot p = nh & (\text{量子化条件}) \\ \dfrac{p^2}{ma} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} & (\text{古典的な運動方程式}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{ma}\cdot\frac{n^2h^2}{4\pi^2\cancel{a^2}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\cancel{a^2}}$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} \equiv E_n$$

すなわち $E_n \propto \frac{1}{n^2}$

原子の安定性：最低エネルギー状態（$n=1$）が存在。
「基底状態」
これ以下にエネルギーがなることはない。