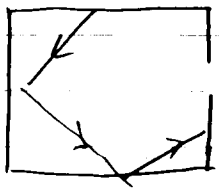
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

No.

1.2. 真空の比熱とエネルギー量子の発見

温度 T の真空 → 様々な波長の電磁波が存在
cf. 3度K輻射 (WMAP)



空洞放射

小孔から空洞に入った電磁波は外に出ない → 「黒体」
黒体放射

小孔から空洞内の色を観測したときに温度 T がわかるか?

cf. 18世紀後半 産業革命
→ 鉄を精錬する溶鉱炉の温度を知りたい

- 温度 T を与えたとき振動数 ν の分布はどうなるか?

(比熱との関連で) エネルギーの分布はどうなるか?

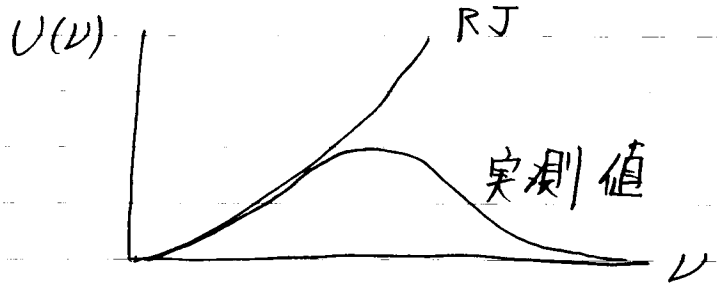
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

No.

a) レイリー・ジーンズの式（RJの式）；古典論

単位体積あたり，ν と $\nu+d\nu$ のあいだの振動数を持つ光のエネルギー

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T\, d\nu \qquad (\text{RJの式})$$



- ν が小さいときには実測値をよく再現
- 全エネルギー：$E = \int_0^\infty d\nu\, U(\nu) \propto \int_0^\infty \nu^2 d\nu$ → 発散

比熱　$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \infty$

→ 温度を1度上げるために無限の熱が必要

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

四 レイリー・ジーンズの式の導出

電磁波 ⟷ ばねの振動

長さ L に閉じこめられた一次元のばね

・ばね1個につき エネルギー k_BT
（エネルギー等分配の式）

{ 運動 $E \to \frac{1}{2}k_BT$
ポテンシャル $\to \frac{1}{2}k_BT$

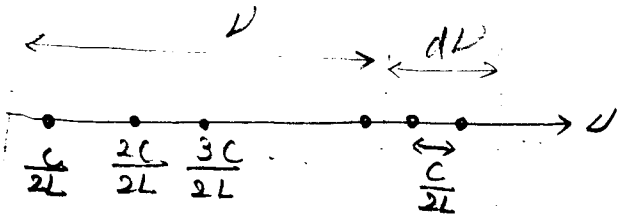
固有振動

…… など

$$\to \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\to \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

振動数 ν と $\nu + d\nu$ のあいだの固有振動の数



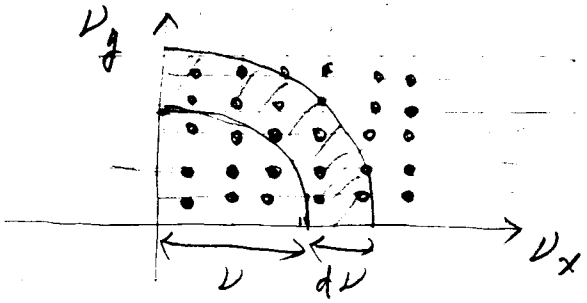
$$\equiv Z(\nu)\,d\nu = \frac{d\nu}{\left(\frac{c}{2L}\right)} = \frac{2L}{c}\,d\nu \qquad \leftrightarrow d\nu = \frac{c}{2L}\,dn$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

$h\nu = [E]$
$hc = [EL]$

No.

・2次元の場合

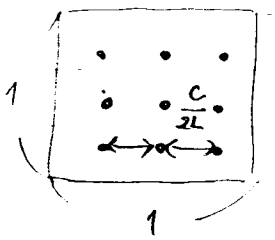


$\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ として

$\nu \sim \nu + d\nu$ のあいだにある
固有振動の数

→ 面積 = $2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4}$

単位面積を考えると



x 方向に $1/(\frac{c}{2L}) = \frac{2L}{c}$ 個
y 〃 $\frac{2L}{c}$ 個

→ $\left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個の点,

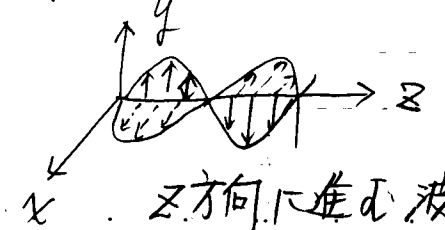
↓ $Z(\nu)d\nu = 2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個の点,

・3次元の場合

$$Z(\nu)d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu \times \frac{1}{8} \times 2 \times \left(\frac{2L}{c}\right)^3 = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

↑ 偏極

↓ $U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu$



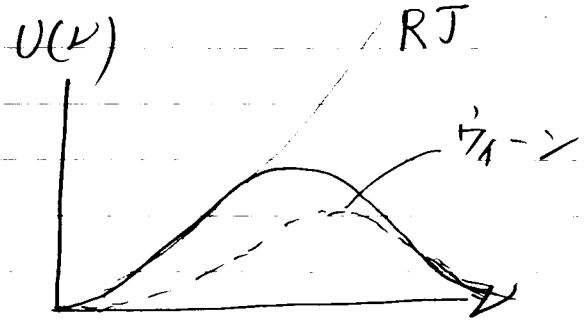
z方向に進む波
2種類 { x方向への振動
y方向 〃

b) ウィーンの式

$$U_{RJ}(\nu) = \frac{8\pi^2}{c^3}\nu^2 k_B T = \frac{8\pi^2}{c^3}\nu^3 \cdot \underbrace{\frac{k_B T}{\nu}}$$

↓

ウィーン: $k_B \beta e^{-\beta\nu/T}$



とおいた（仮定した）。βはパラメータ。
（導出は期末を見よ。）

c) プランクの式

RJとウィーンを結ぶ内挿公式を発見

$$U(\nu) = \frac{8\pi^2}{c^3}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{k_B}{x} & (RJ) \\ k_B \beta e^{-\beta x} & (ウィーン) \end{cases}$$

プランク: $F(x) = \dfrac{k_B \beta}{e^{\beta x} - 1}$

βは現象論的に決める

→ $h = k_B \beta = 6.63 \times 10^{-34}\ J \cdot S$ とすると
実験データとぴったり（プランク定数）

$x \ll 1$: $e^{\beta x} - 1 \sim 1 + \beta x - 1 = \beta x$

$\downarrow$ $F(x) = \frac{k_B}{\alpha} \leftrightarrow RT$

$x \gg 1$: $e^{\beta x} - 1 \sim e^{\beta x}$

$\downarrow$ $F(x) \sim k_B \beta e^{-\beta x} \leftrightarrow$ ウィーン

四 エネルギー量子の発見

プランク：プランクの式が得られるための条件を考えた。

◀ ばねのエネルギー $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$\rightarrow \langle E \rangle = n \int dx dp \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) e^{-E(x,p)/k_B T}$

$n = \left[\int dx dp \; e^{-E(x,p)/k_B T} \right]^{-1}$

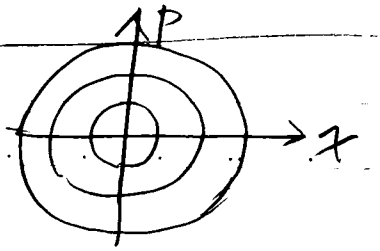
(note) ボルツマン因子 ：カノニカル分布 (T=一定)

ボルツマン分布 $P(E) = \frac{1}{Z} e^{-E/k_B T}$

$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i / k_B T}$

プランク： $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = n\varepsilon$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

のみをとる。



$$\rightarrow \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/k_BT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT}}$$

(note) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT} = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} + e^{-\frac{2\varepsilon}{k_BT}} + \cdots$

$$= \frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{e^{\varepsilon/k_BT} - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/k_BT} = -\frac{\partial}{\partial(1/k_BT)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT}$$

$$= \frac{\varepsilon e^{\varepsilon/k_BT}}{[e^{\varepsilon/k_BT} - 1]^2}$$

◀

$$\therefore \langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT} - 1}$$

$\varepsilon = h\nu$ とすると

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$$

電磁波のエネルギー：$h\nu$ の整数のみ

「エネルギー量子」

↳ 電磁波が粒子のように振るまう