§. エネルギー量子の発見

第2次産業革命：鉄鋼炉の色から温度を知りたい

↓

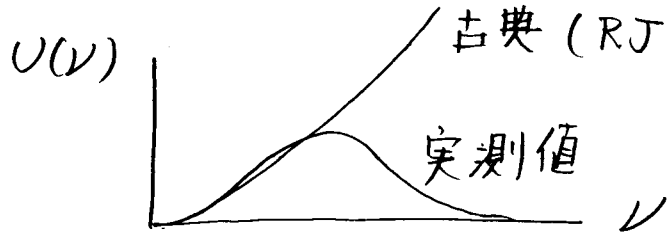
実際には鉄鋼炉からの光を見る

↓

様々な波長が混ざっている

Q：温度 T を与えたとき振動数 ν の分布（エネルギー分布）はどうなるのか？

単位体積あたり，ν と $\nu+d\nu$ の間の振動数を持つ光のエネルギー $U(\nu)d\nu$



(a) 古典論：レイリー・ジーンズ（RJ）の式

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T$$

- ν が小さいときには実測値をよく再現
- 全エネルギー：$E=\int_0^\infty U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}k_B T\int_0^\infty \nu^2 d\nu$ ↳ 発散

比熱 $C=\frac{\partial E}{\partial T}=\infty$ ：温度を1度上げるために無限の熱が必要

四 レイリー・ジーンズの式の導出

電磁波 ⟷ ばねの振動

ばね 1個につき エネルギー k_BT (エネルギー等分配則)

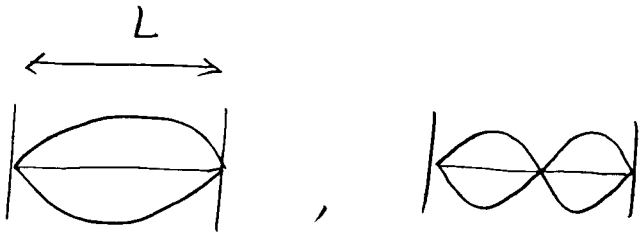
{ 運動エネルギー → $\frac{1}{2}k_BT$
{ ポテンシャル → $\frac{1}{2}k_BT$

↓

$U(\nu)d\nu$
= $(\nu, \nu+d\nu)$ の中に ばねが何個あるか数え,
k_BT 倍する　　単位体積あたり

・1次元

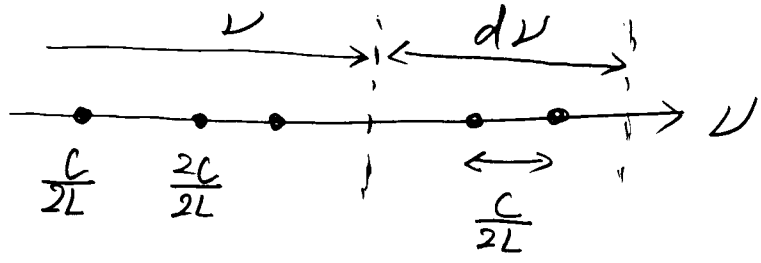
固有振動



, , など

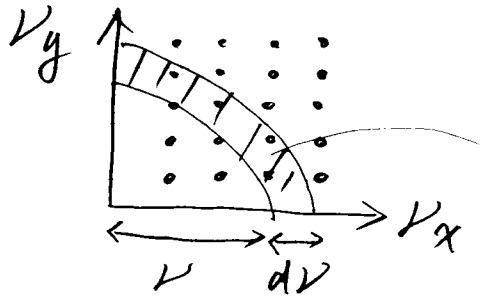
→ $\lambda = \frac{2L}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$

→ $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L}$ $(n=1, 2, \cdots)$



$$Z(\nu)d\nu = \frac{d\nu}{\left(\frac{c}{2L}\right)} = \frac{2L}{c}d\nu$$

・2次元

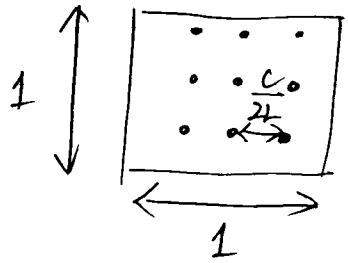


$\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ とし

$(\nu, \nu + d\nu)$ の間にある個数

→ 面積 $= 2\pi\nu d\nu \times \frac{1}{4}$

単位面積



x方向に $\frac{1}{\left(\frac{c}{2L}\right)} = \frac{2L}{c}$ 個

y方向に $\frac{2L}{c}$ 個

$\rightarrow \left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個

↓

$Z(\nu)d\nu = 2\pi\nu d\nu \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2L}{c}\right)^2$ 個の点

・3次元

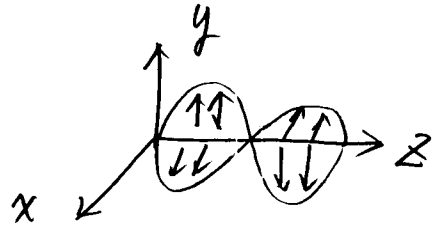
$$Z(\nu)d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2L}{c}\right)^3 = \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

↓

$$U(\nu)d\nu = \frac{Z(\nu)d\nu}{V} \times 2 \times k_B T$$

↑ 偏極

$$= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu$$



z方向に進む波

{ x方向への振動
  y 〃

の2種類

b) プランクの式

$$U_{RJ}(\nu) = \frac{8\pi^2}{c^3}\nu^2 k_B T = \frac{8\pi^2}{c^3}\nu^3 \cdot \frac{k_B T}{\nu}$$

↓ プランク

$$\frac{k_B \beta}{e^{\beta\nu/T} - 1}$$ にした。

(βは現象的に決めるパラメータ)

$T \to \infty$ のとき $\frac{k_B \beta}{e^{\beta\nu/T} - 1} \sim \frac{k_B \beta}{1 + \frac{\beta\nu}{T} - 1} = \frac{k_B T}{\nu}$

(R-J)

→ $h \equiv k_B \beta = 6.63 \times 10^{-34}$ J·S とすると
実験データとぴったり (プランク定数)

② エネルギー量子の発見

プランク：プランクの式が得られるための条件を考えた。

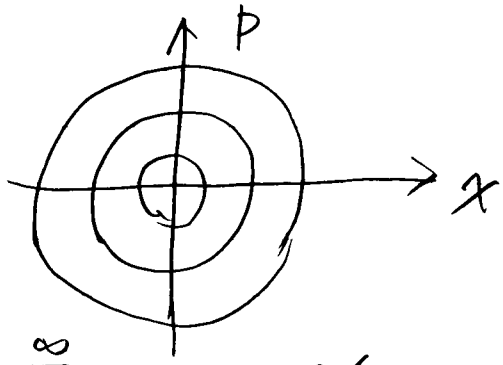
(note) 統計力学 ：カノニカル分布 (T=一定)

ボルツマン分布 $P(E) = \frac{1}{Z} e^{-E/k_B T}$

$$Z = \sum_i e^{-E_i/k_B T}$$

プランク： $E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=n\varepsilon \quad (n=0,1,2,\cdots)$

のみをとる。



$$\rightarrow \langle E\rangle=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/k_BT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT}}$$

(note) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT} \equiv S = 1+e^{-\varepsilon/k_BT}+e^{-2\varepsilon/k_BT}+\cdots$

$$= 1+e^{-\varepsilon/k_BT}(1+e^{-\varepsilon/k_BT}+\cdots)$$

$$= 1+e^{-\varepsilon/k_BT}\cdot S$$

$$\downarrow \quad S=\frac{1}{1-e^{-\varepsilon/k_BT}}=\frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{e^{\varepsilon/k_BT}-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/k_BT} = -\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{k_BT}\right)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT}$$

$$=\frac{\varepsilon e^{-\varepsilon/k_BT}}{[1-e^{-\varepsilon/k_BT}]^2}=\frac{\varepsilon e^{\varepsilon/k_BT}}{[e^{\varepsilon/k_BT}-1]^2}$$

↓

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1}$$

$\varepsilon = h\nu$ とすると

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

電磁波のエネルギー：$h\nu$ の整数のみ

「エネルギー量子」

↳ 電磁波が粒子のように振る舞う.

§. ボーアの原子模型

ラザフォード散乱：原子＝原子核＋電子

困難：荷電粒子が加速度運動すると電磁波を放出してエネルギーを失う。

$r = 1\text{Å} = 10^{-10}\,m = 0.1\,nm$ だと

$t \sim 10^{-10}$ 秒 くらいで半径がゼロになる。

原子のスペクトル線：$\frac{1}{\lambda} = R_y\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$

(n_1, n_2 は自然数)

→ 原子のエネルギーが $\frac{1}{n^2}$ に比例し離散的になっていることを示唆

ボーアの原子模型

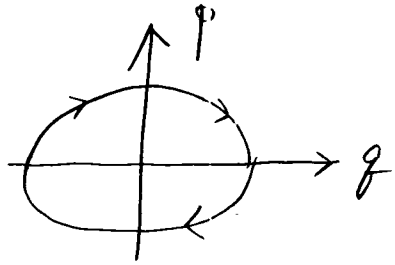
i) 原子は離散的なエネルギーを持つ状態のみ。「定常状態」。

ii) 2つの定常状態間をジャンプ → 光を放出，吸収

$h\nu = E - E'$

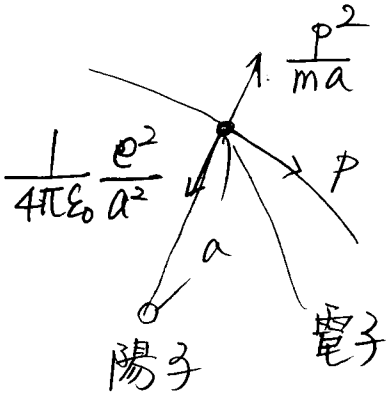
iii) 電子は古典的な運動のうち

$$\oint p\,dq = n\hbar \quad (n = 1, 2, \cdots)$$



を満たす状態のみが許される。

「ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件」



$$\begin{cases} 2\pi a p = nh \quad (\text{量子化条件}) \\ \dfrac{p^2}{ma} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{a^2} \quad (\text{古典的な運動方程式}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{ma}\left(\frac{nh}{2\pi a}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{a^2}$$

$$\rightarrow a = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi m e^2}{\varepsilon_0 h^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

原子の安定性：最低エネルギー状態 ($n=1$) が存在。

「基底状態」

これ以下にエネルギーがなることはない。