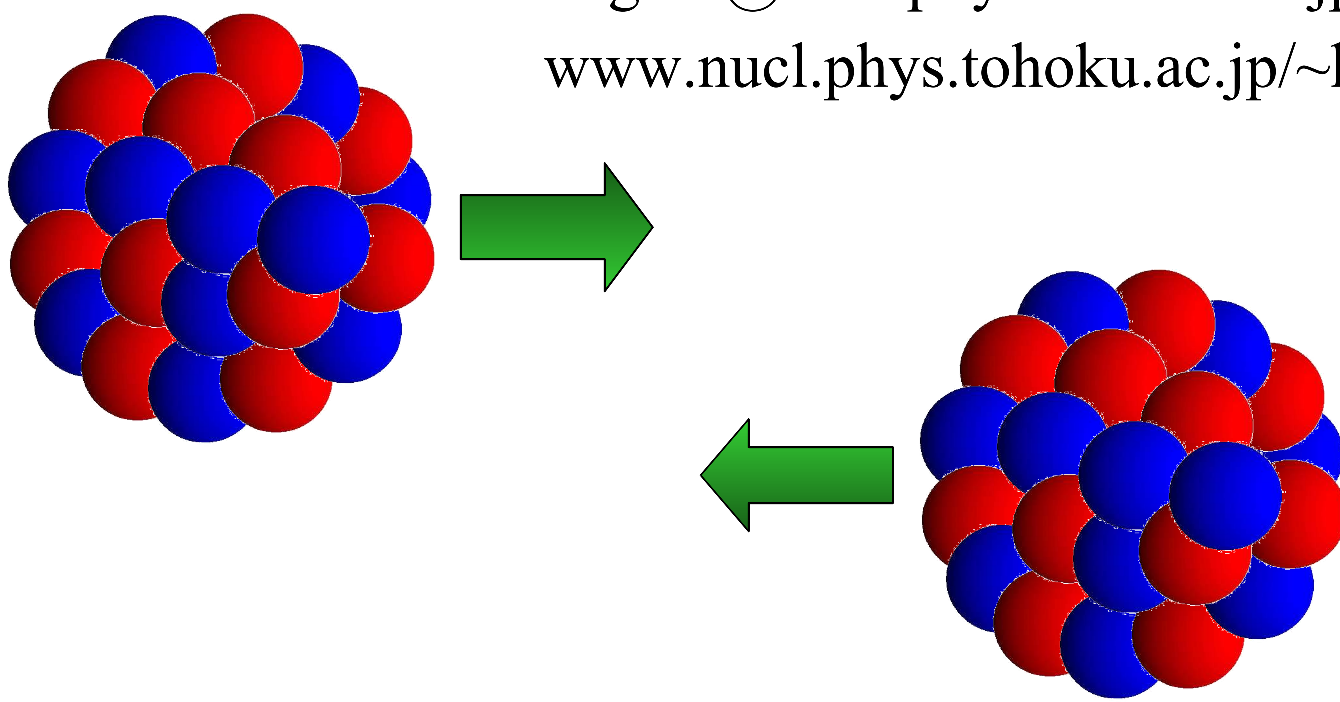
低エネルギー重イオン反応における量子多体ダイナミックス

東北大学　　萩野浩一

TOHOKU UNIVERSITY

hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp

www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino



講義の内容（予定）

1. 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習
2. 重イオン反応の概観
3. 核融合反応に対する古典模型
4. 核融合反応と量子トンネル効果
5. ポテンシャル模型：成功と失敗
6. 原子核の低励起集団運動
7. 反応への影響：結合チャンネル方程式
8. *Sub-barrier Fusion* と障壁分布法
9. 量子反射と重イオン準弾性散乱

参考図書・参考文献

核反応一般

- 市村宗武、坂田文彦、松柳研一 「原子核の理論」（岩波講座・現代の物理学）
- 河合光路、吉田思郎 「原子核反応論」（朝倉物理学大系）

- G.R. Satchler, "*Direct Nuclear Reactions*"
- G.R. Satchler, "*Introduction to Nuclear Reaction*"
- R.A. Broglia and A. Winther, "*Heavy-Ion Reactions*"
- "*Treatise on Heavy-Ion Science*", vol. 1-7
- D.M. Brink, "*Semi-classical method in nucleus-nucleus collisions*"
- P. Frobrich and R. Lipperheide, "*Theory of Nuclear Reactions*"

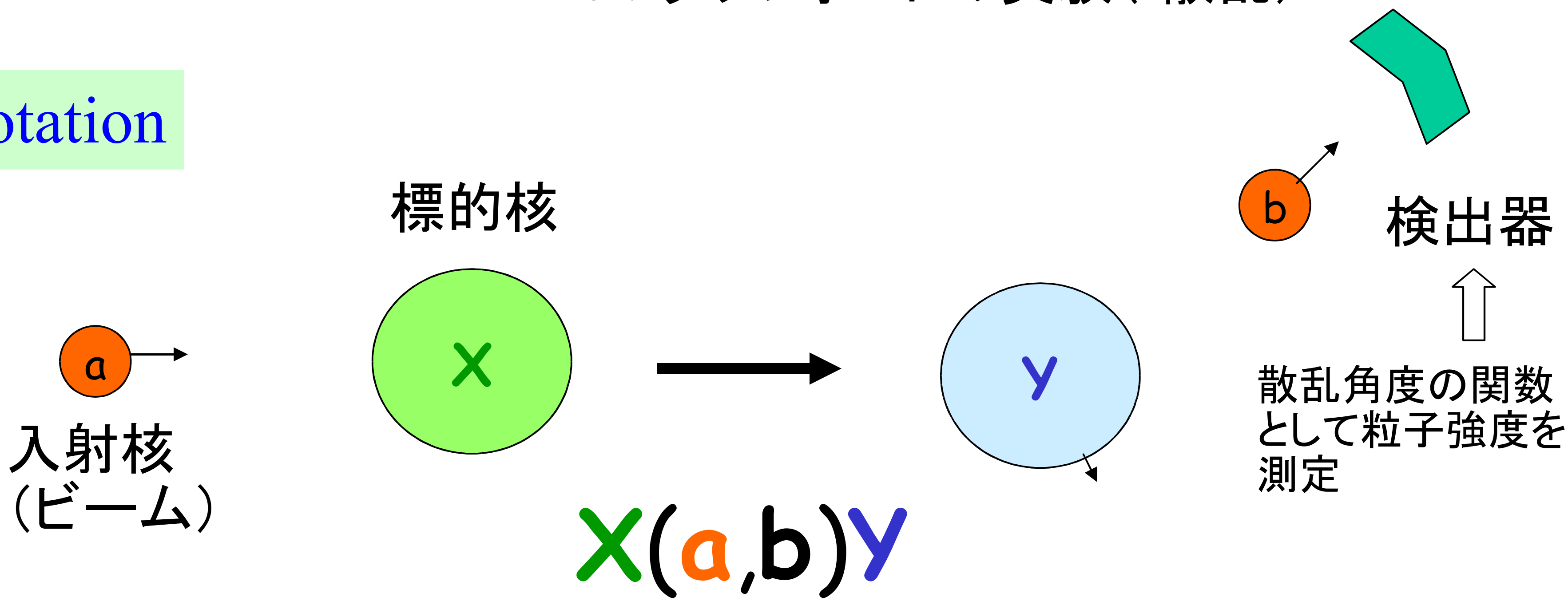
重イオン核融合反応に関するもの

- M. Dasgupta et al., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98) 401
- Proc. of Fusion03, Prog. Theo. Phys. Suppl. 154('04)
- Proc. of Fusion97, J. of Phys. G 23 ('97)
- 萩野浩一、滝川昇、日本物理学会誌 57（'02）588

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

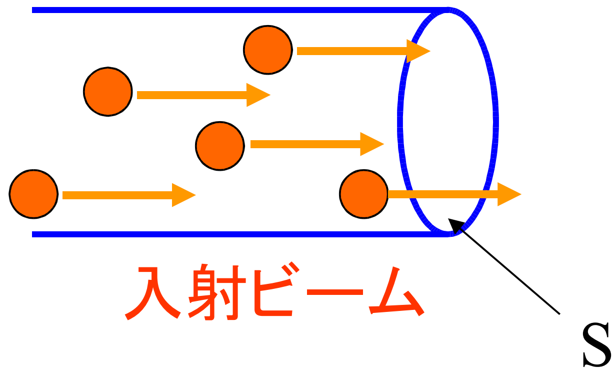
原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（散乱）

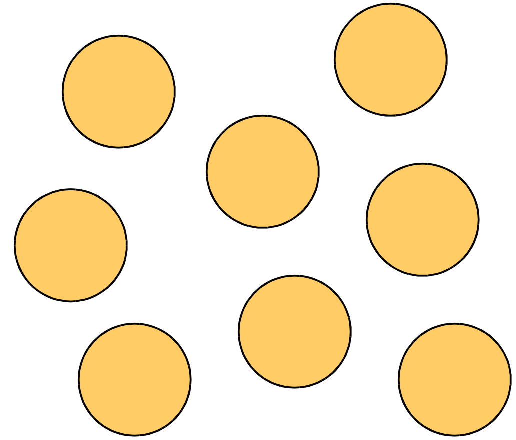
Notation



^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb　　：^{16}O+^{208}Pb 弾性散乱
^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb*　　：^{16}O+^{208}Pb 非弾性散乱
^{208}Pb(^{17}O,^{16}O)^{209}Pb　　：1中性子移行反応

散乱断面積



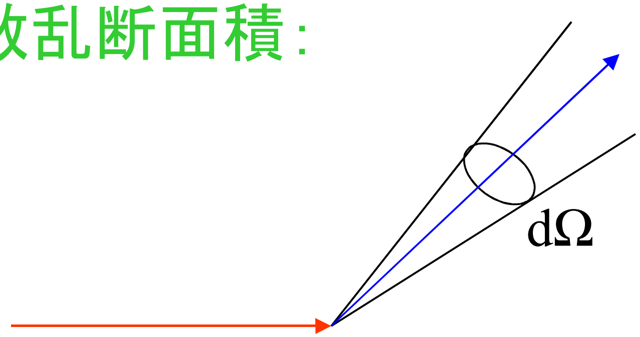


単位時間当たりに標的粒子1個に対する反応の起きる数	=	σ・単位時間当たり単位面積を通過する入射粒子の数

σ/S = ビーム中の入射粒子1個が標的1個と衝突した時に散乱の起こる確率

単位: 1 barn = 10^{-24} cm^2 = 100 fm^2 (1 mb = 10^{-3} b = 0.1 fm^2)

微分散乱断面積:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

散乱振幅

自由粒子の運動:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \\ &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

ポテンシャルがある場合:
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

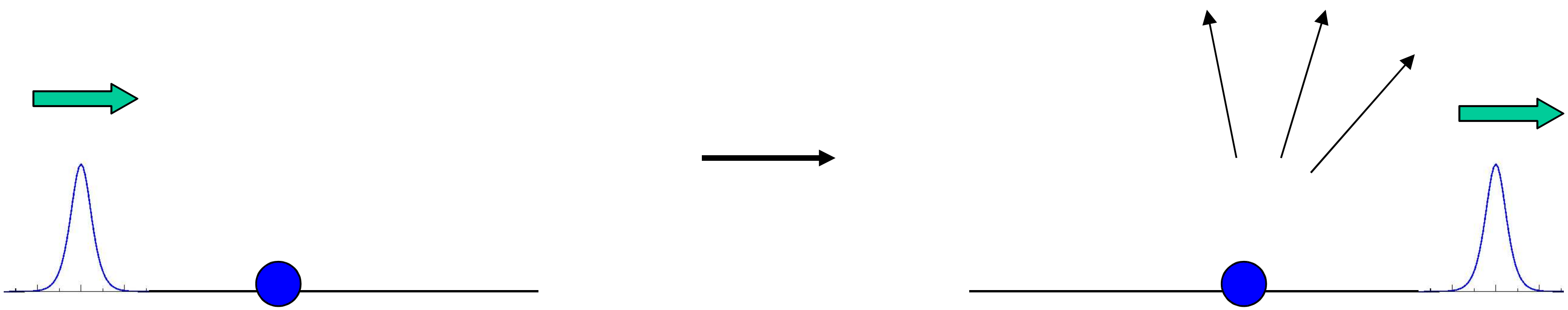
波動関数の漸近形

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta) \\ &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l(2l+1)\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)\ \text{（散乱振幅）}}\frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) \;\to\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\,\frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

＝（入射波）＋（散乱波）

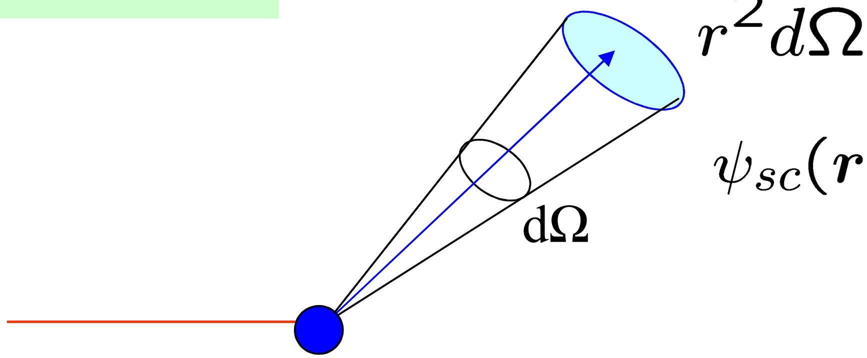


弾性散乱のみが起こる場合： $|S_l| = 1$ （フラックスの保存）

$$S_l = e^{2i\delta_l}$$

δ_l ：位相のずれ（phase shift）

微分散乱断面積



$$\psi_{sc}(\boldsymbol{r}) \sim f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

単位時間に立体角 dΩ に散乱される粒子の数:

$$N_{\mathsf{scatt}} = \boldsymbol{j}_{sc}\cdot\boldsymbol{e}_r\, r^2 d\Omega$$

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_{sc}^*\boldsymbol{\nabla}\psi_{sc} - c.c.\right] \sim \frac{k\hbar}{m}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

（散乱波に対するフラックス）

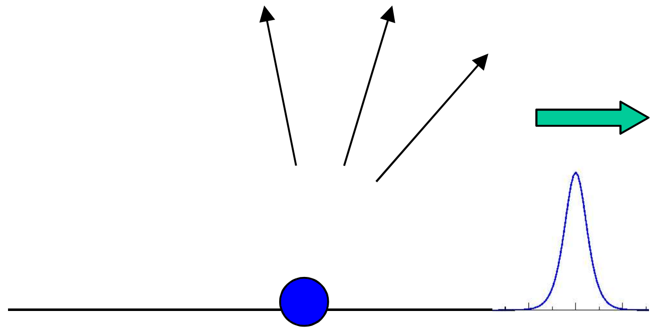
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik}P_l(\cos\theta)$$

光学ポテンシャルと吸収断面積

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

$$\boxed{V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)}$$

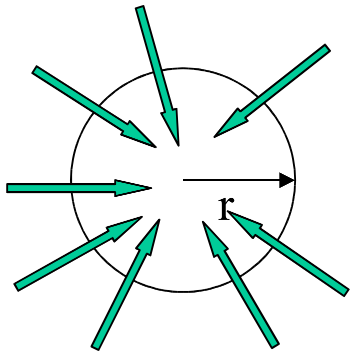
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \cdots = -\frac{2}{\hbar} W |\psi|^2$$

(note) ガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, dV$$

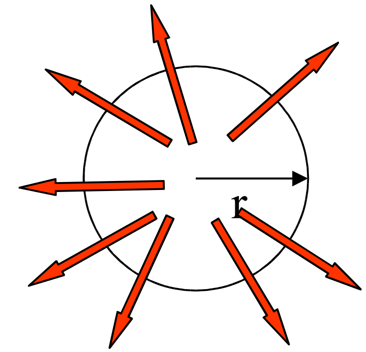
$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \frac{1}{r}\left[\underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}}\right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス:



$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|S_l|^2$$

減少したフラックス: $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)$

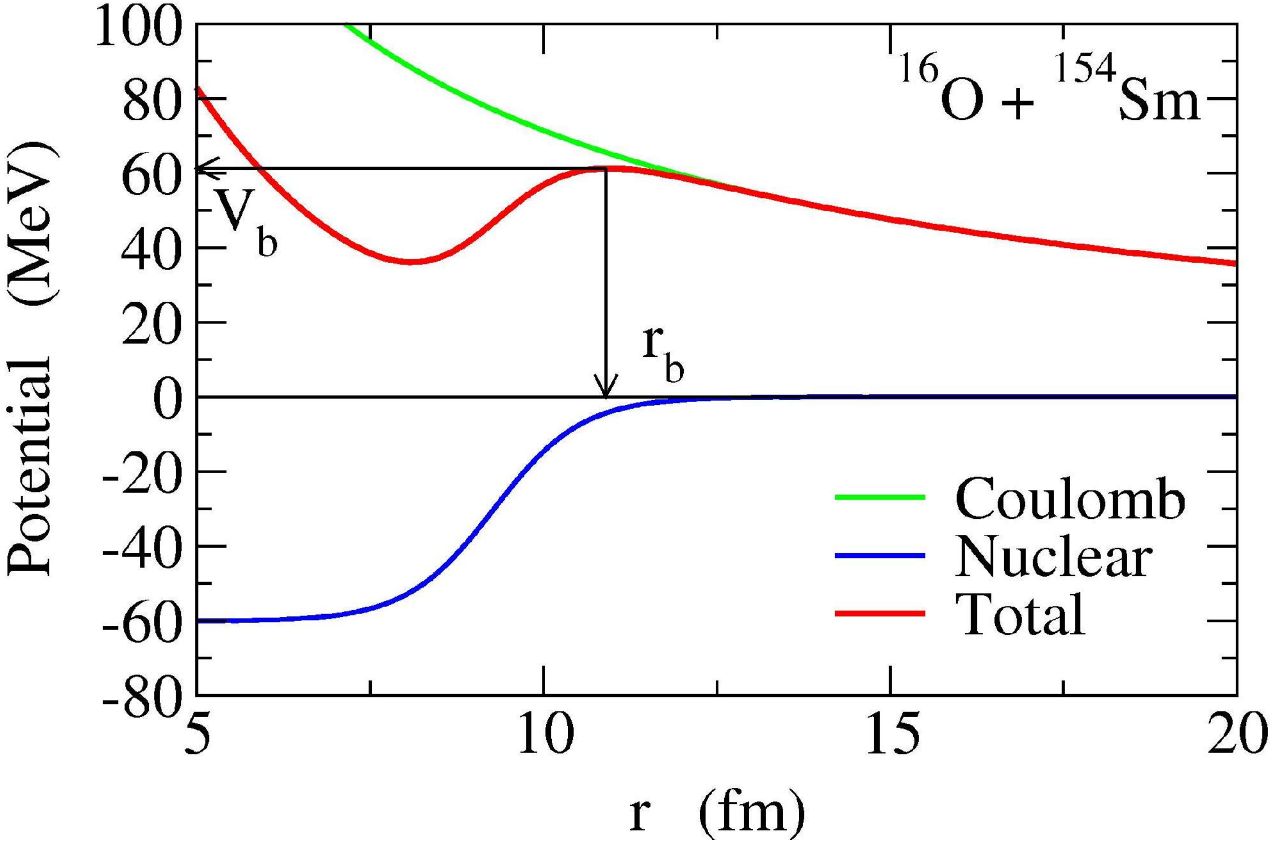
吸収断面積

$$\boxed{\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)}$$

重イオン反応の概観

重イオン：^{4}He より重い原子核

重イオン間ポテンシャル

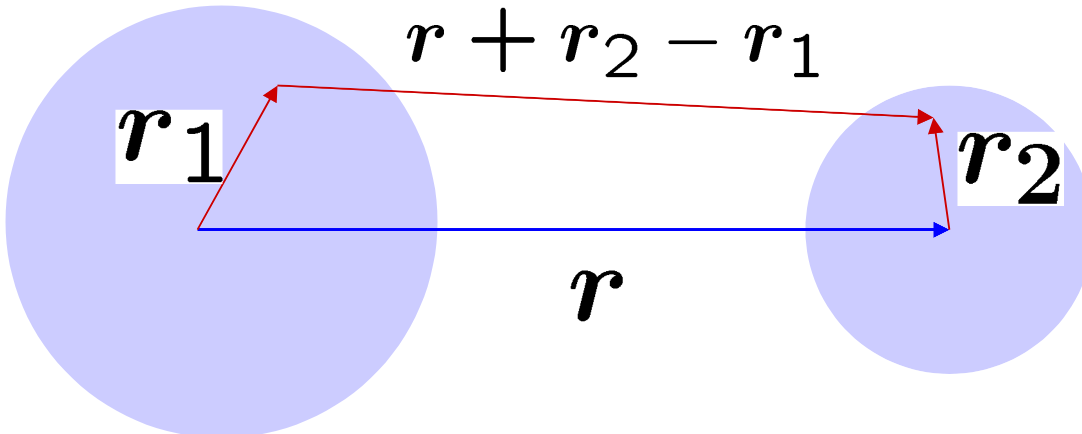


2つの力：

1. クーロン力
   長距離斥力
2. 核力
   短距離引力

両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成（クーロン障壁）

- 二重畳み込みポテンシャル (Double Folding Potential)



$$\boxed{\begin{aligned} V_{DF}(\boldsymbol{r}) \quad = \quad & \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \\ & \times v(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \end{aligned}}$$

v :核子間相互作用

- 現象論的ポテンシャル

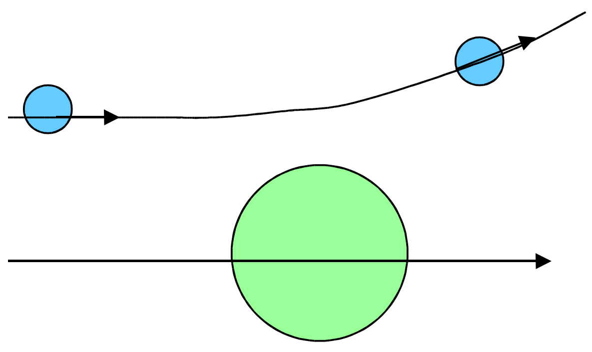
$$\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]}}$$

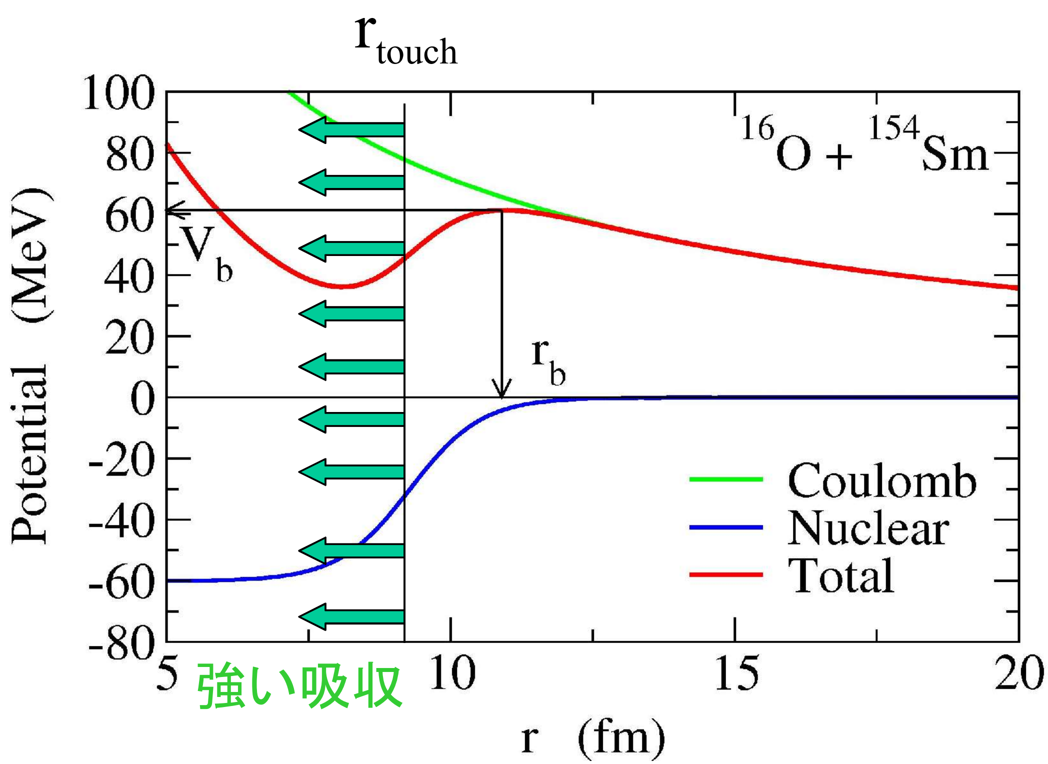
重イオン反応の3つの特徴

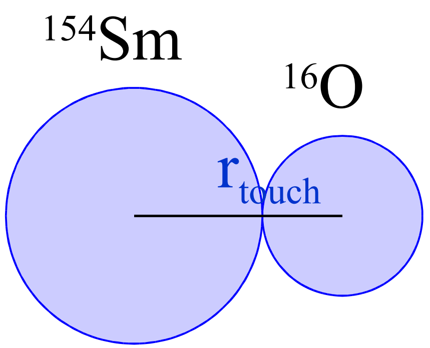
1. クーロン相互作用：重要
2. 換算質量 (reduced mass)：大きい → （半）古典的な描像 軌道の概念

$$\mu = m_T m_P/(m_T + m_P)$$

3. クーロン障壁内部での強い吸収



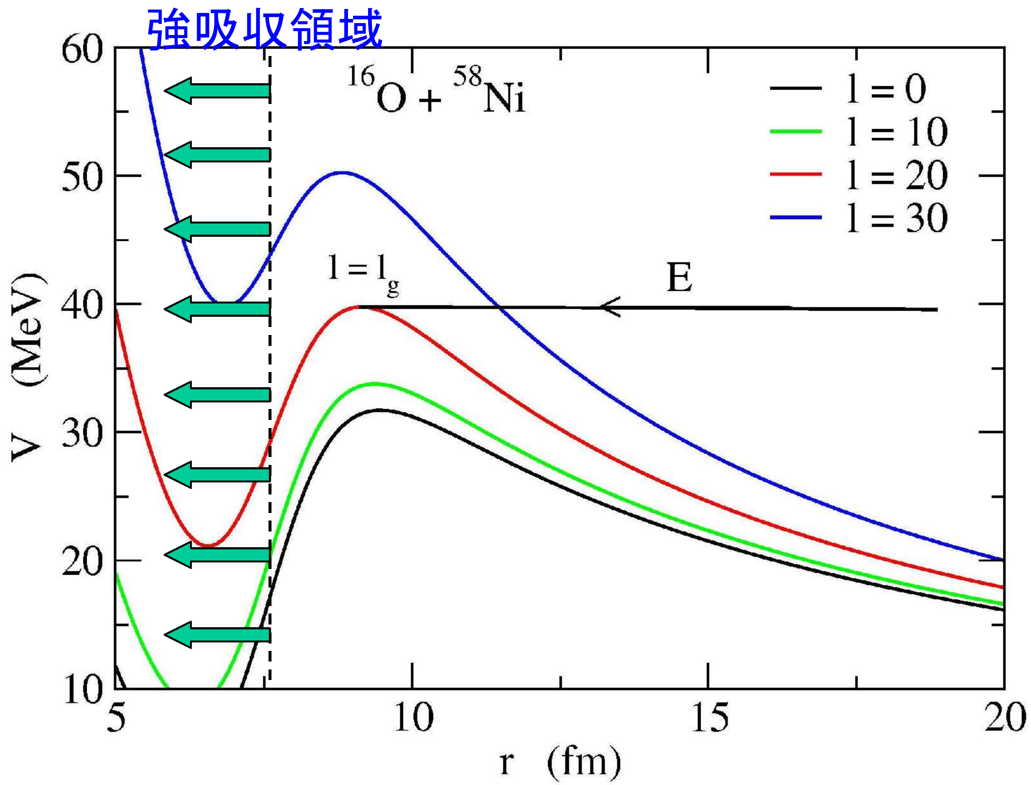




一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

擦り角運動量 (grazing angular momentum)

$$V_l(r) = V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$



Grazing 角運動量： $V_{l_g}(r_b) = E$

$l < l_g$ ：古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$ ：古典的には強吸収領域に到達できない

⇒ ある与えられた E に対し、反応は $l=l_g$ を境に急激に変化

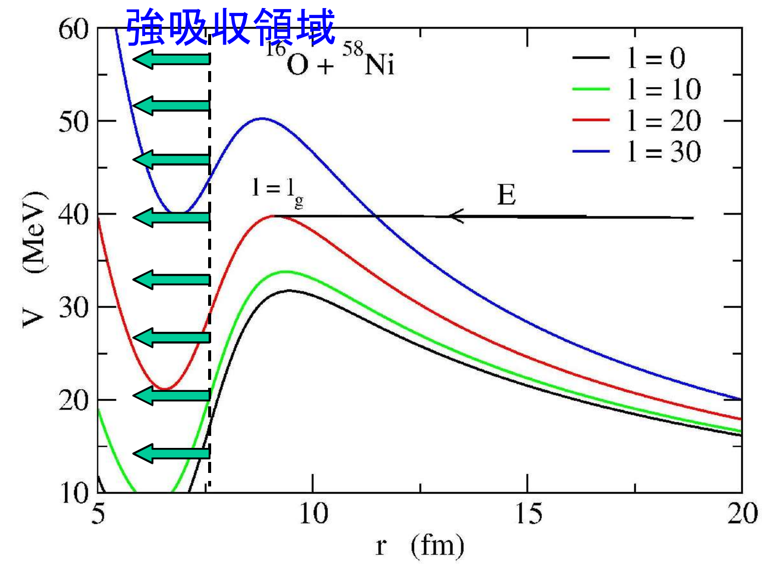
i) $l \gg l_g$ or $E \ll V_b$

古典的転回点：非常に遠方

•クーロン力による弾性散乱
(Rutherford 散乱)

•散乱核のクーロン場による励起
(クーロン励起)

低励起集団運動



$l < l_g$：古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$：古典的には強吸収領域に到達できない

ii) $l \gtrsim l_g$

核力の効果が重要になる

直接反応

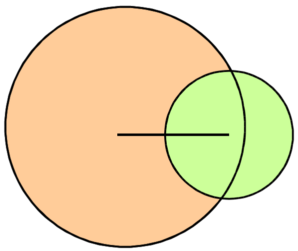
•弾性散乱
•非弾性散乱
•核子移行反応

準弾性散乱

多体系としてのダイナミックス

iii) $l < l_g$

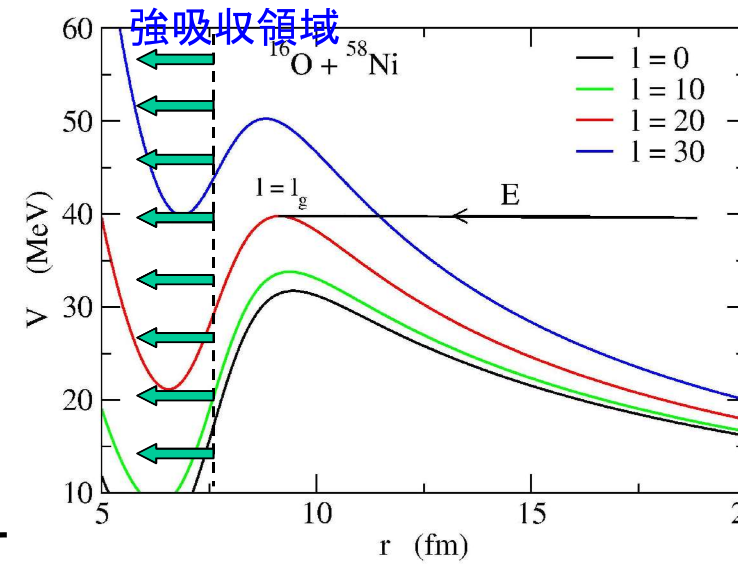
相対距離が小さく、従って密度の重なりが大きい領域に到達



- 高状態密度(複合系)
- 非常に多くの内部自由度

相対運動のエネルギーはすぐに失われ内部エネルギーに転化

熱い複合核の形成(核融合反応)



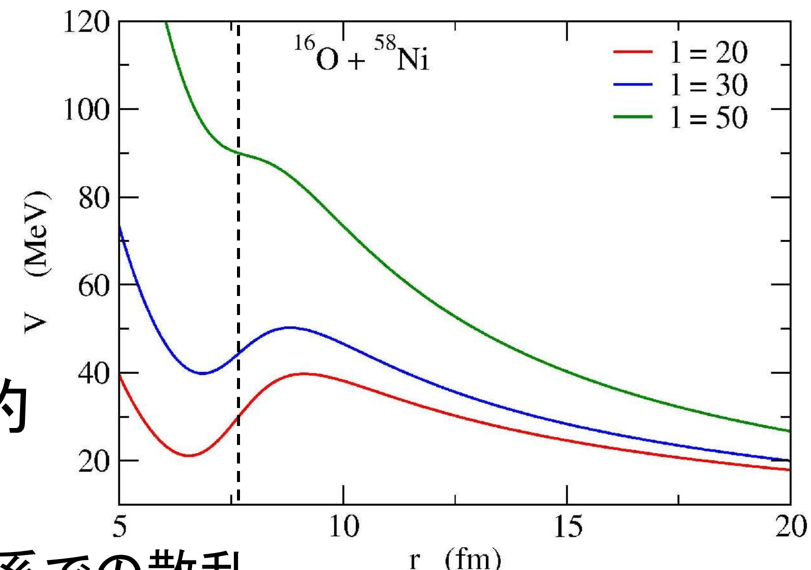
$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$: 古典的には強吸収領域に到達できない

iv) $l_c < l_g$ となる場合

$l = l_c$ でクーロン・ポケットが消失

⇨ 直接反応と核融合反応の中間的な反応 : 深部非弾性散乱 (DIC)



⇦ 比較的高エネルギーでの散乱や重い系での散乱

Partial decomposition of reaction cross section

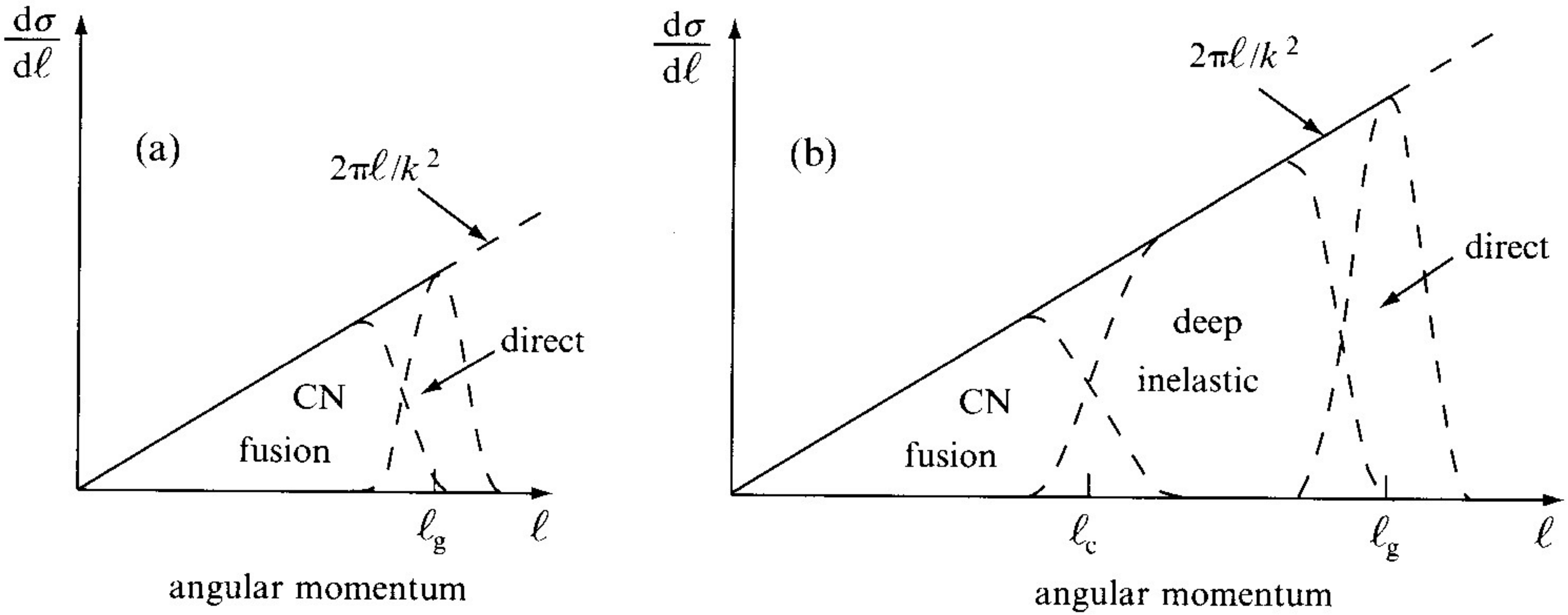
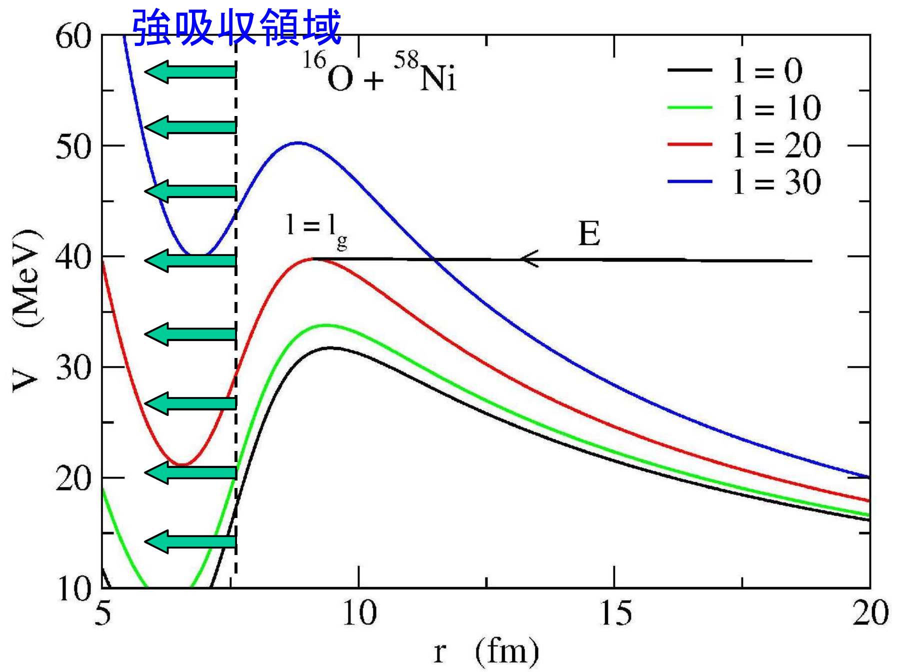


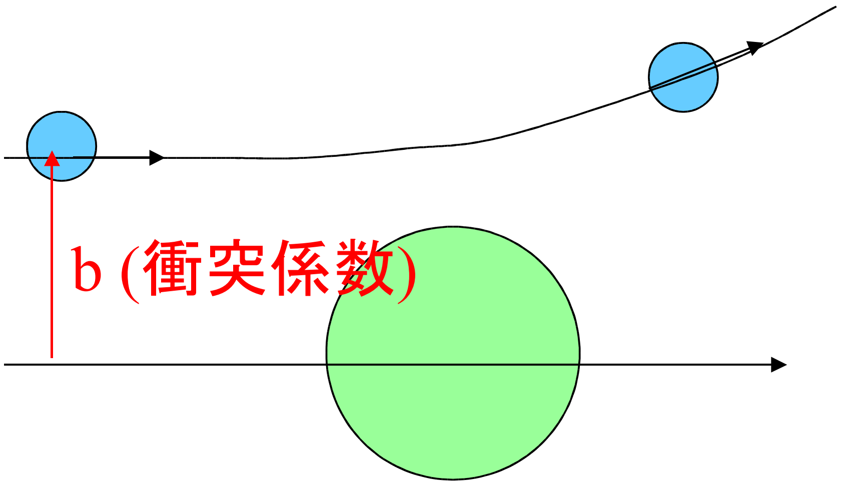
Figure 4.18 Schematic decomposition of the total heavy-ion reaction cross section into contributions from different partial waves when (a) the grazing angular momentum (quantum number ℓ_g) is below the critical angular momentum (quantum number ℓ_c) that can be carried by the compound nucleus, and (b) when ℓ_g exceeds ℓ_c. In both (a) and (b) the straight line is obtained from Equation (4.3) and the dashed areas indicate regions in which different types of heavy-ion nuclear reaction mechanisms predominate.

Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

核融合反応に対する古典的な模型



$l < l_g$:古典的に強吸収領域に到達



$$l_{cl} = kb \qquad k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$$

$$\Longrightarrow b_g = l_b/k$$

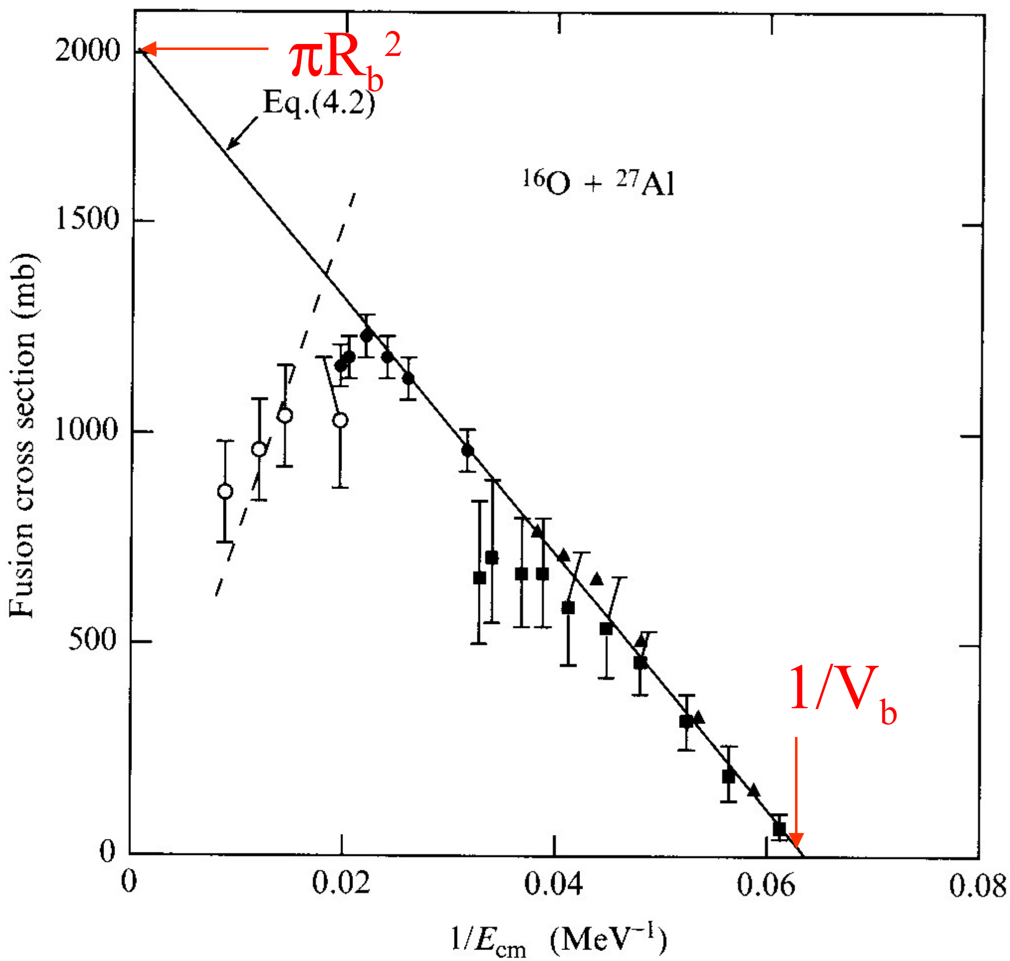
$$\sigma^{cl} = 2\pi \int_0^{b_g} b\, db = \pi\, b_g^2$$

$$V_b + \frac{(kb_g)^2\hbar^2}{2\mu R_b^2} = E$$

$$\sigma^{cl}_{\mathrm{fus}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$

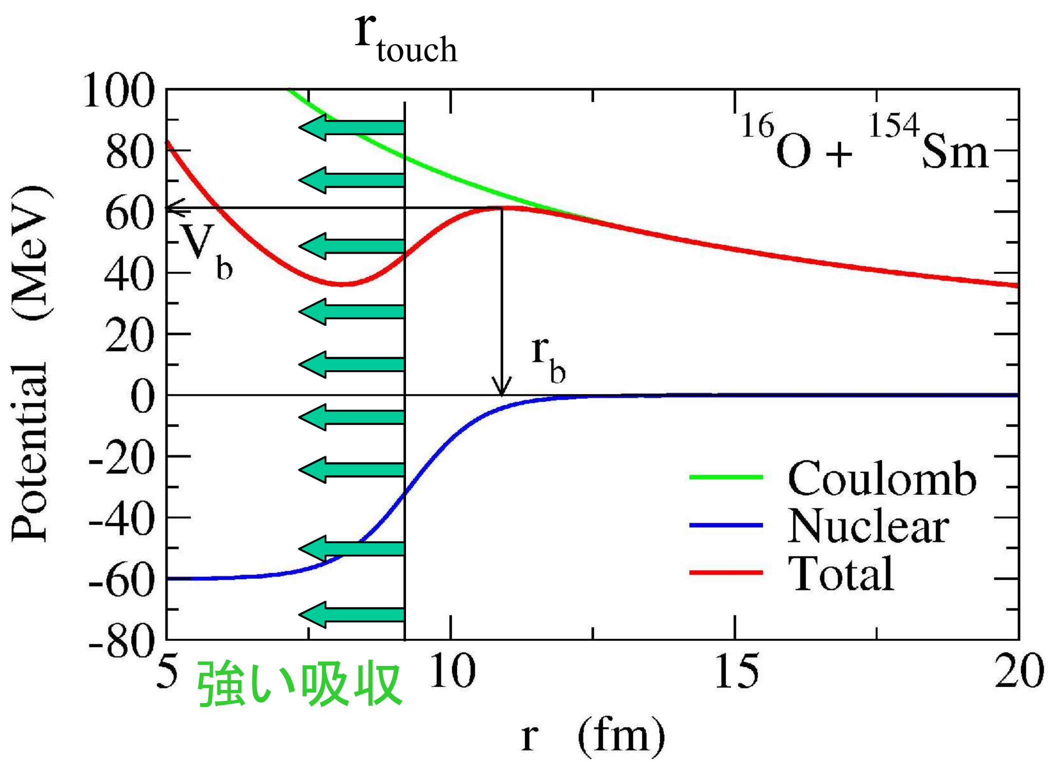
$$\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$

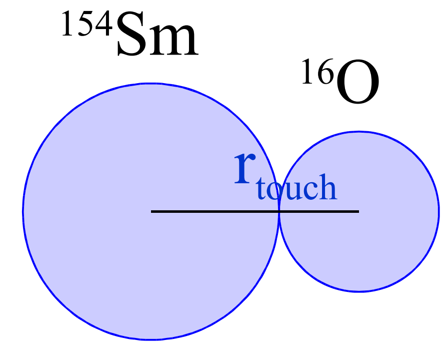
⇒ 古典的な核融合反応断面積は *1/E* に比例する



Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

核融合反応と量子トンネル効果





一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

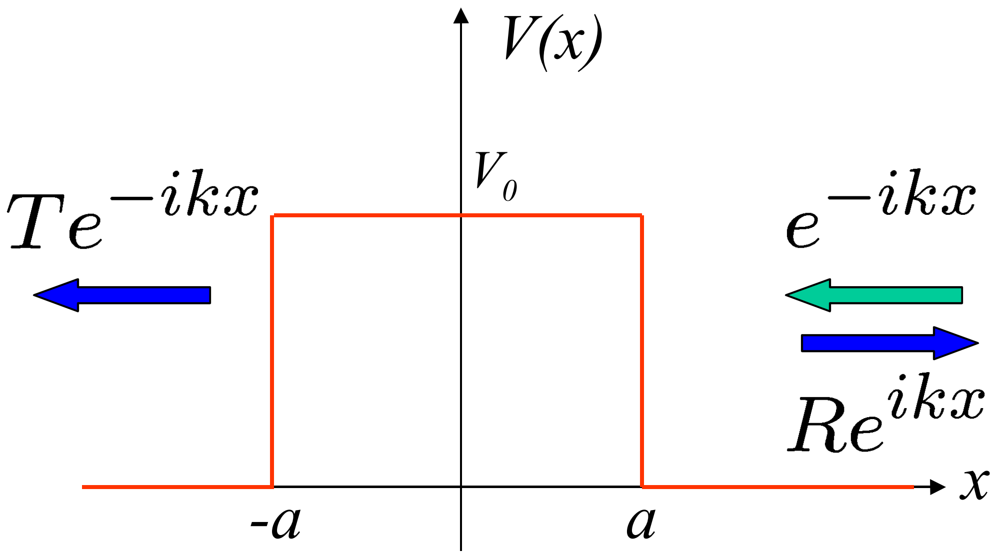
核融合の確率
＝r_{touch} に到達する確率

障壁の透過確率

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

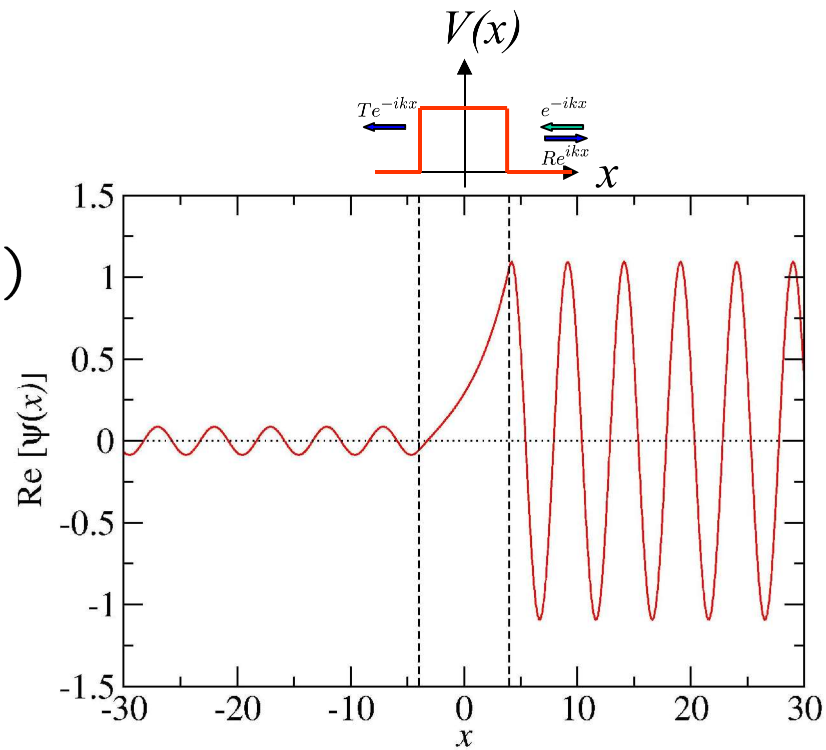
低エネルギーでは核融合反応はトンネル効果で起きる！

量子トンネル現象



$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= T\,e^{-ikx} && (x \le -a) \\
&= A\,e^{-\kappa x} + B\,e^{\kappa x} && (-a < x < a) \\
&= e^{-ikx} + R\,e^{ikx} && (x \ge a)
\end{aligned}
$$

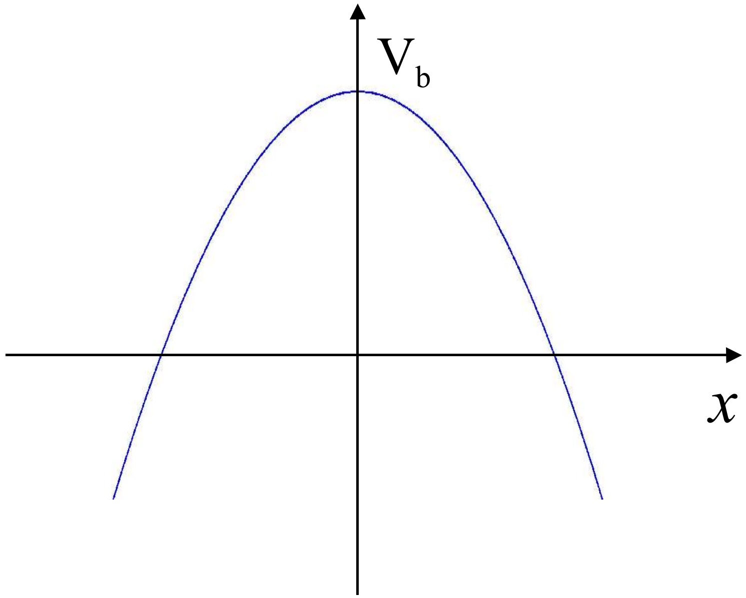
$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{2mE/\hbar^2} \\
\kappa &= \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}
\end{aligned}
$$



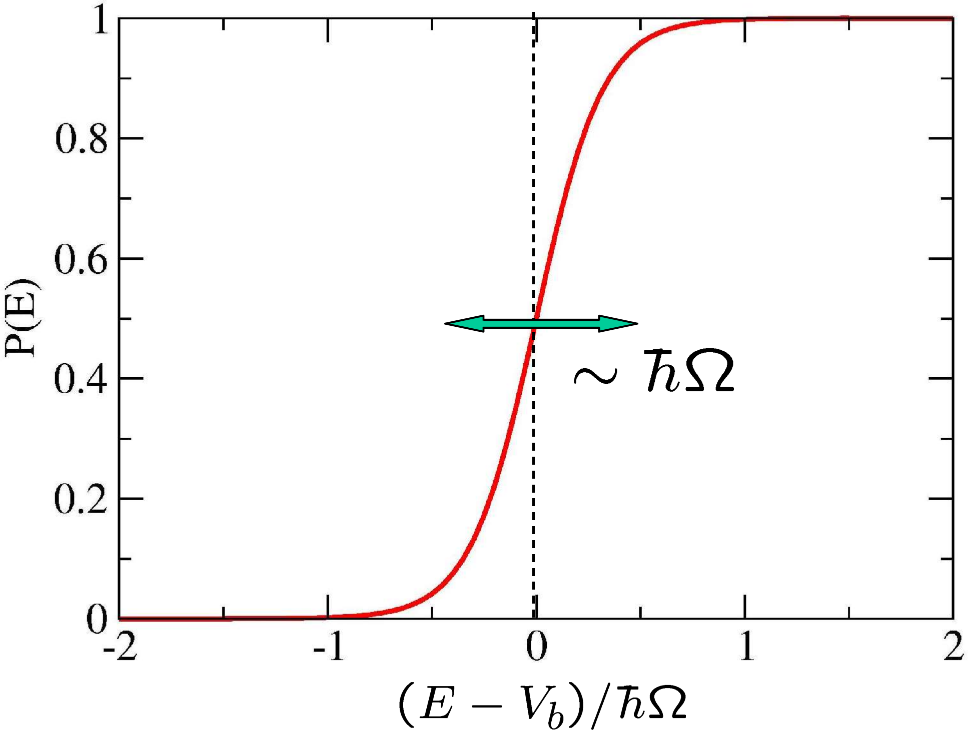
トンネル確率： $P(E) = |T|^2$

放物線障壁だと……..

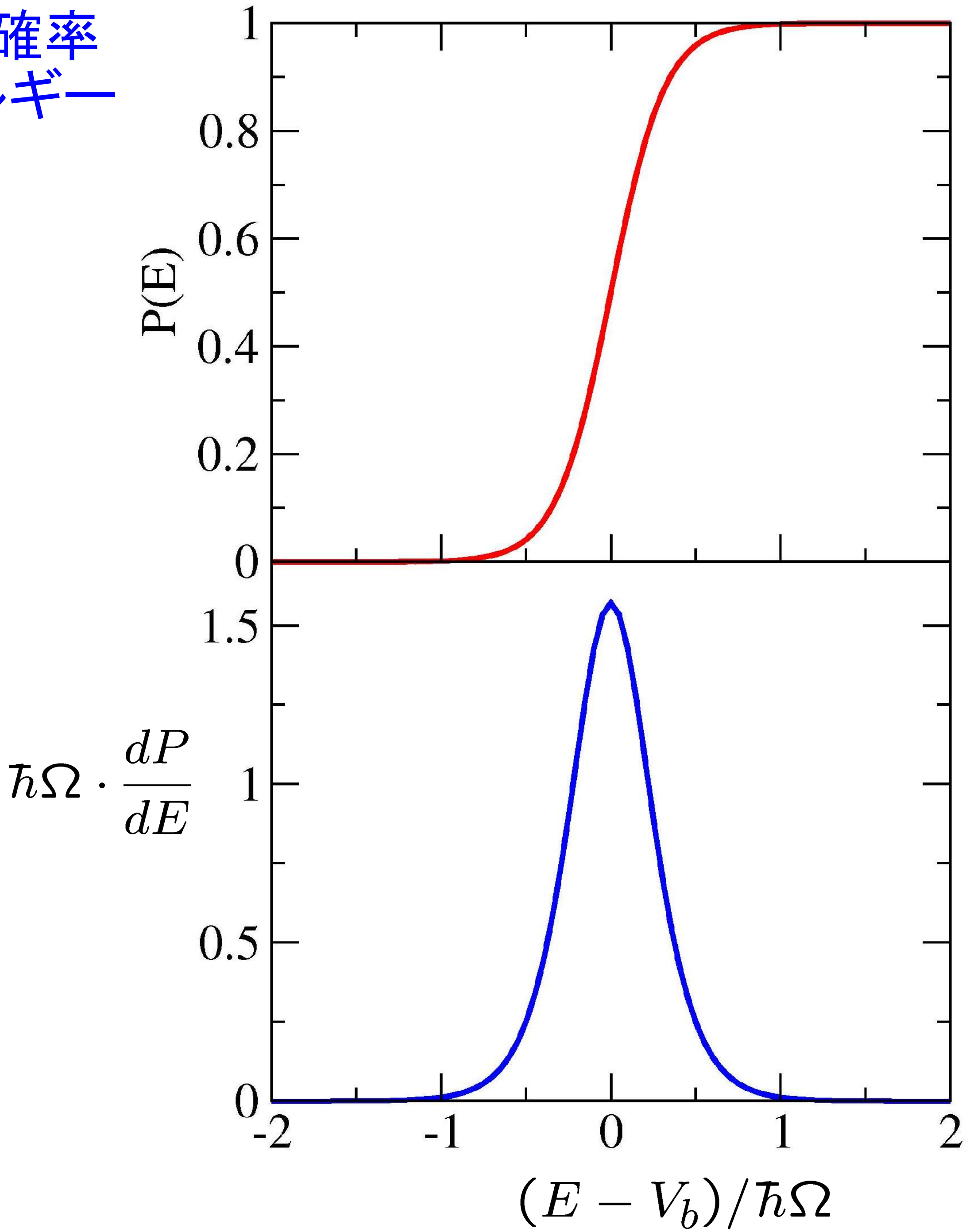
$$V(x) = V_b - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$$



$$\boxed{P(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]}}$$



トンネル確率のエネルギー微分

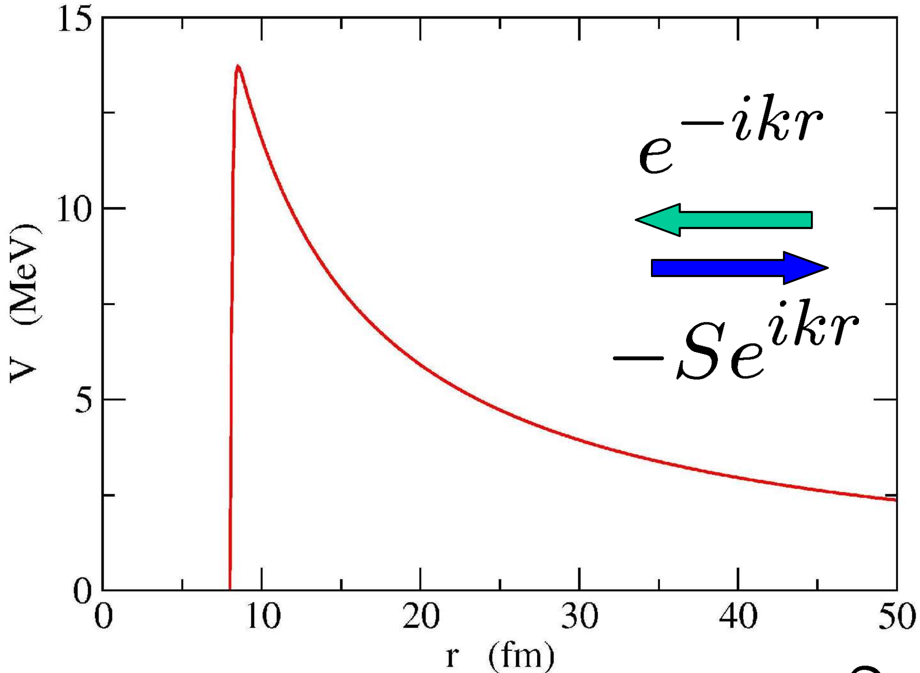


(note) 古典極限

$$\begin{aligned} P(E) &= \theta(E - V_b) \\ dP/dE &= \delta(E - V_b) \end{aligned}$$

球対称３次元ポテンシャルの場合

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l\, \frac{1}{r}\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta)$$



$-S_l \sim R$（反射係数） $\Longrightarrow$ $P = |T|^2 = 1 - |S_l|^2$

$$\boxed{\sigma_{\rm abs} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1) P_l}$$

ポテンシャル模型：成功と失敗

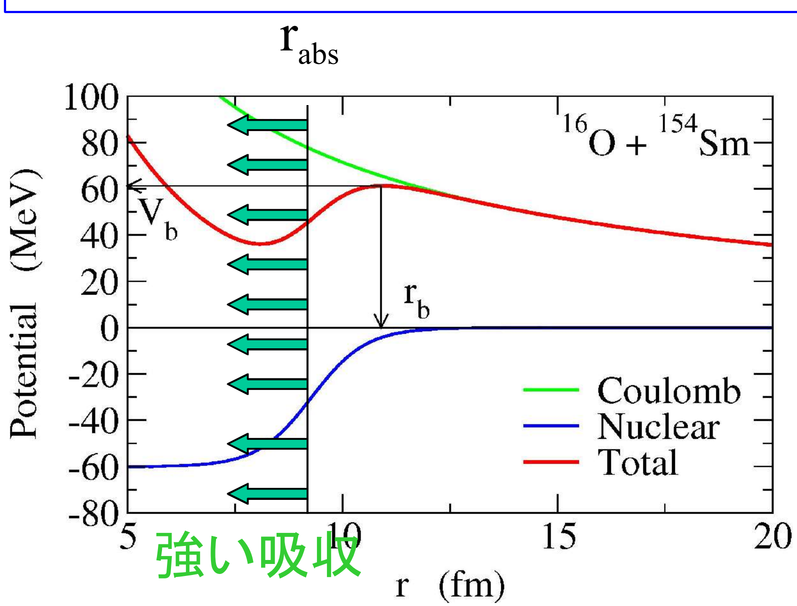
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l(l+1)^2}{2\mu r^2}-E\right]u_l(r)=0$$

遠方での境界条件: $u_l(r)\to H_l^{(-)}(kr)-S_l\,H_l^{(+)}(kr)$

核融合反応断面積: $\sigma_{\rm fus} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l$

複合核の平均角運動量: $\langle l\rangle = \sum_l l(2l+1)P_l/\sum_l(2l+1)P_l$

$$P_l=1-|S_l|^2$$



遠方での境界条件:　$u_l(r) \to H_l^{(-)}(kr) - S_l\, H_l^{(+)}(kr)$

⟹ 核融合反応断面積:　$\sigma_{\rm fus} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l$

内側での境界条件:　$P_l = 1 - |S_l|^2$

(i) 吸収ポテンシャルを使う場合

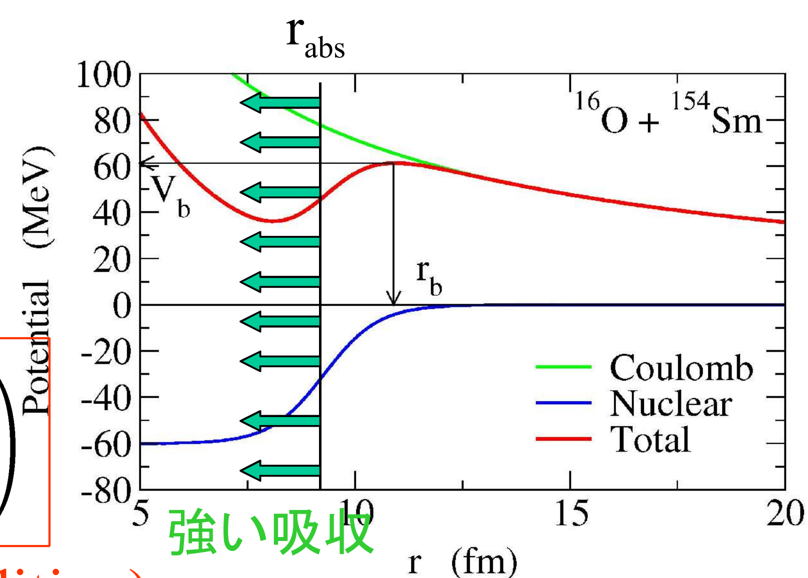
$$V(r) = V_R(r) - iW(r)$$

$$u_l(r) \sim r^{l+1}$$

(ii) IWBC

W が非常に大きい極限

$$\boxed{u_l(r) = T_l \exp\left(-i\int_{r_{abs}}^{r} k_l(r')dr'\right)}$$



(Incoming Wave Boundary Condition)

$$k_l(r) = \sqrt{2\mu/\hbar^2[E - V_R(r) - l(l+1)\hbar^2/2\mu r^2]}$$

- Real Potential のみ必要（Imaginary part は不要）
- $P_l = |T_l|^2$

Wong の公式

C.Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 31 ('73)766

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

i) クーロン障壁を放物線で近似　$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$

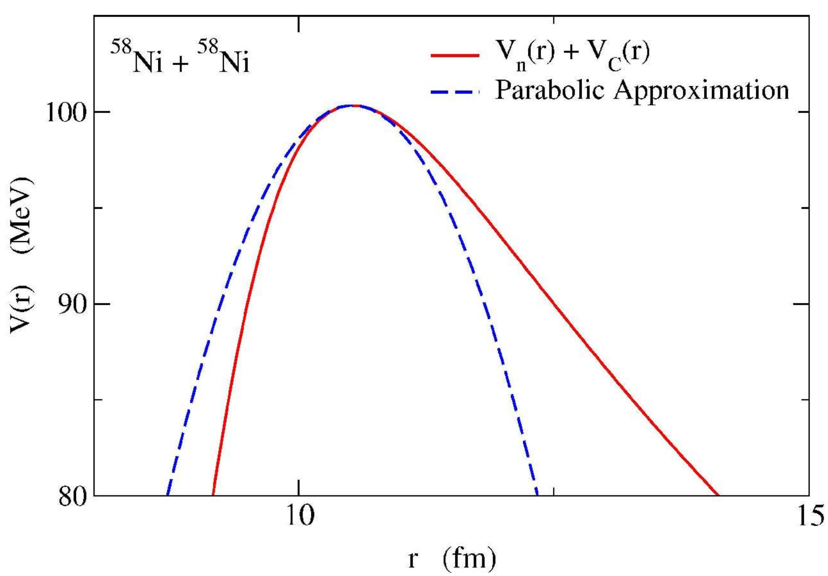
$$\Rightarrow P_0(E) = 1\Big/\left(1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]\right)$$

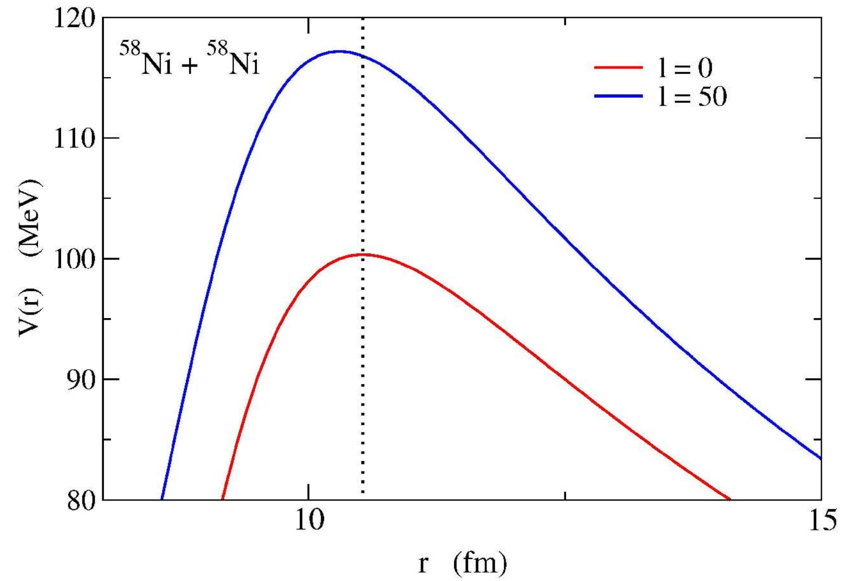
ii) 角運動量 *l* の透過確率を角運動量 *l=0* の透過確率を用いて近似

$$P_l(E) \sim P_0\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_b^2}\right)$$

（曲率及び障壁の位置が
角運動量 *l* に依らないと仮定）

iii) *l* の和を積分に置き換える





$$\boxed{\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]}$$

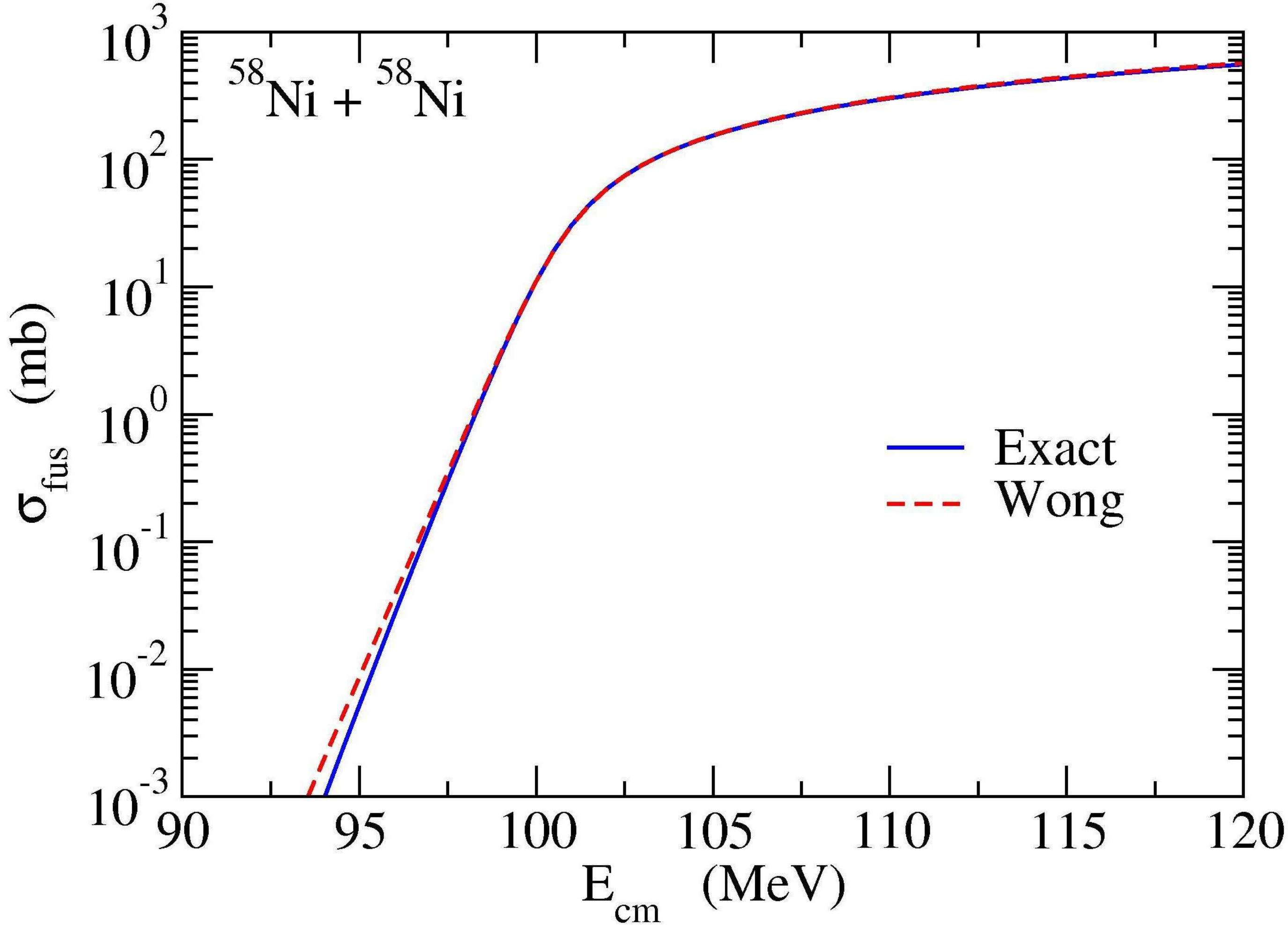
(note) $E \gg V_b$ の時 $1 \ll \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)$

$$\Longrightarrow \sigma_{\text{fus}}(E) \sim \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) = \sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)$$

(note)

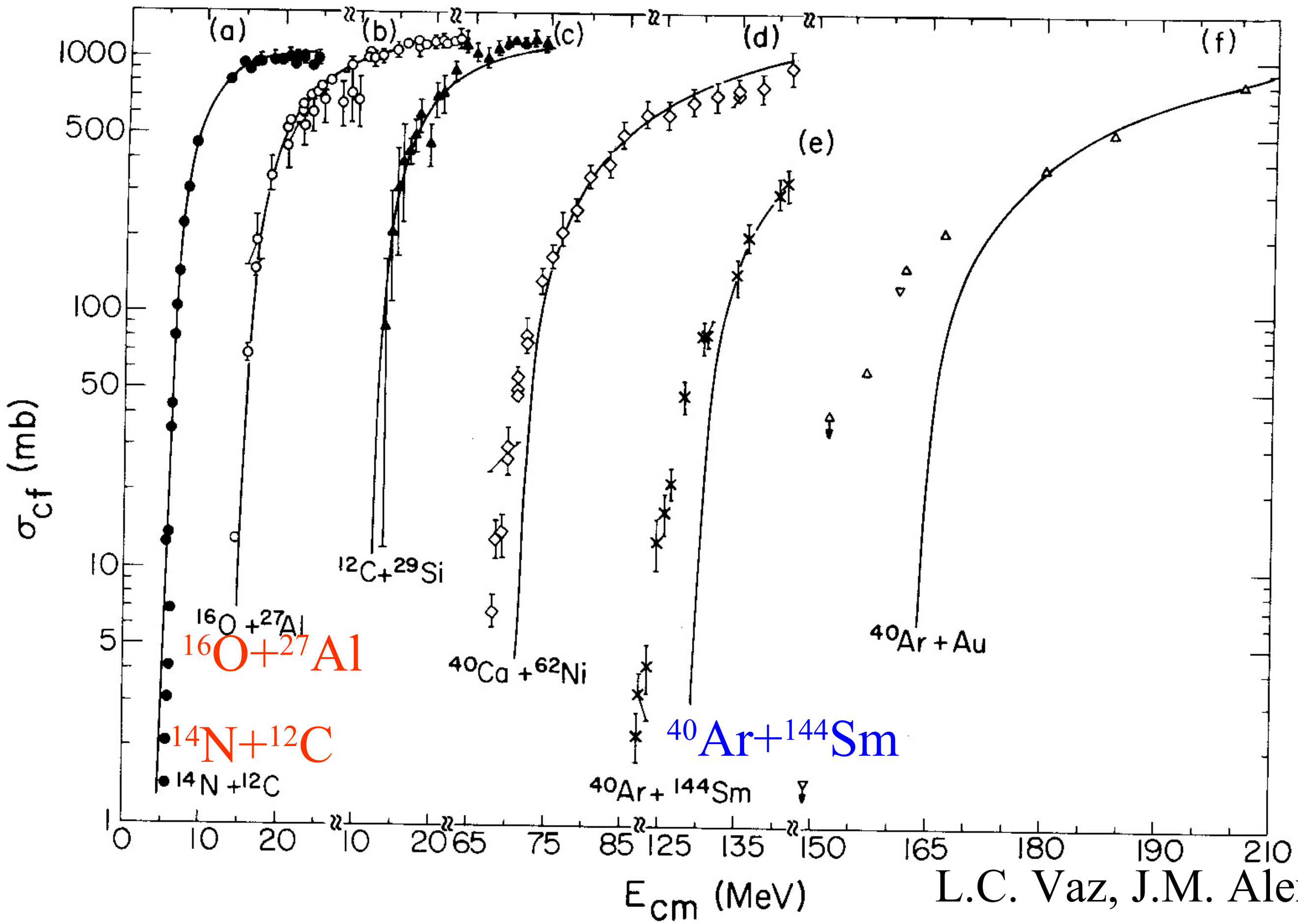
$$\boxed{\frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)}$$

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$



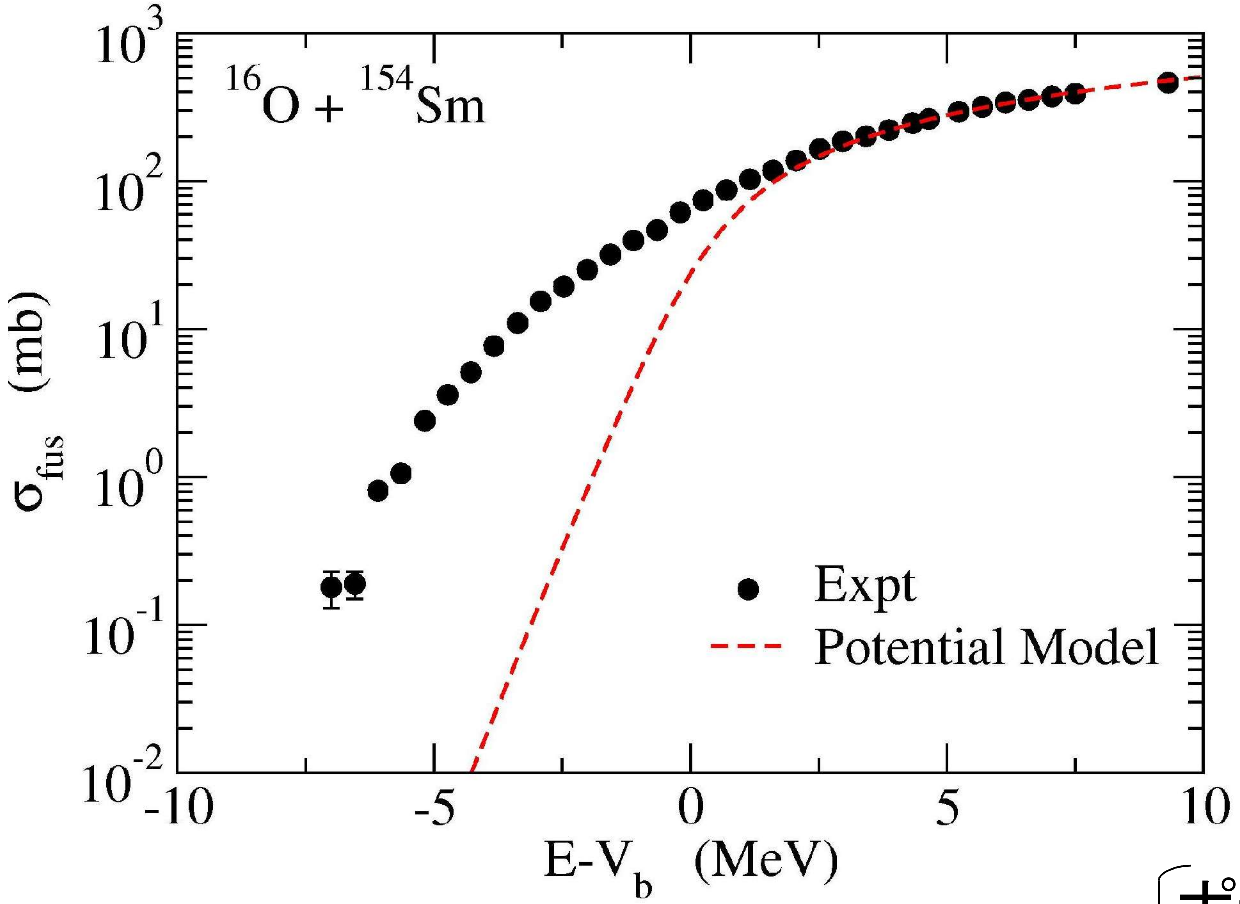
ポテンシャル模型と実験データの比較

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



L.C. Vaz, J.M. Alexander, and G.R. Satchler, Phys. Rep. 69('81)373

- 比較的軽い系では実験データを再現
- 系が重くなると過小評価（低エネルギー）



ポテンシャル模型：

$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

何が原因？

ポテンシャルが不十分？
他の要因？

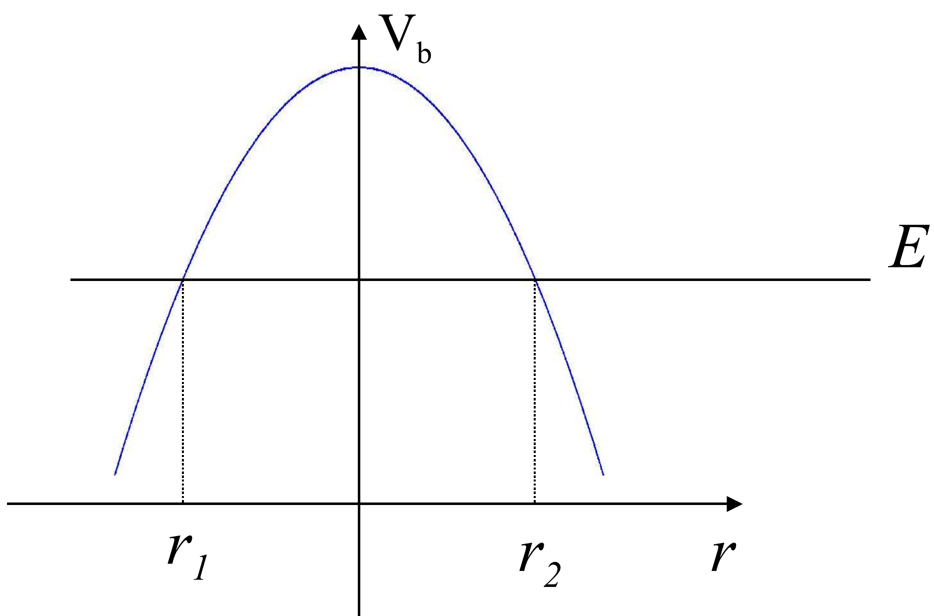
Potential Inversion

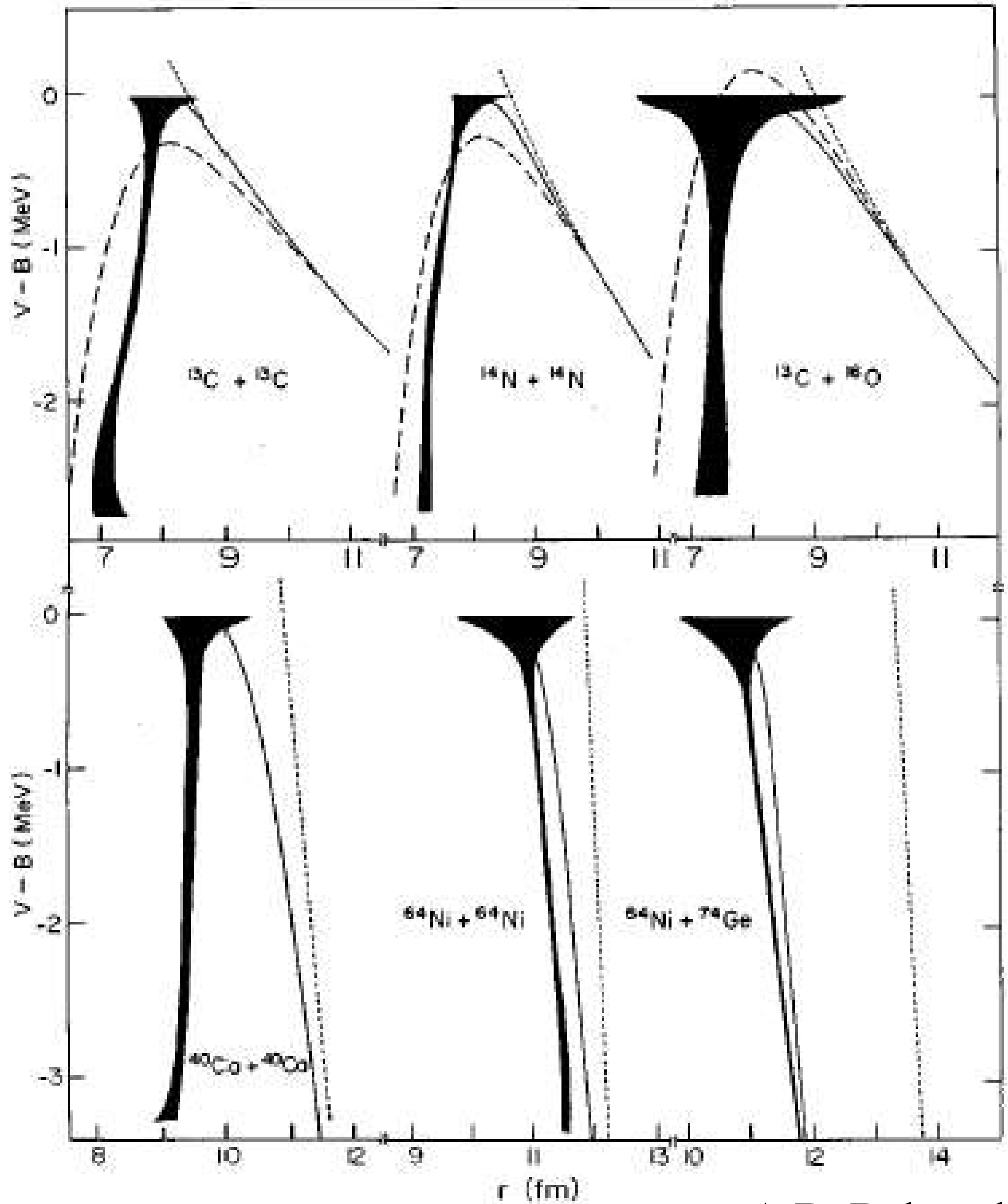
$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2}\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

(note)

$$P_0(E) = 1/[1+S_0(E)], \quad S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr\,\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r)-E)}$$

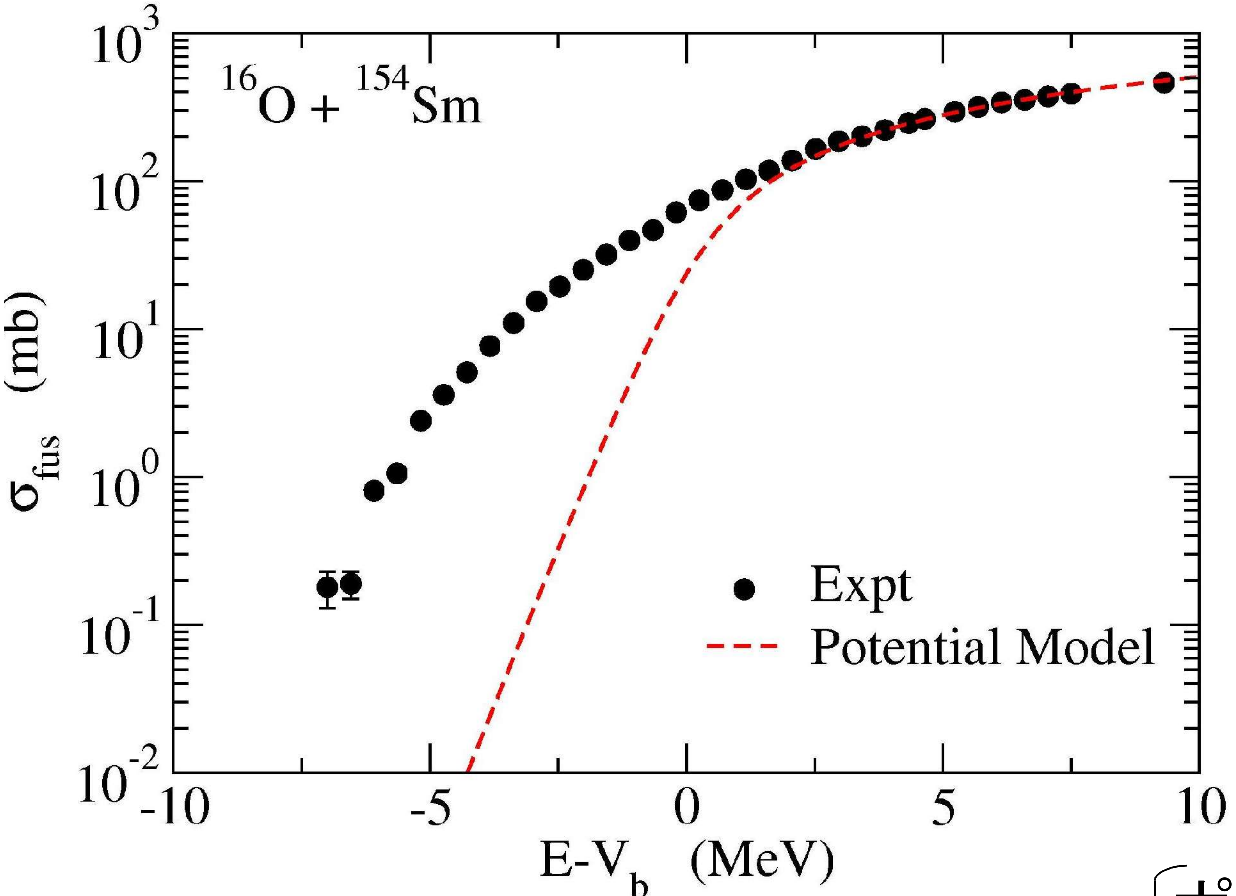
$$\boxed{t(E) \equiv r_2 - r_1 = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}}\int_E^{V_b}\frac{\frac{dS_0(E')}{dE'}}{\sqrt{E'-E}}\,dE'}$$





A.B. Balantekin, S.E. Koonin, and J.W. Negele, PRC28('83)1565

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



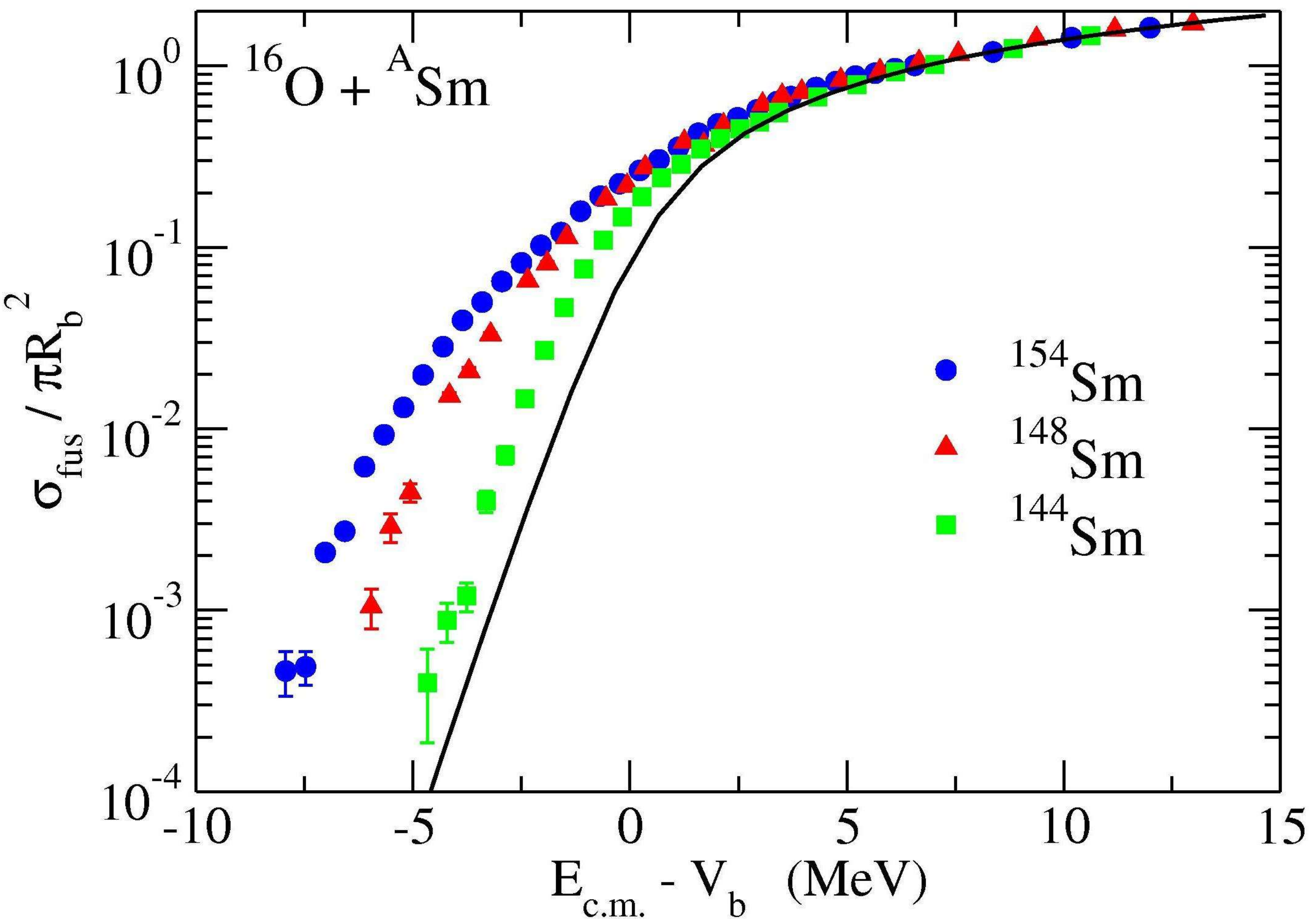
$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

何が原因？

~~ポテンシャルが不十分？~~
他の要因？

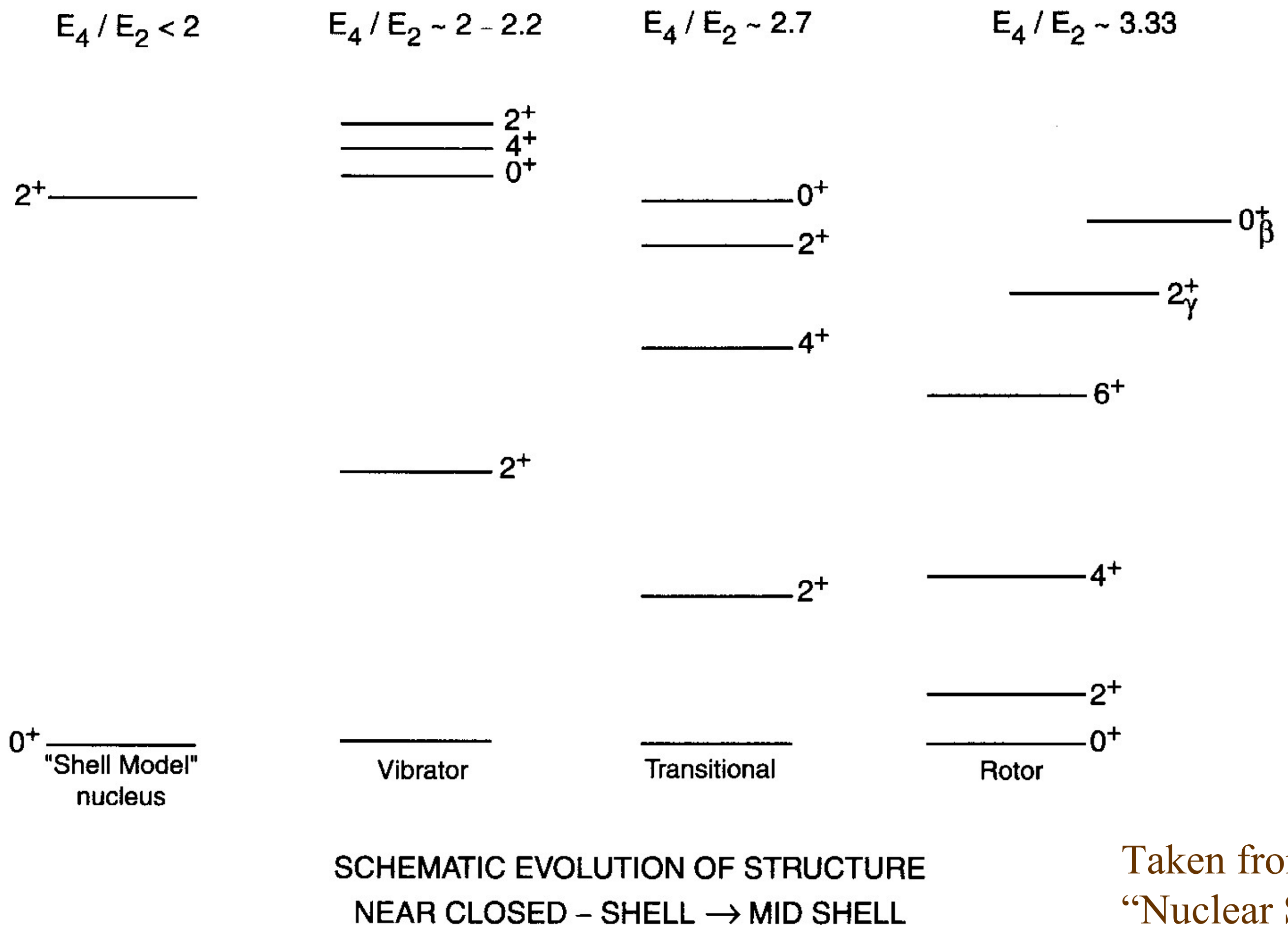
核融合断面積の標的核依存性



→ $E < V_b$ において強い標的核依存性

原子核の低励起集団運動

偶々核の低エネルギーに現れる励起状態は集団励起状態であり、
対相関と殻構造を強く反映する。



Taken from R.F. Casten, "Nuclear Structure from a Simple Perspective"

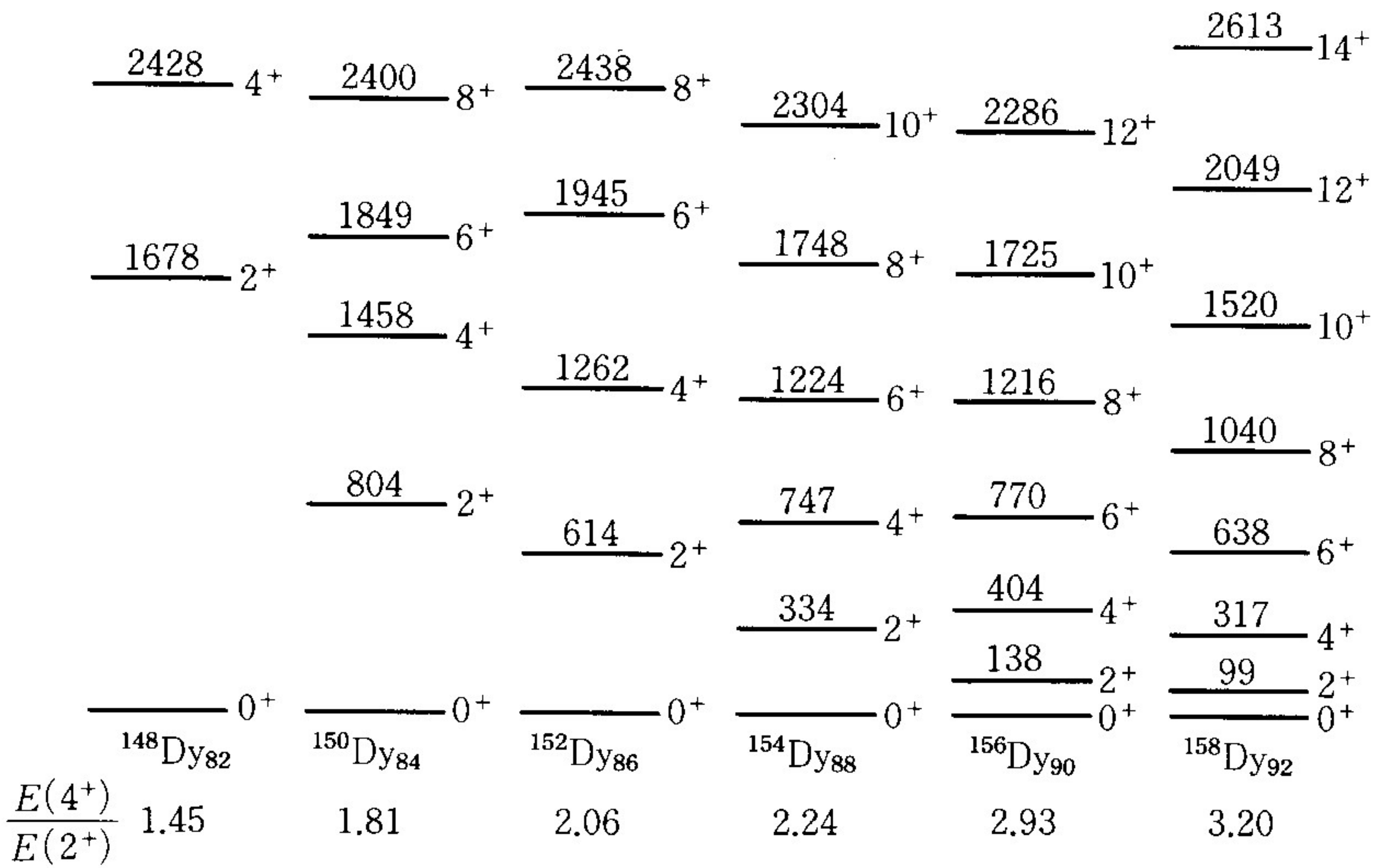
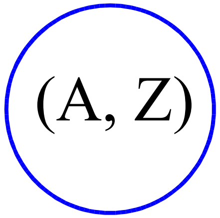


図 3-4 Dy アイソトープの低励起スペクトル．励起エネルギーの単位は keV.

市村、坂田、松柳
「原子核の理論」より

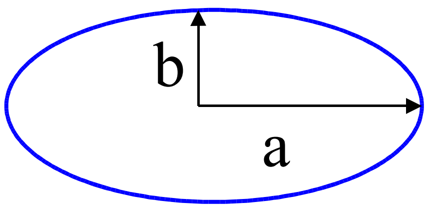
振動励起状態

Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model に基づく質量公式



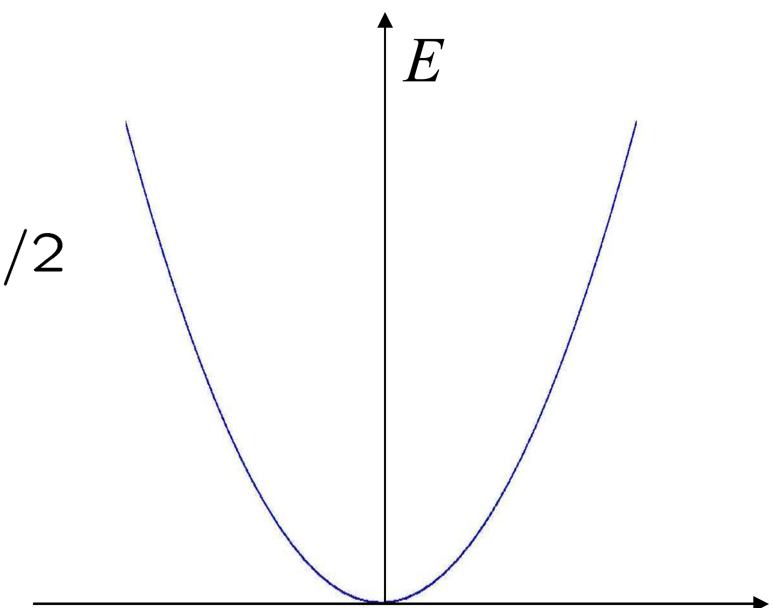
$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

変形すると



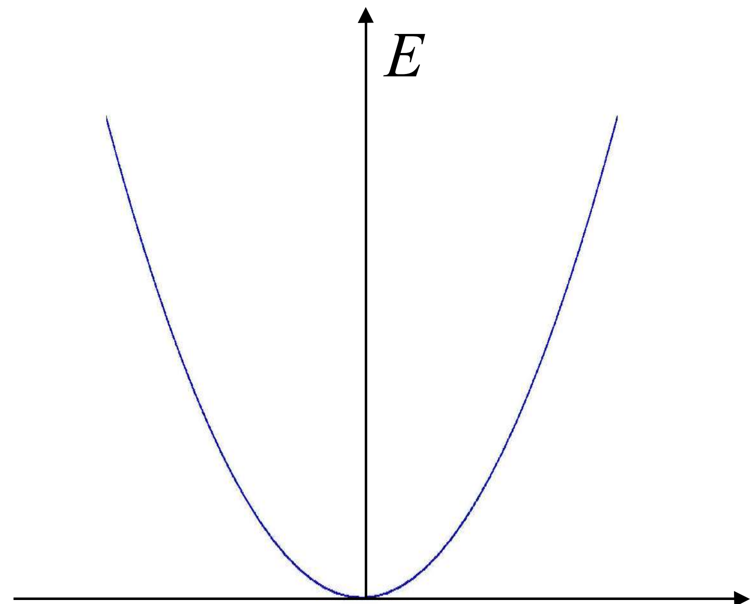
$$\begin{aligned} a &= R\cdot(1+\epsilon) \\ b &= R\cdot(1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{surf}} &= E_{\mathrm{surf}}^{(0)}(1+2\epsilon^2/5+\cdots) \\ E_C &= E_C^{(0)}(1-\epsilon^2/5+\cdots) \end{aligned}$$

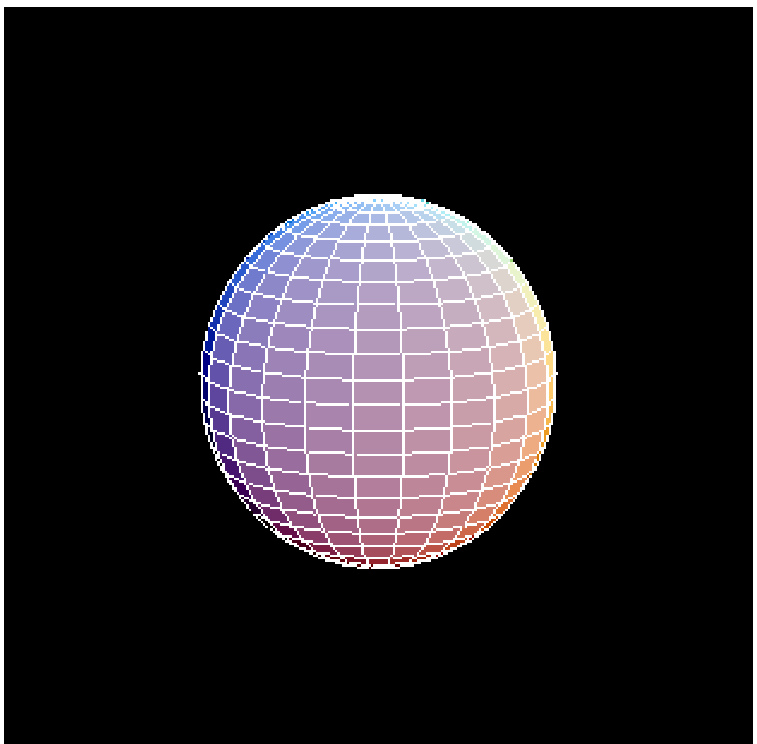


一般に　$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu} \right)$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left| \alpha_{\lambda\mu} \right|^2$$



調和振動子型の運動



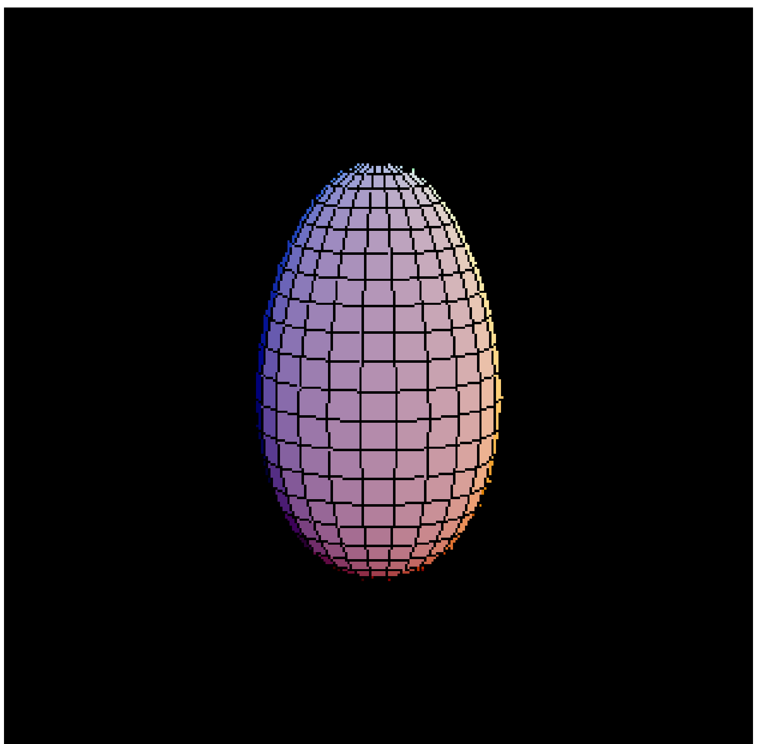
λ=2: Quadrupole vibration

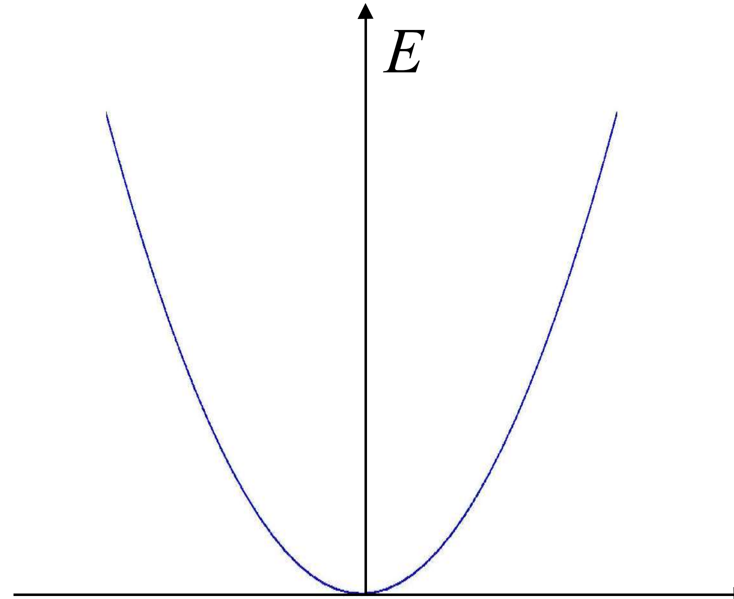
ムービー：在田謙一郎氏（名工大）
http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/

一般に $R(\theta,\phi)=R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}\right)$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}C_\lambda\,|\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

→ 調和振動子型の運動





λ=3: Octupole vibration

ムービー：在田謙一郎氏（名工大）
http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/

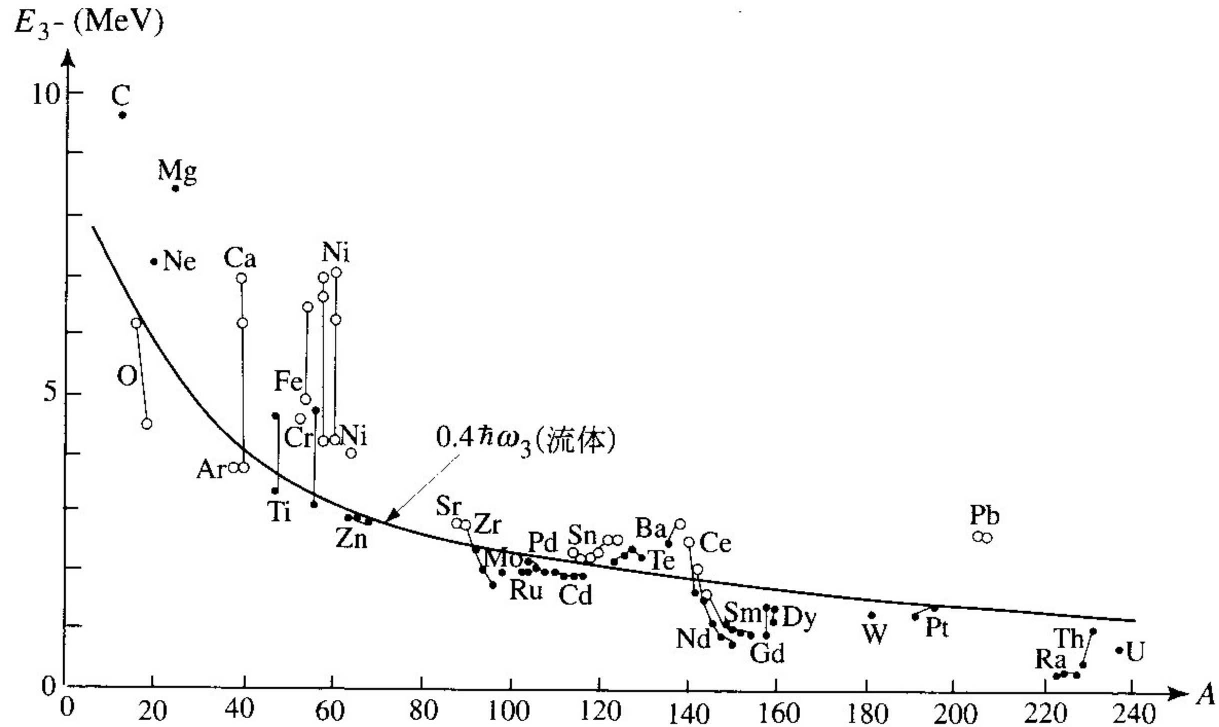


図 3.3　偶々核の第 1 励起 3^- 状態の励起エネルギー

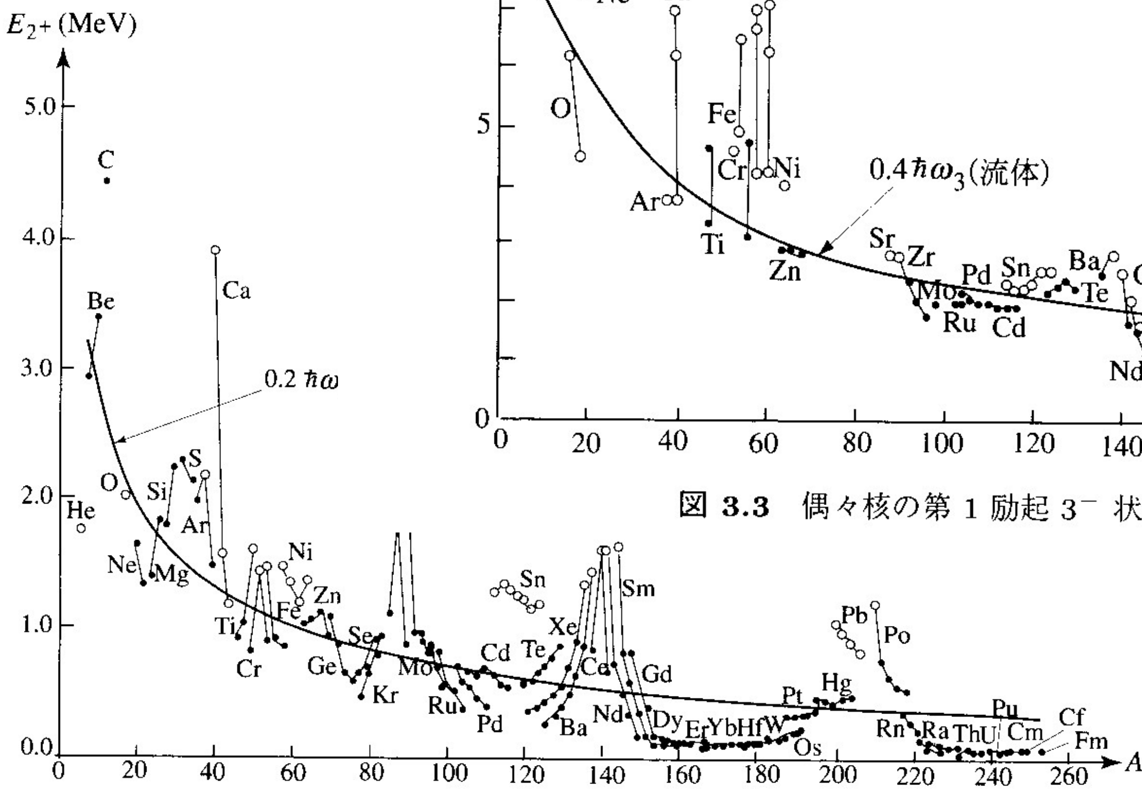
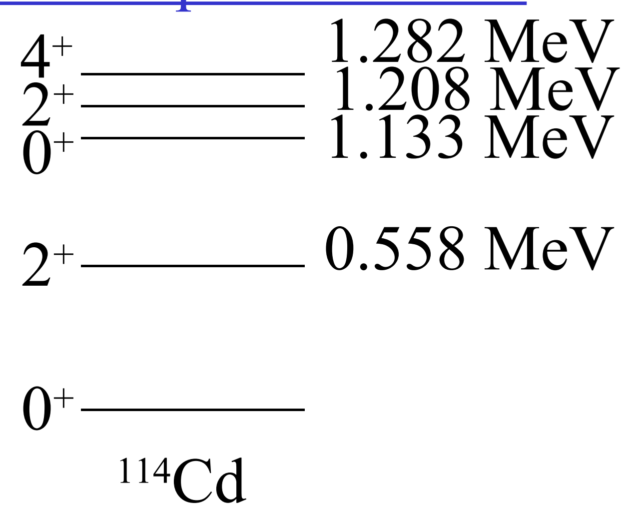


図 3.2　偶々核の第 1 励起 2^+ 状態の励起エネルギー

図:高田、池田
「原子核構造論」より

Double phonon states

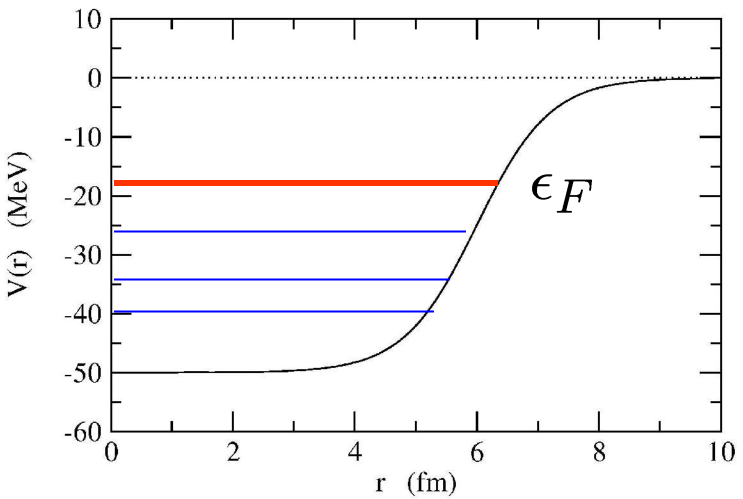


Microscopic description

⇨ Random phase approximation (RPA)

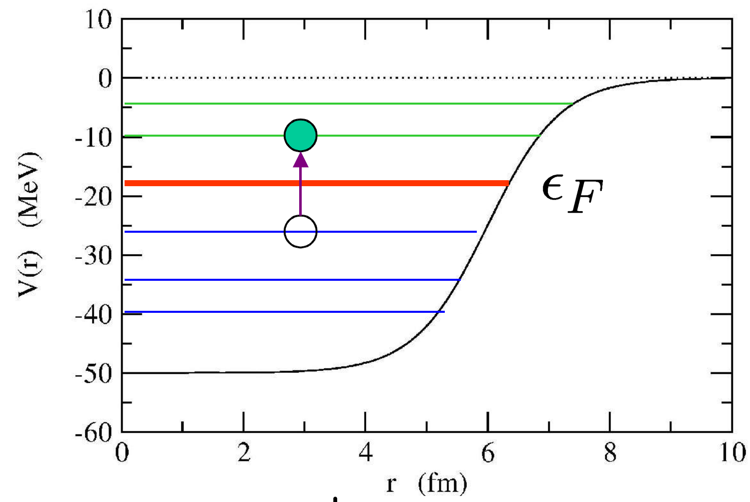
Random Phase Approximation

Hartree-Fock state



$$|HF\rangle$$

1 particle-1 hole (1p1h) state



$$a_p^\dagger a_h|HF\rangle$$

$$\boxed{|\mathrm{vib}\rangle = Q^\dagger|0\rangle = \sum_{ph}\left(X_{ph}\,a_p^\dagger a_h - Y_{ph}\,a_h^\dagger a_p\right)|0\rangle}$$

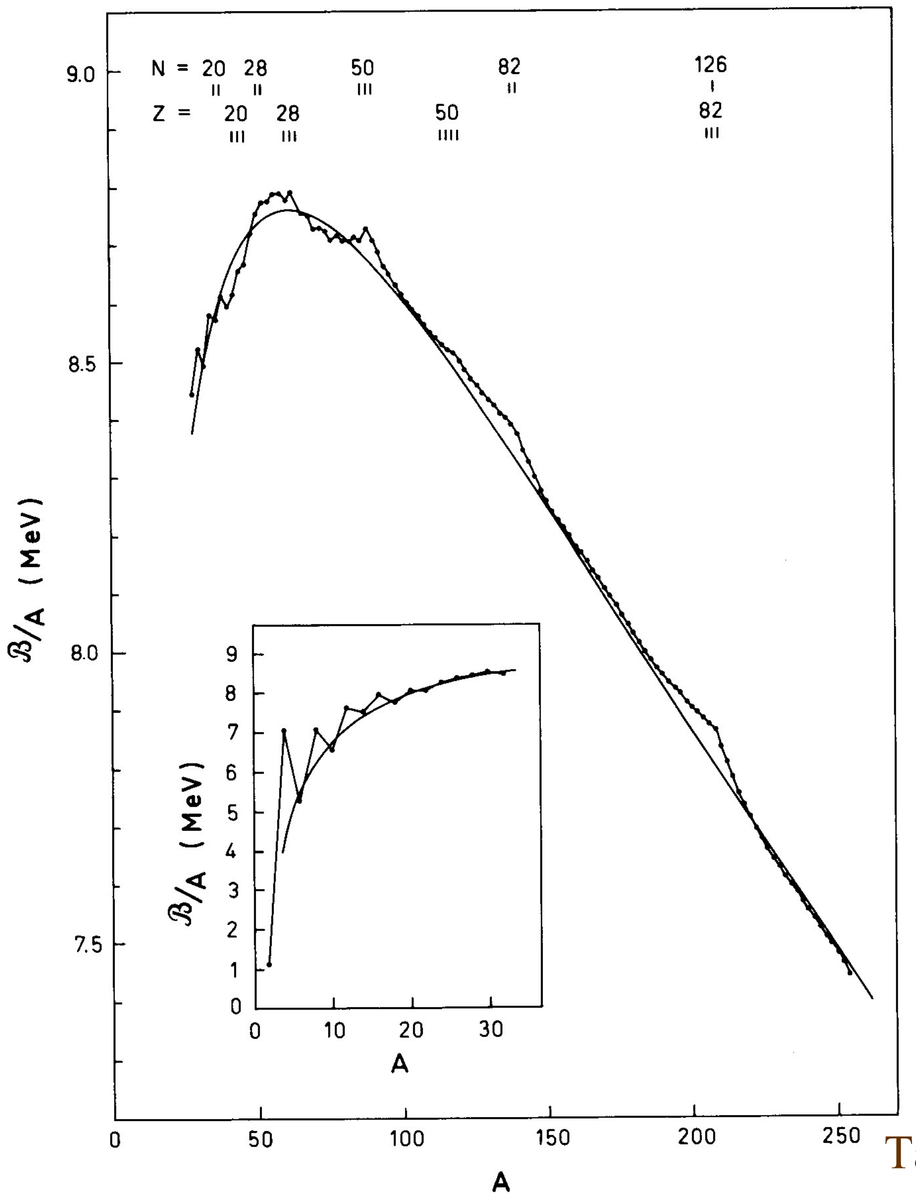
(coherent superposition of 1p1h states)

$$\Longrightarrow \quad [H, Q^\dagger] \approx \hbar\omega Q^\dagger$$

回転励起状態

•殻エネルギー

$$B(N,Z) = B_{\mathrm{macro}}(N,Z) + B_{\mathrm{micro}}(N,Z)$$



•Smooth part

$$B_{\mathrm{macro}}(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

•Fluctuation part

$$B_{\mathrm{micro}} = B_{\mathrm{pair}} + B_{\mathrm{shell}}$$

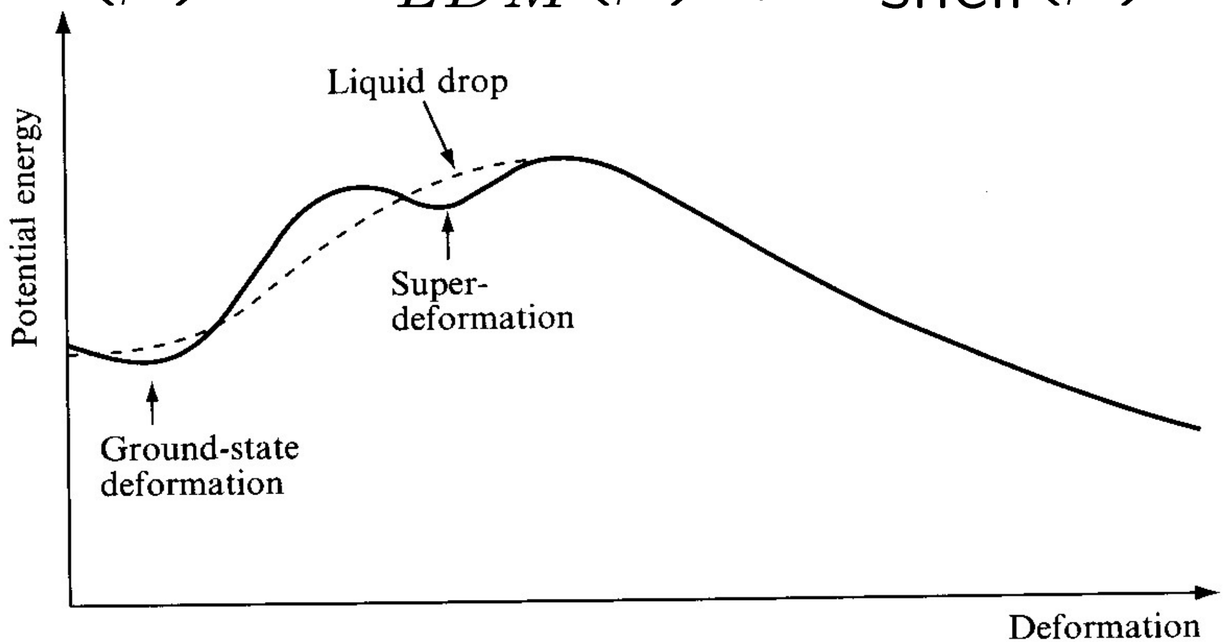
Liquid drop model:

$$B_{\mathrm{LDM}} = B_{\mathrm{macro}} + B_{\mathrm{pair}}$$

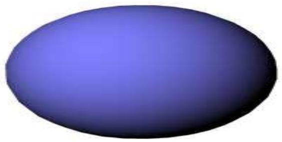
Taken from Bohr-Mottelson

Deformed energy surface for a given nucleus

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$



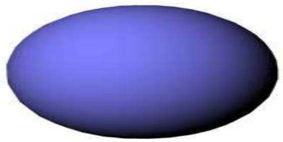
Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"



LDM only → always spherical ground state

Shell correction → may lead to a deformed g.s.

* Spontaneous Symmetry Breaking



^{154}Sm の励起スペクトル

0.903 (MeV)	―――	8^+
0.544	―――	6^+
0.267	―――	4^+
0.082	―――	2^+
0	―――	0^+

^{154}Sm

$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$

Cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

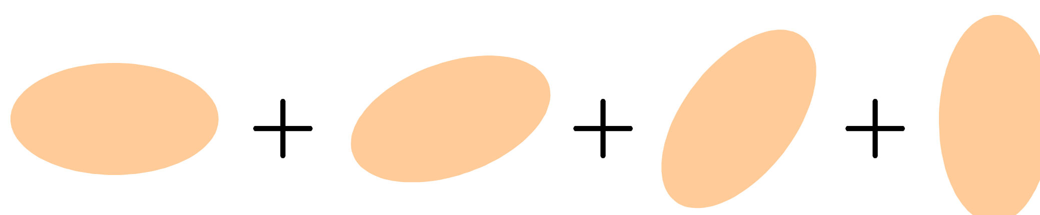
$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

(note) 0^+ 状態とは（量子力学）？

0^+: 空間の異方性がない

→ 色々な向きが等確率で混ざっている

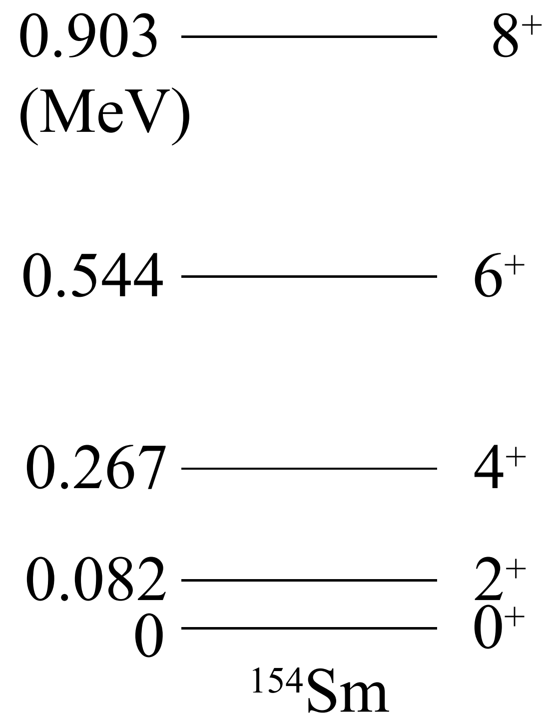


c.f. HF + Angular Momentum Projection

Evidences for nuclear deformation

- The existence of rotational bands

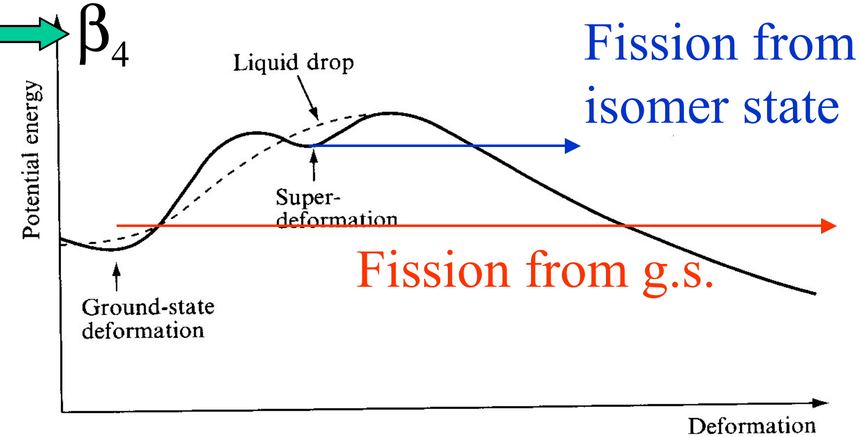
$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



- Very large quadrupole moments (for odd-A nuclei)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle\Psi_{II}|r^2Y_{20}|\Psi_{II}\rangle$$

- Strongly enhanced quadrupole transition probabilities
- Hexadecapole matrix elements $\longleftrightarrow$ β_4
- Single-particle structure
- Fission isomers



核融合反応に対する集団励起の影響: 回転の場合

エネルギー・スケールの比較

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$$

トンネル運動: $E_{\rm tun} \sim \hbar\Omega \sim$ 3.5 MeV (クーロン障壁の曲率)

回転運動: $E_{\rm rot} \sim E_{2+} \sim 0.08{\rm MeV}$

$$E_{\rm tun} \gg E_{\rm rot} = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J} \to 0$$

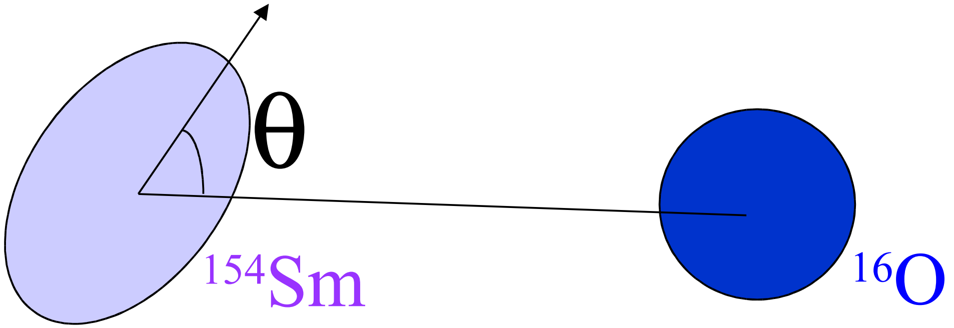
$$\longleftrightarrow \quad \mathcal{J} \to \infty$$

^{154}Sm の方向は反応中にほとんど変化しない

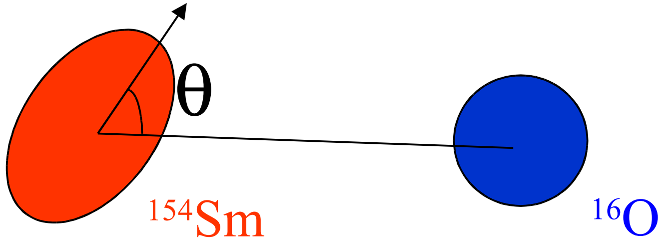
(note)
反応の初期は基底状態
(0^+ 状態)

⇨

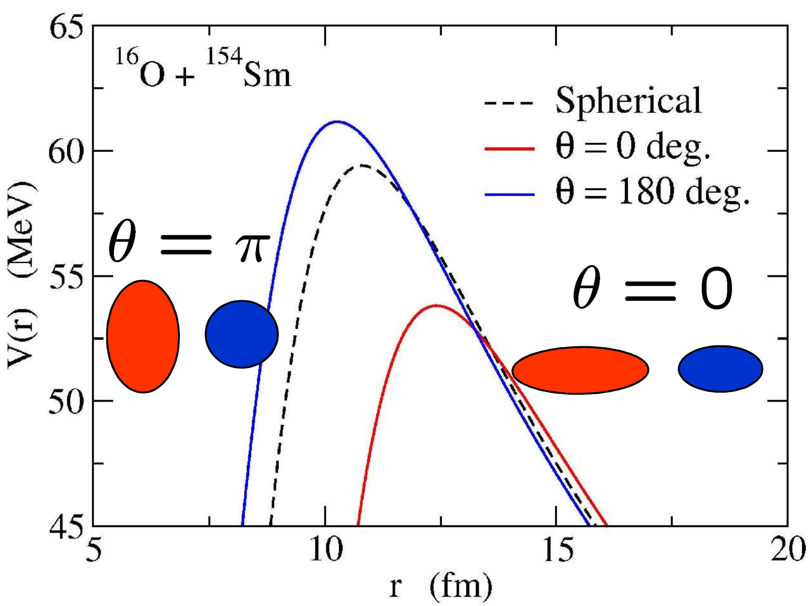
あらゆる方向が等確率
で混ざっている

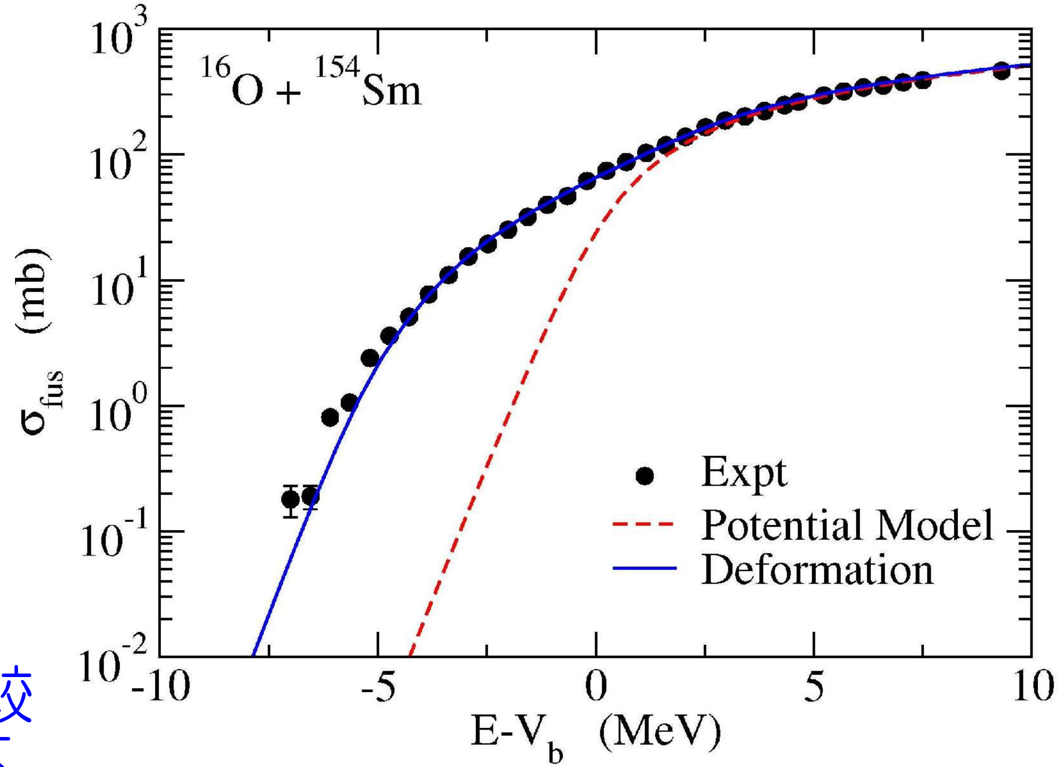


$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\sigma_{\rm fus}(E;\theta)}$$



$$\boxed{\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\sigma_{\mathrm{fus}}(E;\theta)}$$





$\theta = 0$ では引力の核力が比較的遠方から働くため障壁が下がる。

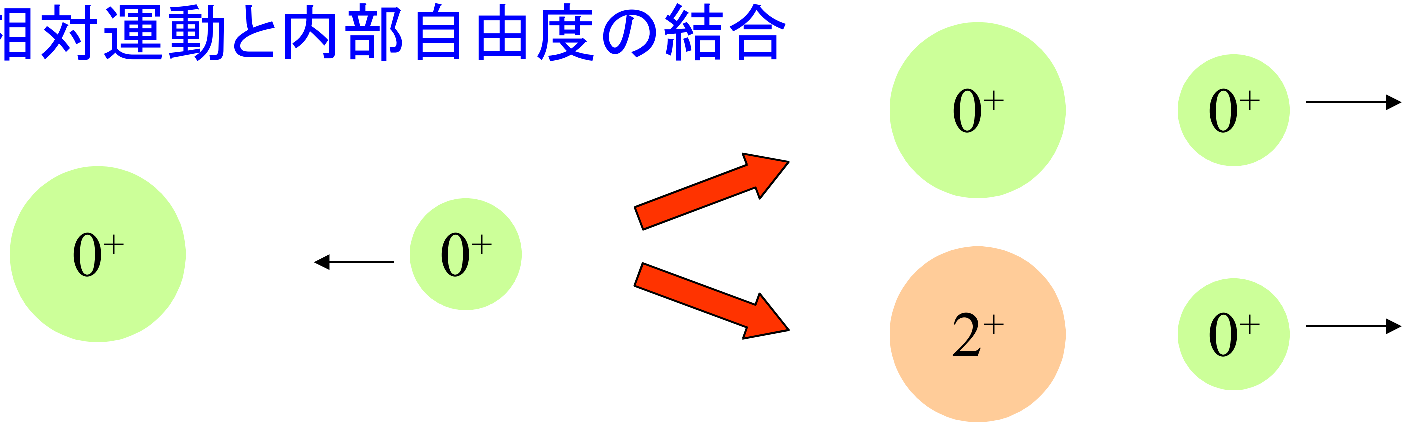
$\theta = \pi$ はその逆。近づかないと引力が働かないため障壁は上がる。

変形の効果：核融合断面積が 10~100 倍増大

⇒ 核融合反応：核構造に対する興味深いプローブ

より量子的な取り扱い：結合チャンネル法

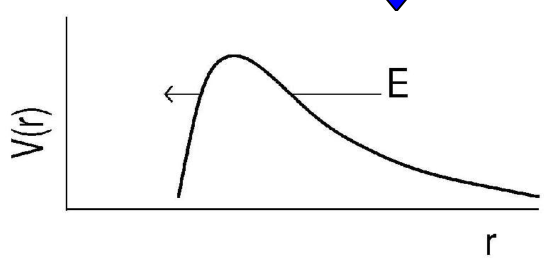
相対運動と内部自由度の結合

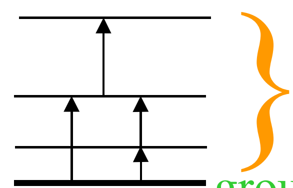


エントランス・チャンネル

励起チャンネル

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$





$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi)}$$

$$\begin{cases} H = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \\ \Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \displaystyle\sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) \end{cases}$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

Schroedinger equation: $(H - E)\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = 0$

$$\langle\phi_k|$$

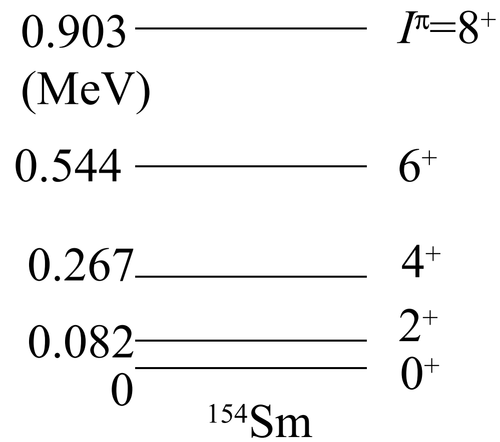
$$\langle\phi_k|H - E|\Psi\rangle = 0$$

or

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

結合チャンネル方程式

角運動量結合



$$H_0(\xi)\phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI}\,\phi_{nIm_I}(\xi)$$

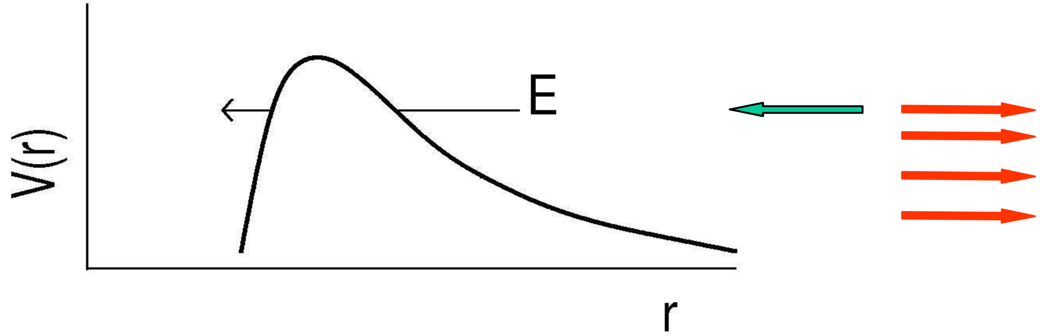
全角運動量: $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}$

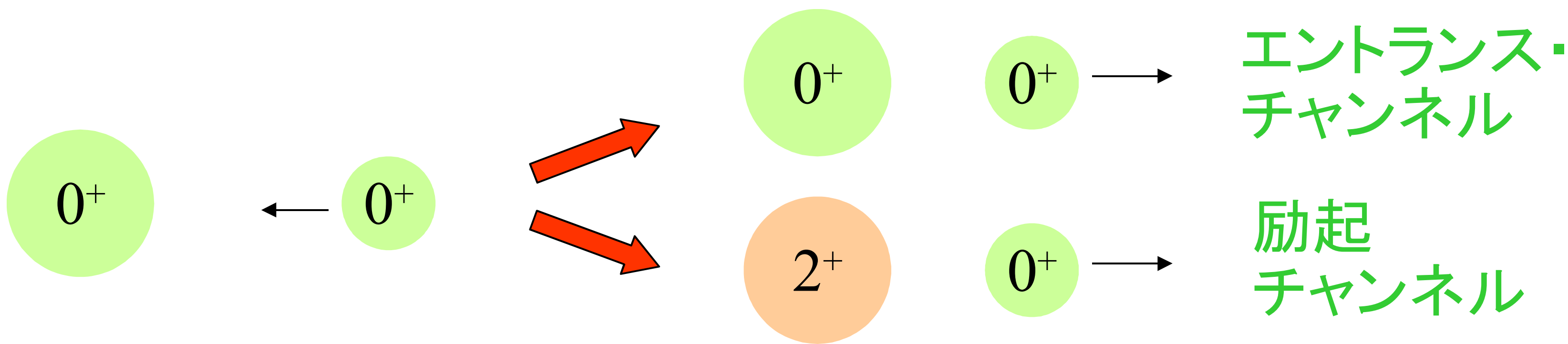
$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|H-E|\Psi\rangle = 0$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r) + \sum_{n'l'I'}\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'I'}(r) = 0$$

境界条件





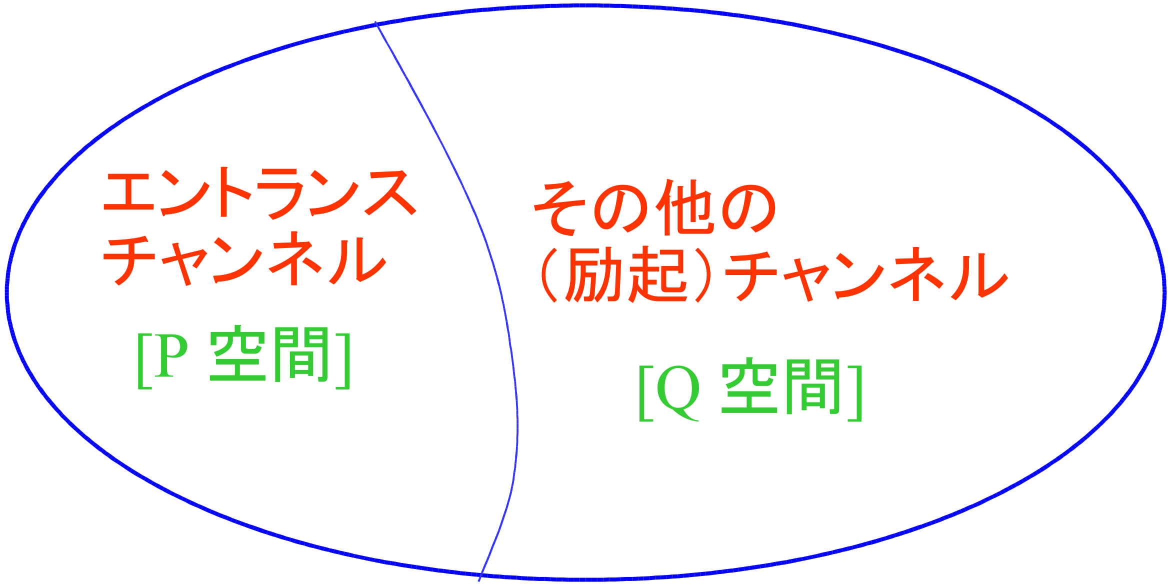
$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi)=\sum_{n,l,I}\frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\boxed{u_{nlI}(r)\to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i}-\sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)}$$

$$P_l(E)=1-\sum_{nI}|S_{nlI}|^2$$

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$

(note) Dynamical Polarization Potential



考えている全ヒルベルト空間（概念図）

Q 空間を「消去」して P 空間に射影

P 空間（エントランス・チャンネル）に対する effective potential　(dynamical polarization potential)

エネルギー依存、non-local、複素ポテンシャル

光学ポテンシャル V_{opt}

例：2チャンネル問題

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)}_{\equiv \hat{h}_l}+\begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{cases} \hat{h}_l\, u_0(r) + F(r)u_1(r) = E\, u_0(r) & (1) \\ \hat{h}_l\, u_1(r) + F(r)u_0(r) = (E-\epsilon)u_1(r) & (2) \end{cases}$$

(2) $\longrightarrow$ $u_1(r) = -\int_0^\infty dr'\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r')$

$$G^{(+)}(r,r';E-\epsilon) = \left(\frac{1}{\hat{h}_l-(E-\epsilon)+i\eta}\right)_{r,r'}$$

$$\boxed{\hat{h}_l\, u_0(r) - F(r)\int_0^\infty dr'\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r') = E\, u_0(r)}$$

例：２チャンネル問題（続き）

$$\underbrace{\hat{h}_l\, u_0(r) - F(r)\int_0^\infty dr'\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r')}_{=\int_0^\infty dr'\, V_{\mathrm{DPP}}(r,r')u_0(r')} = E\, u_0(r)$$

$$\boxed{V_{\mathrm{DPP}}(r,r') = -F(r)\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')}$$

$$\begin{aligned} G^{(+)}(r,r';E) &= \left(\frac{1}{\hat{h}_l - E + i\eta}\right)_{r,r'} \\ &= -\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{f_l(kr_<)\,\tilde{h}_l^{(+)}(kr_>)}{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_l &\to \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) && \text{(regular solution)} \\ \tilde{h}_l &\to \exp[i(kr - l\pi/2 + \delta_l)] && \text{(outgoing solution)} \\ W &= f_l'\,\tilde{h}_l = f_l\,\tilde{h}_l' = k && \text{(Wronskian)} \end{aligned}$$

より一般的には: Feshbach formalism（参考図書を参照のこと）

結合チャンネル法のまとめ

$$\begin{cases} H = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\boldsymbol{r},\xi) \\ \Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \displaystyle\sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)} \end{cases}$$

$$H_0(\xi)\phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI}\,\phi_{nIm_I}(\xi)$$

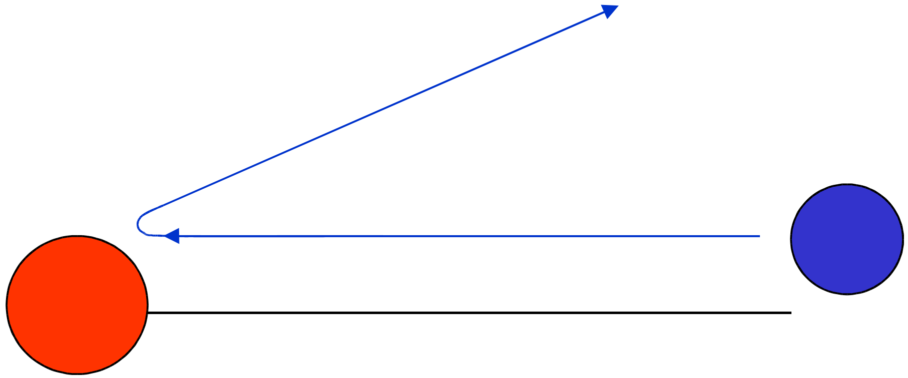
$$\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|H - E|\Psi\rangle = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI}\right] u_{nlI}(r) \\ &\quad + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\text{coup}}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'I'}(r) = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{u_{nlI}(r) \to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)}$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

原子核の励起状態の性質



原子核同士を衝突させて標的核を励起させる

入射核との相互作用に
標的核がどのように応答するか？

標準的なアプローチ：結合チャンネル法を用いた解析

- 非弾性散乱の断面積
- 弾性散乱の断面積
- 核融合反応断面積

S 行列　S_{nlI}

Coupling Potential: Collective Model

$$R(\theta,\phi) = R_T\left(1+\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

(note) rotating frame への座標変換（$\hat{\boldsymbol{r}}=0$）:

$$\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi) \to \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}\alpha_{\lambda 0}$$

- 振動励起の場合

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \dfrac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}(a^\dagger_{\lambda\mu}+(-)^\mu a_{\lambda\mu}) \\ H_0 = \hbar\omega_\lambda \sum_\mu a^\dagger_{\lambda\mu}a_{\lambda\mu} \end{cases}$$

- 回転励起の場合

Body-fixed 系への座標変換:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{2\lambda+1}}\beta_\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_d,\phi_d) & \text{（軸対称変形の場合）} \\ H_0 = \dfrac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}} \end{cases}$$

いずれの場合も $\beta_\lambda = \dfrac{4\pi}{3Z_T R_T^\lambda}\sqrt{\dfrac{B(E\lambda)\uparrow}{e^2}}$

Deformed Woods-Saxon model:

$$
\begin{aligned}
V_{WS}(r) &= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]} \\
&= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_P-R_T)/a]}
\end{aligned}
$$

$$
R_T \to R_T\left(1+\sum_{\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)
$$

$$
\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\,\alpha_\lambda\cdot Y_\lambda(\hat{\boldsymbol{r}}))/a]}}
$$

Deformed Woods-Saxon model (collective model)

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa,
Comp. Phys. Comm. 123('99)143

$$V_{\rm coup}(r,\hat{O}) = V^{(N)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) + V^{(C)}_{\rm coup}(r,\hat{O})$$

Nuclear coupling:

$$V^{(N)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\hat{O})/a]}$$

Coulomb coupling:

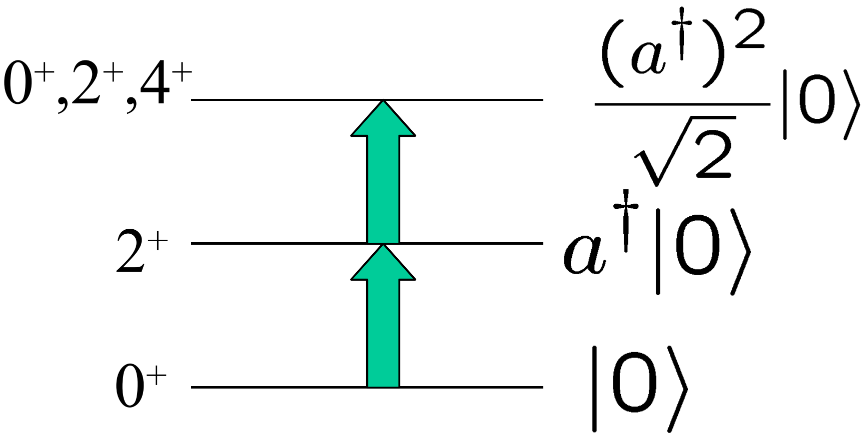
$$V^{(C)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) = \frac{3}{2\lambda+1}\,Z_PZ_Te^2\,\frac{R_T^\lambda}{r^{\lambda+1}}\,\hat{O}$$

Rotational coupling: $\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$

Vibrational coupling: $\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a+a^\dagger)$

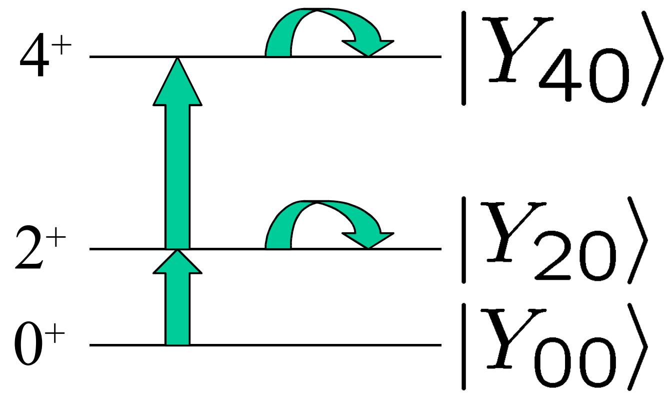
Vibrational coupling

$$\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$$



Rotational coupling

$$\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$$



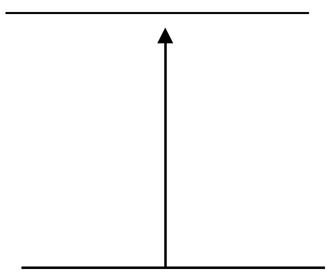
$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon & \sqrt{2}F \\ 0 & \sqrt{2}F & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon + \frac{2\sqrt{5}}{7}F & \frac{6}{7}F \\ 0 & \frac{6}{7}F & \frac{10\epsilon}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{77}F \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}$$

Iso-centrifugal approximation

- No-Coriolis approximation
- Rotating frame approximation

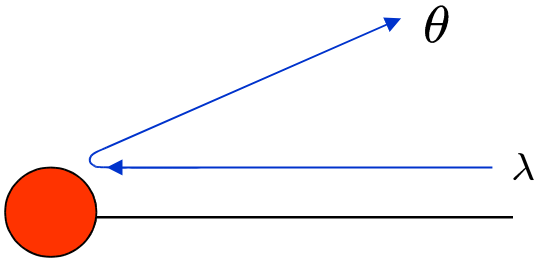


2^+ *l=J-2, J, J+2*

0^+ *l=J*

J=l+I

Truncation	Dimension
2^+	4 $\longrightarrow$ 2
4^+	9 $\longrightarrow$ 3
6^+	16 $\longrightarrow$ 4
8^+	25 $\longrightarrow$ 5



Iso-centrifugal approximation:

λ: independent of excitations

$$\boxed{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \to \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}$$

$$V_{\text{coup}}(\boldsymbol{r},\xi) = f(r)Y_\lambda(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot T_\lambda(\xi)$$

transform to
the rotating frame
$$\to \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}f(r)T_{\lambda 0}(\xi)$$

"Spin-less system"

結合チャンネル方程式：2つの極限

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)-E+\epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r)$$
$$+\sum_{n'l'I'}\langle[Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\,u_{n'l'I'}(r)=0$$

$$u_{nlI}(r)\to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i}-\sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E)=1-\sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\rm fus}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$

数値的に結合チャンネル方程式を解いて核融合反応断面積を計算

$\Rightarrow$ 結果を解釈（理解）するために2つの極限を考えてみよう

- ε_{nI}: 非常に大きい場合（断熱極限） *Adiabatic limit*
- ε_{nI}: ゼロの極限（瞬間極限） *Sudden limit*

2つの極限: (i) 断熱極限

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

相対運動が内部運動に比べて非常にゆっくりしている場合

相対運動の典型的なエネルギー・スケールが内部運動のエネルギー・スケールにくらべて非常に小さい場合

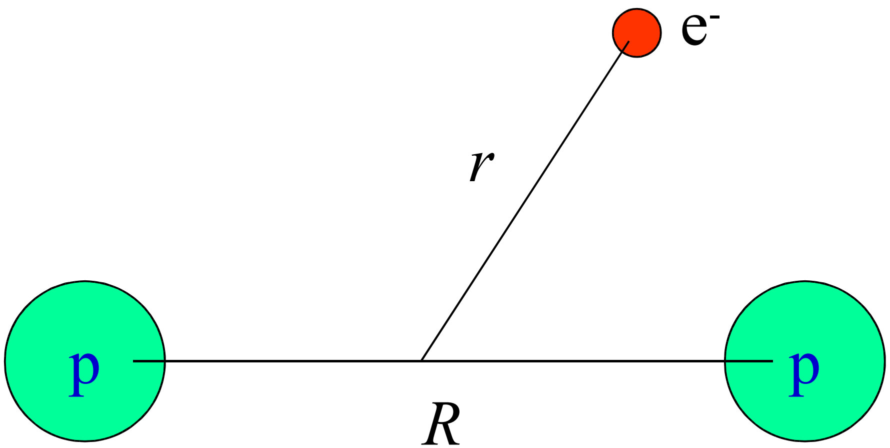
$$\hbar\Omega \ll \epsilon$$

(障壁の曲率 v.s. 内部自由度の励起エネルギー)

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

c.f. 水素分子に対する Born-Oppenheimer 近似



$$[T_R + T_r + V(r,R)]\Psi(r,R) = E\Psi(r,R)$$

1. まず陽子が止まっているとして電子の運動を考える

$$[T_r + V(r,R)]u_n(r;R) = \epsilon_n(R)u_n(r;R)$$

2. $\varepsilon_n(R)$ を R に関して最小化する

Or 2'. ポテンシャル $_n(R)$ 中の陽子間の運動を考える

$$[T_R + \epsilon_n(R)]\phi_n(R) = E\phi_n(R)$$

Adiabatic Potential Renormalization

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

When ε is large,

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

where

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

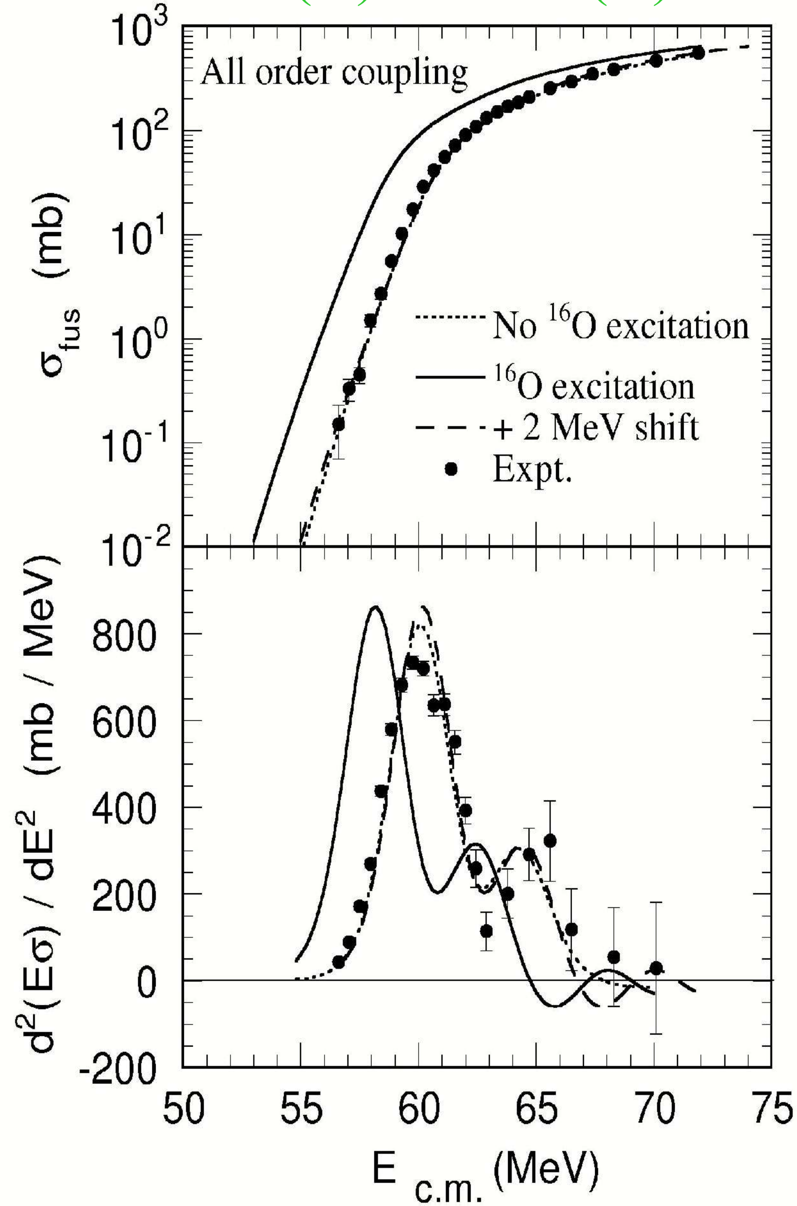
Fast intrinsic motion

→ Adiabatic potential renormalization

$$V_{\rm ad}(r) = V_0(r) + \epsilon_0(r)$$

Giant Resonances, ^{16}O(3$^-$) [6.31 MeV]

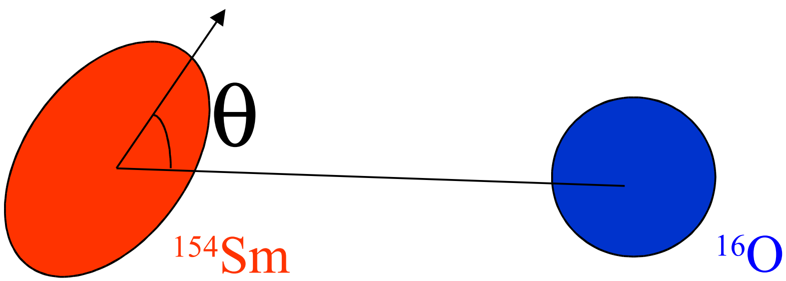
^{16}O(3$^-$) + ^{144}Sm(3$^-$)



K.H., N. Takigawa, M. Dasgupta, D.J. Hinde, J.R. Leigh, PRL79('99)2014

2つの極限: (ii) 瞬間極限

$$\epsilon \to 0$$



$$\epsilon_I = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} \to \infty$$

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)$$

Coupled-channels:

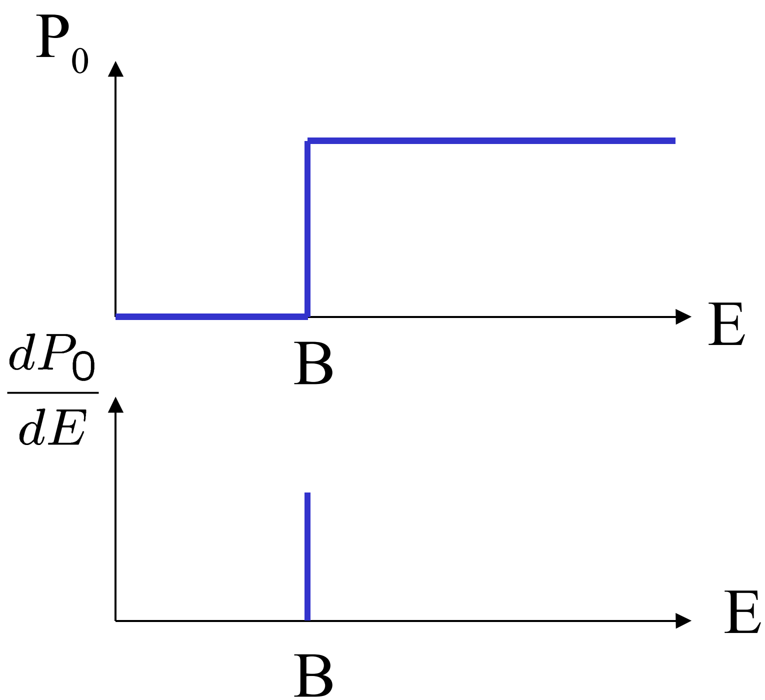
$$\begin{pmatrix} 0 & f(r) & 0 \\ f(r) & \frac{2\sqrt{5}}{7}f(r) & \frac{6}{7}f(r) \\ 0 & \frac{6}{7}f(r) & \frac{20\sqrt{5}}{77}f(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{diagonalize}} \begin{pmatrix} \lambda_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(r) \end{pmatrix}$$

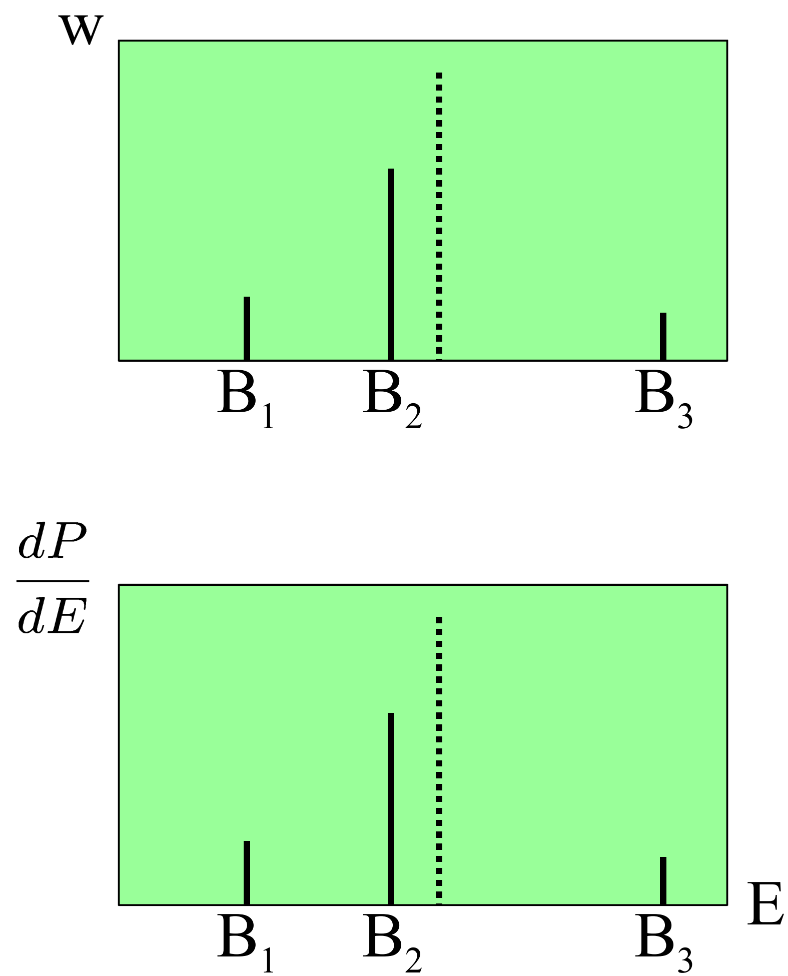
$$\Rightarrow \quad P(E) = \sum_i w_i\, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$

Slow intrinsic motion
→ Barrier Distribution

障壁分布

$$P(E) = \sum_i w_i \, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$



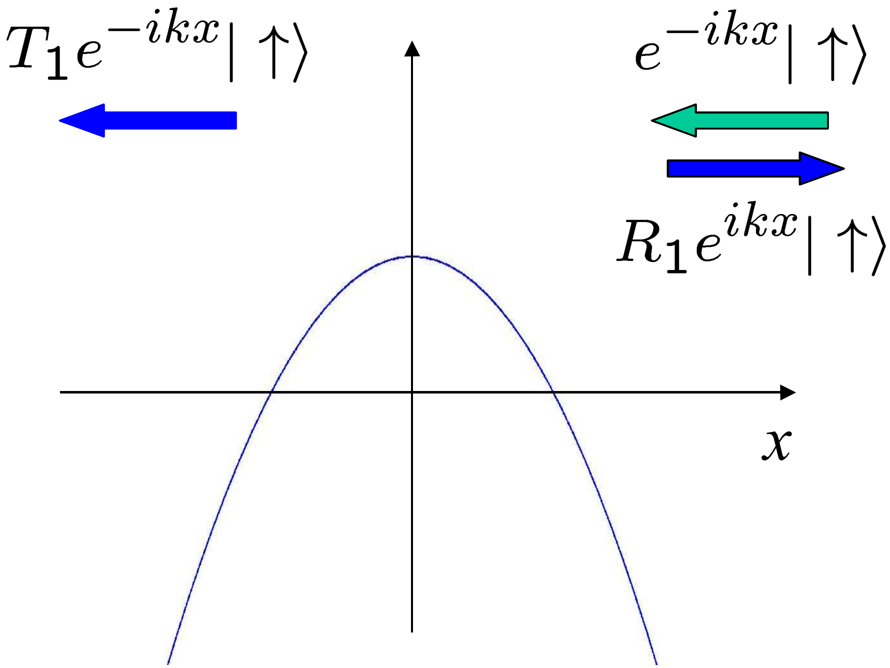


障壁分布：スピン・ハミルトニアンを用いて概念を理解する

ハミルトニアン（例１）： $$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_s(x)$$

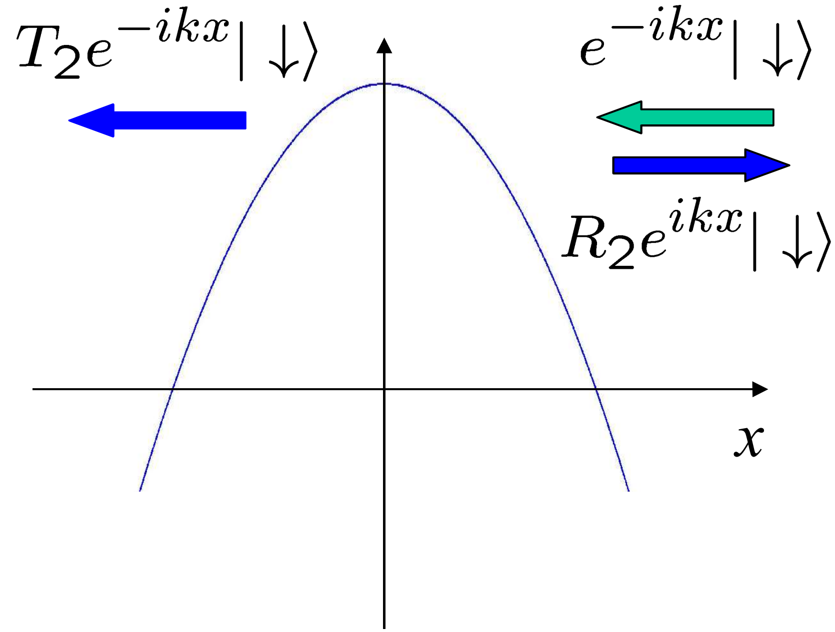
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-up の場合



$$V_1(x) = V_0(x) + V_s(x)$$

Spin-down の場合



$$V_2(x) = V_0(x) - V_s(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_1(x)$$

波動関数(一般形): $\Psi(x) = \psi_1(x)\,|\uparrow\rangle + \psi_2(x)\,|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$

$x \to \pm\infty$ での漸近形:

$$\Psi(x) \to \begin{pmatrix} C_1(e^{-ikx} + R_1 e^{ikx}) \\ C_2(e^{-ikx} + R_2 e^{ikx}) \end{pmatrix} \quad (x \to \infty)$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 T_1 e^{-ikx} \\ C_2 T_2 e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad (x \to -\infty)$$

$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$

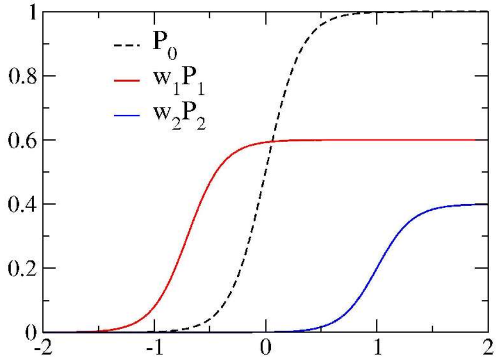
(C_1とC_2の値は粒子のスピン状態により定まる)

トンネル確率 $=$ $\dfrac{(x = -\infty \text{ でのフラックス})}{(x = \infty \text{ での入射内向きフラックス})}$

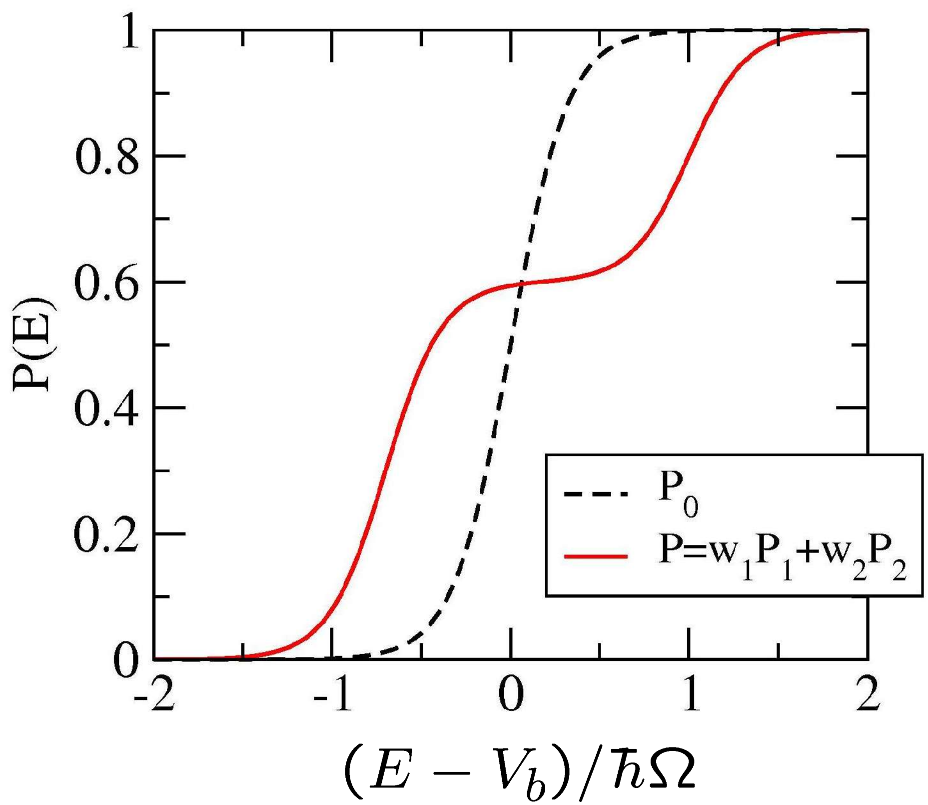
$$\boxed{\begin{aligned} P(E) &= \frac{|C_1 T_1|^2 + |C_2 T_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2} \\ &= |C_1|^2 P_1(E) + |C_2|^2 P_2(E) \equiv w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E) \end{aligned}}$$

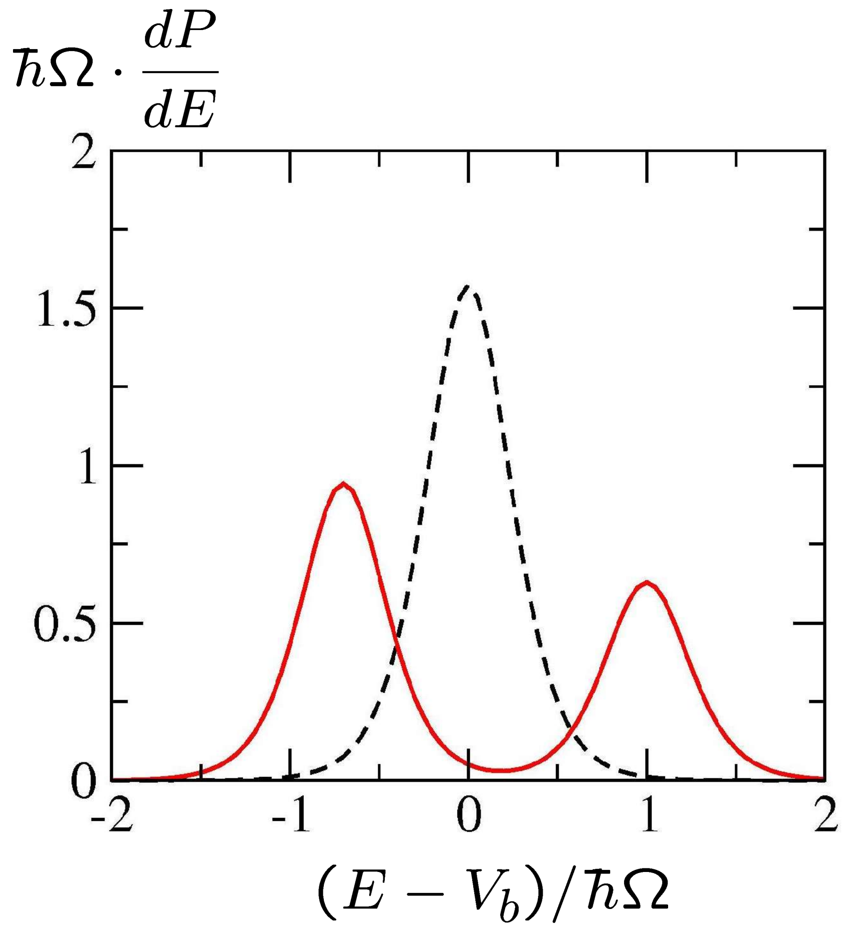
$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

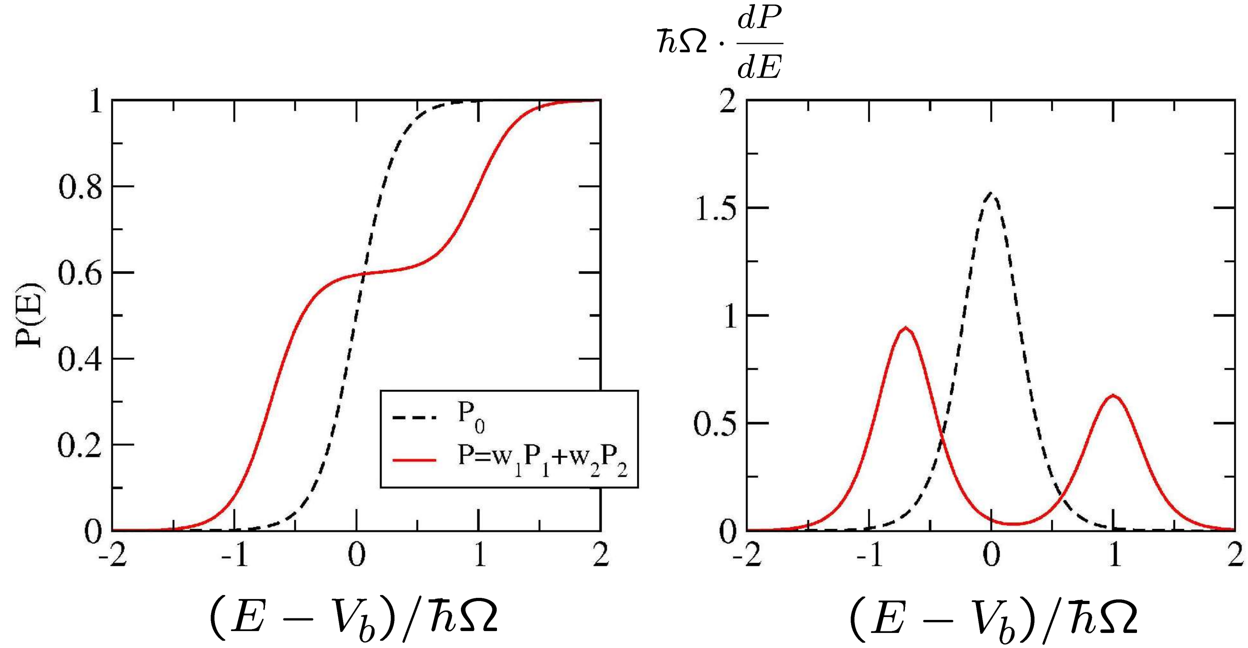
トンネル確率は2つの障壁のトンネル確率の加重平均になる



$$\begin{cases} V_1(x) = V_0(x) + V_s(x) & \Longleftarrow \ |\uparrow\rangle \\ V_2(x) = V_0(x) - V_s(x) & \Longleftarrow \ |\downarrow\rangle \end{cases}$$







- ➢トンネル確率は $E<V_b$ で増大、$E>V_b$ で減少
- ➢dP/dE は一山が二山に分かれる → 「障壁が分布する」
- ➢dP/dE のピークの位置は各障壁の高さに対応
- ➢ピークの値は重み因子に比例する

$$
\begin{aligned}
P(E) &= w_1P_1(E)+w_2P_2(E) \\
\frac{dP}{dE} &= w_1\,\frac{dP_1}{dE}+w_2\,\frac{dP_2}{dE}
\end{aligned}
$$

ハミルトニアン（例2）：非対角結合項がある場合

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_x \cdot F(x) \qquad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{t} + V_0(x)]\psi_1(x) + F(x)\psi_2(x) = E\psi_1(x) \\ [\hat{t} + V_0(x)]\psi_2(x) + F(x)\psi_1(x) = E\psi_2(x) \end{aligned}}$$

$$\phi_\pm(x) = [\psi_1(x) \pm \psi_2(x)]/\sqrt{2}$$

$$[\hat{t} + V_0(x) \pm F(x)]\phi_\pm(x) = E\phi_\pm(x)$$

反応の初期にスピン・アップの状態にあったとすると

$$\boxed{P(E) = \frac{1}{2}[P(E; V_0 + F) + P(E; V_0 - F)]}$$

ハミルトニアン（例3）：より一般の場合

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \epsilon\sigma_z + \hat{\sigma}_x \cdot F(x)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad U(x)\begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix}U^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$$

x dependent

$$\boxed{P(E) = \sum_i w_i(E)\, P(E; V_0(x) + \lambda_i(x))}$$

E dependent

K.H., N. Takigawa, A.B. Balantekin, PRC56('97)2104 $\quad w_i(E) \sim \mathrm{constant}$

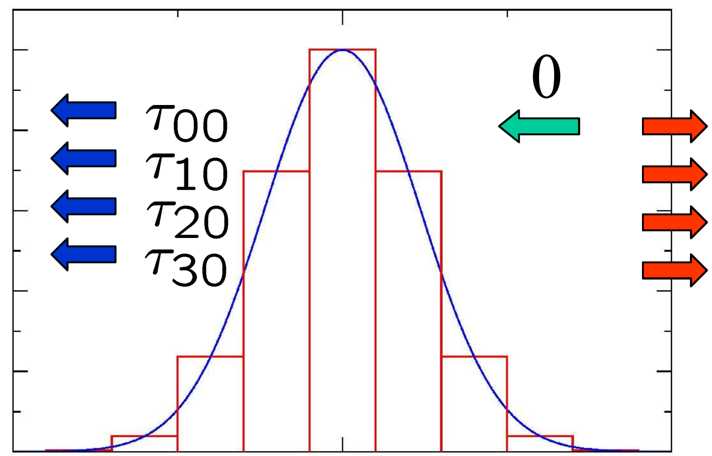
(note) 断熱極限: $\epsilon \to \infty \quad \Longrightarrow \quad w_i(E) = \delta_{i,0}$

(参考)結合チャンネル方程式を WKB 近似で解く

1次元ポテンシャルの透過確率に対する WKB 公式:

$$P_{WKB}(E) = \exp\left[-2\int_{x_0}^{x_1} dx' \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x')-E)}\right]$$

結合チャンネル問題への
一般化



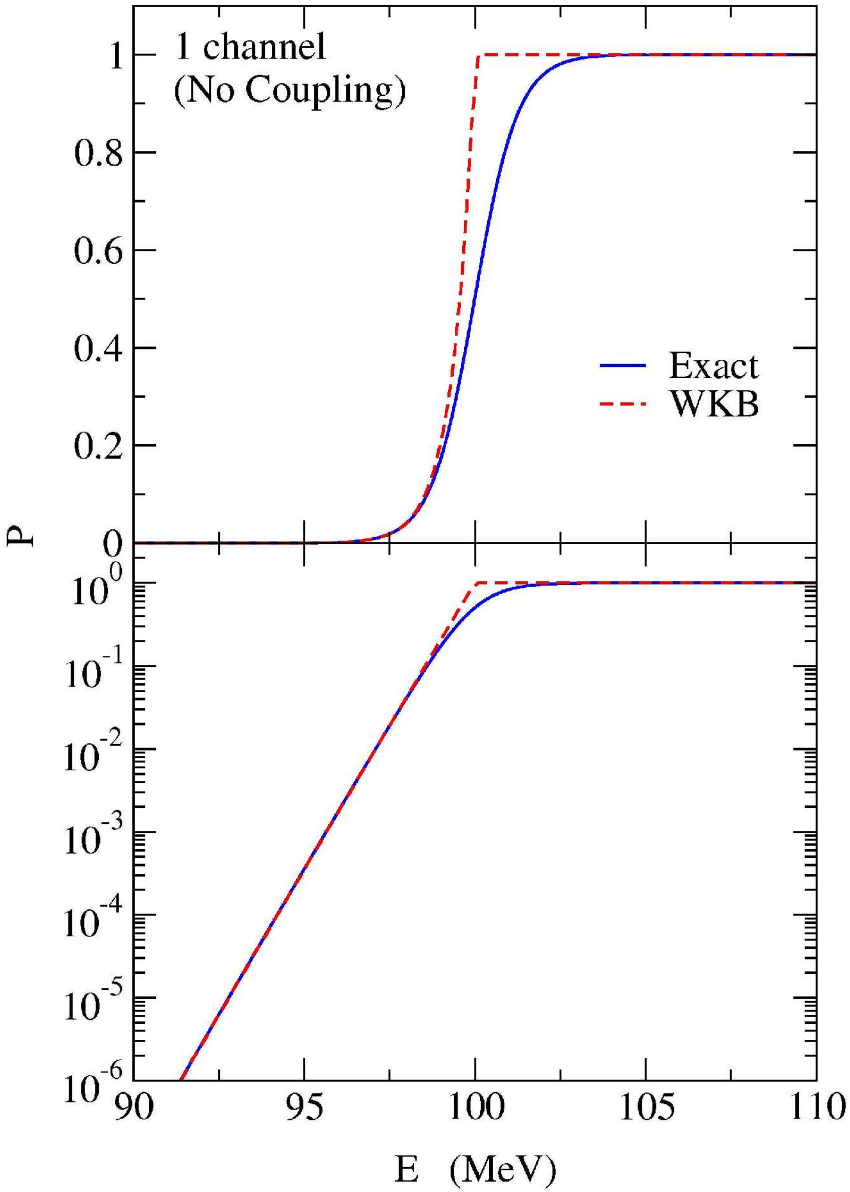
K.H., A.B. Balantekin, Phys. Rev. A70 ('04) 032106

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\prod_i e^{i\boldsymbol{q}(x_i)\Delta x}\right)$$

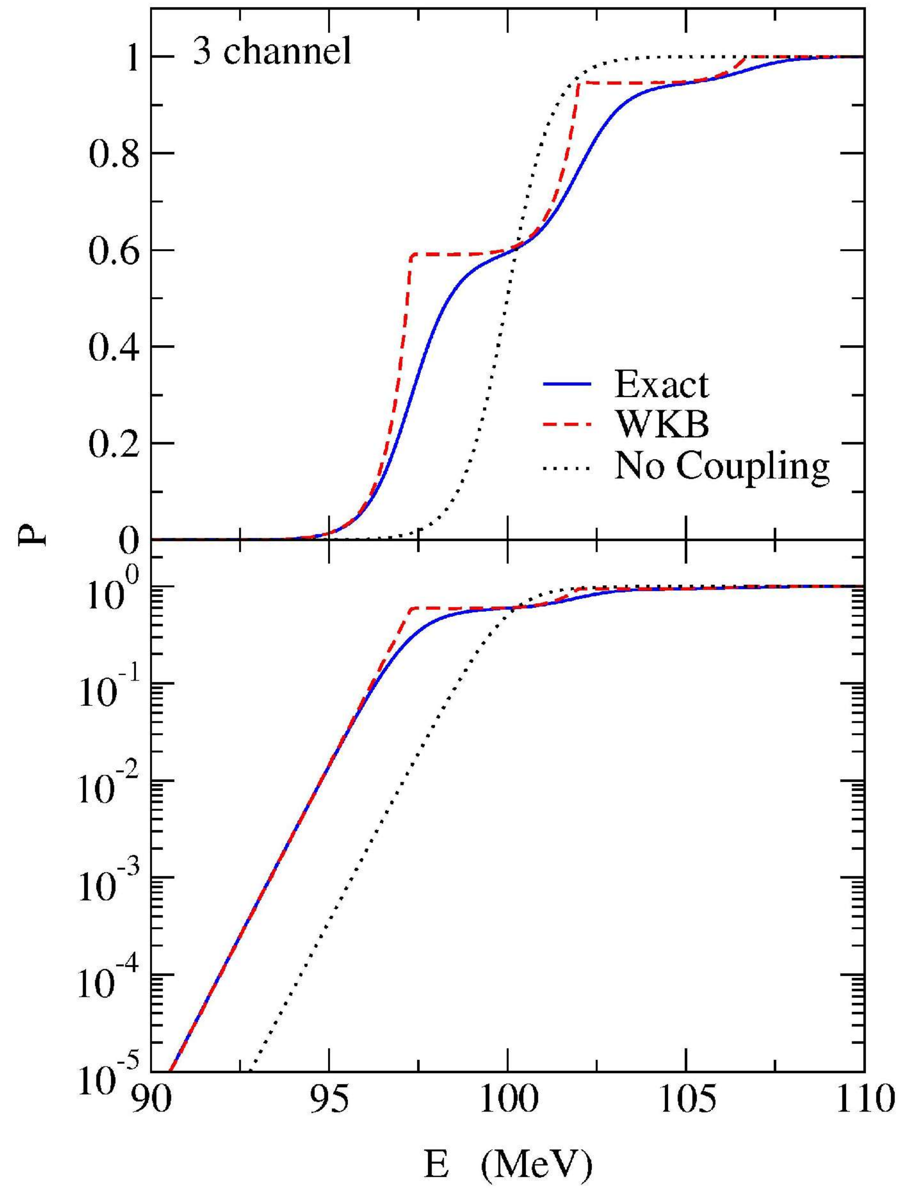
$$\boldsymbol{q}(x) = [2m(E-\boldsymbol{W}(x))/\hbar^2]^{1/2}, \qquad W_{nm}(x) = V_{nm}(x) + \epsilon_n\delta_{n,m}$$

$$\boxed{P_{WKB}(E) = \sum_n |\tau_{n0}|^2 = \sum_n \left|\left(\prod_i e^{i\boldsymbol{q}(x_i)\Delta x}\right)_{n0}\right|^2}$$

1 channel



3 channel

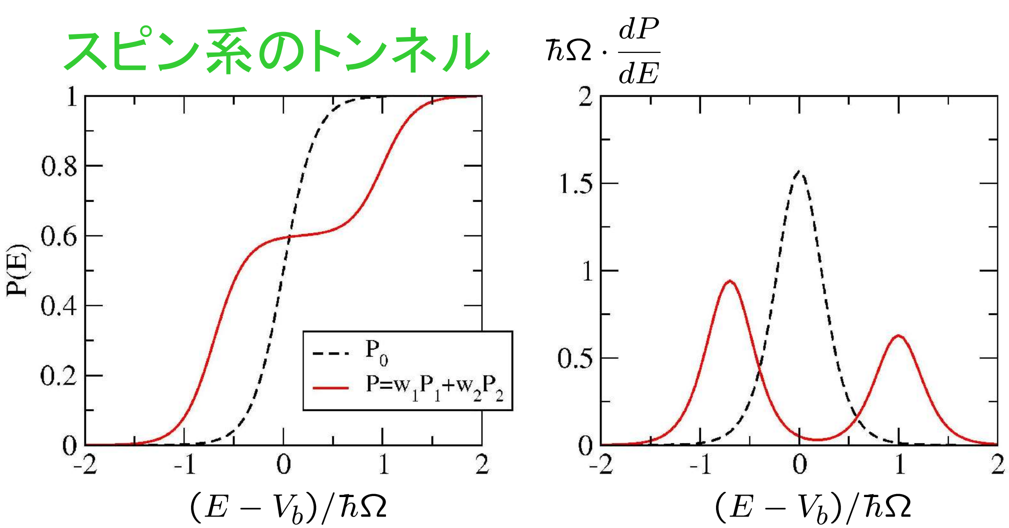


Sub-barrier Fusion と障壁分布法

- 低エネルギー核融合反応はトンネル効果で起きる
- 結合チャンネルの効果は多数の障壁の分布として理解できる
- 核融合反応断面積は多数の障壁の平均

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)$$
$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\left[\int_0^1 d(\cos\theta)P_l(E;\theta)\right]$$

スピン系のトンネル



障壁の分布の様子は
透過確率の微分をとると
はっきりと目に見える

→ 核融合反応断面積を用いて同様のことはできないか？

1つの考慮すべき点: 実験で測られるのは核融合断面積であって透過確率ではない。

$$P_{l=0}(E) \simeq \frac{1}{\pi R_b^2} \cdot \frac{d(E\sigma_{\mathrm{fus}})}{dE}$$

$$\boxed{D_{\mathrm{fus}}(E) \equiv \frac{d^2(E\sigma_{\mathrm{fus}})}{dE^2} \simeq \pi R_b^2 \frac{dP_{l=0}}{dE}}$$

（核融合障壁分布）

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

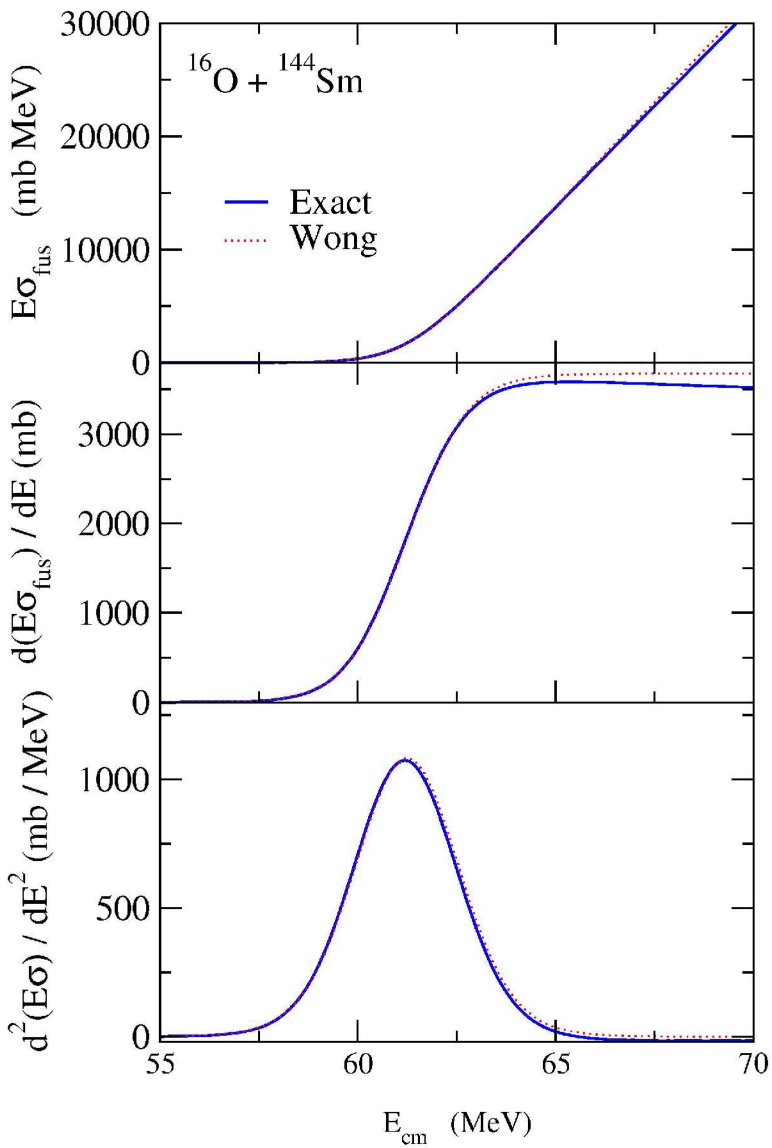
(note) 古典的な核融合反応断面積

$$\sigma_{\mathrm{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$

$$\frac{d}{dE}[E\sigma_{\mathrm{fus}}^{cl}(E)] = \pi R_b^2\, \theta(E - V_b) = \pi R_b^2\, P_{cl}(E)$$

$$\frac{d^2}{dE^2}[E\sigma_{\mathrm{fus}}^{cl}(E)] = \pi R_b^2\, \delta(E - V_b)$$

Fusion Test Function



Classical fusion cross section:

$$\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE}[E\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)] &= \pi R_b^2\, \theta(E - V_b) \\ &= \pi R_b^2\, P_{cl}(E) \\ \frac{d^2}{dE^2}[E\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)] &= \pi R_b^2\, \delta(E - V_b) \end{aligned}$$

Tunneling effect
$\longrightarrow$ smears the delta function

Fusion test function:

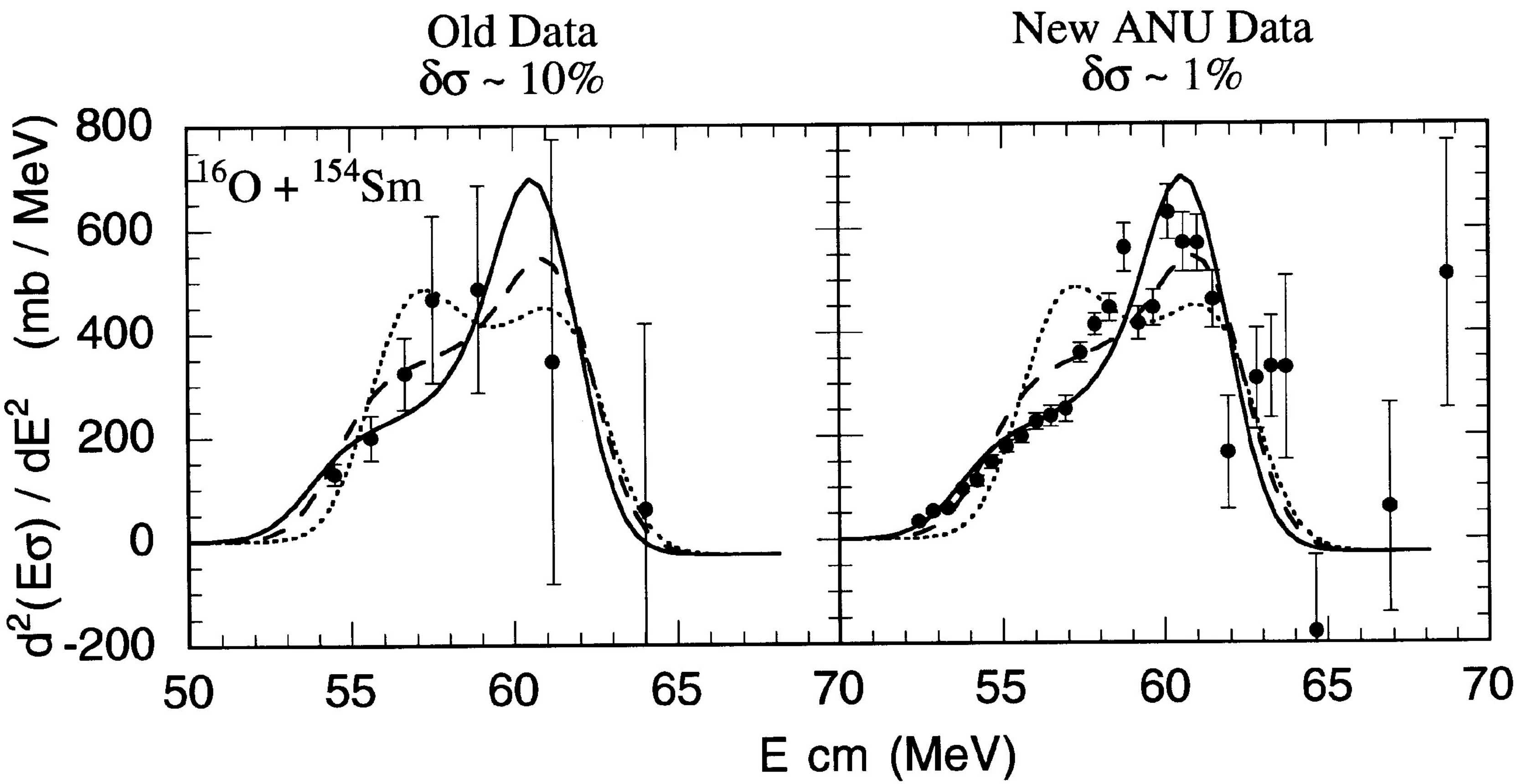
- Symmetric around $E=V_b$
- Centered on $E=V_b$
- Its integral over E is πR_b^2
- Has a relatively narrow width $(\sim 0.56\hbar\Omega)$

障壁分布測定

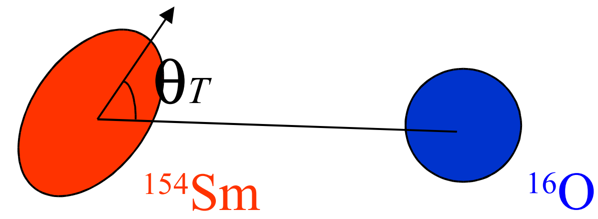
核融合障壁分布 $D_{\mathrm{fus}}(E) = \dfrac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$

２階微分をとるために非常に高精度の実験データが必要

（９０年代初頭）

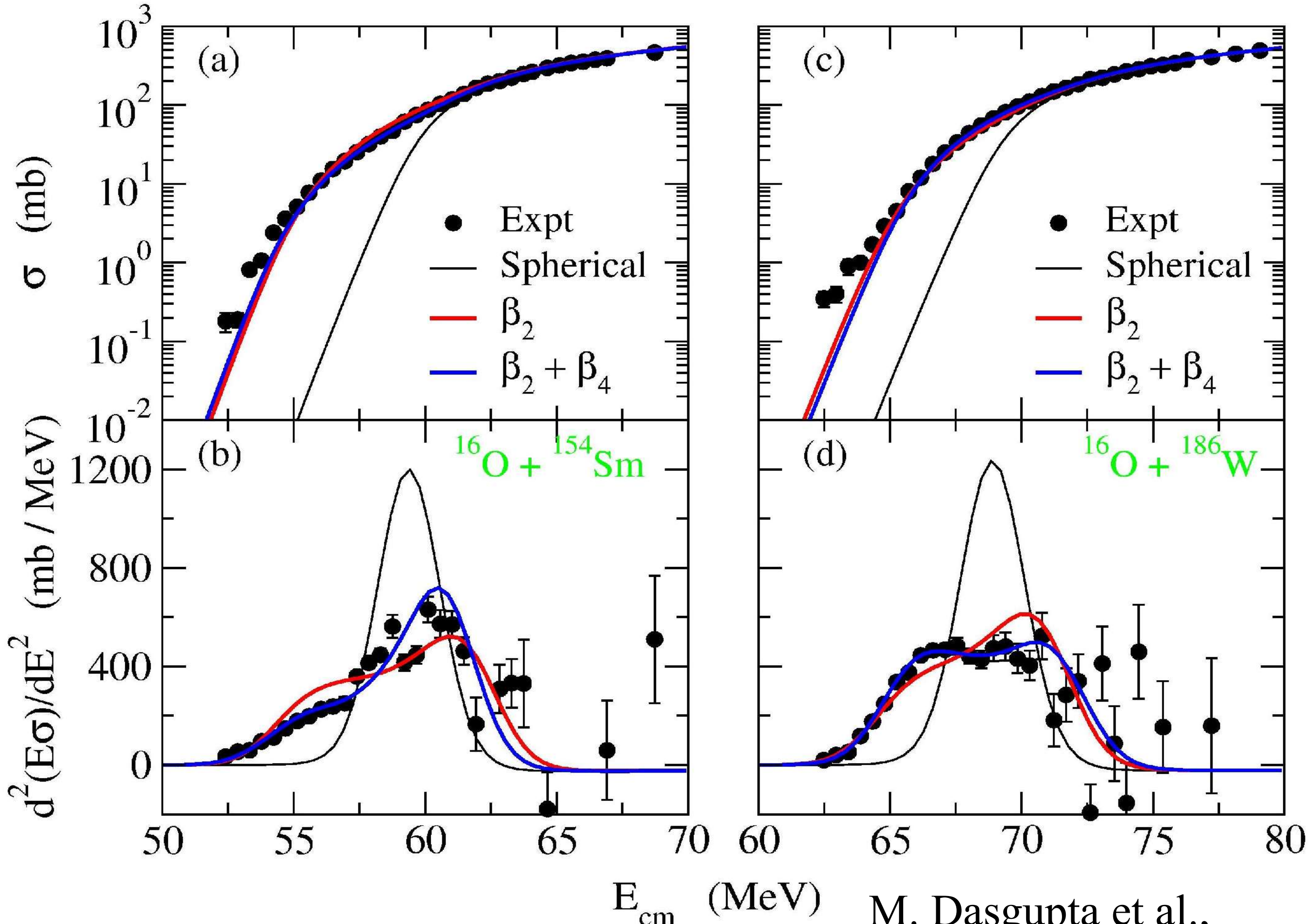


Experimental Barrier Distribution



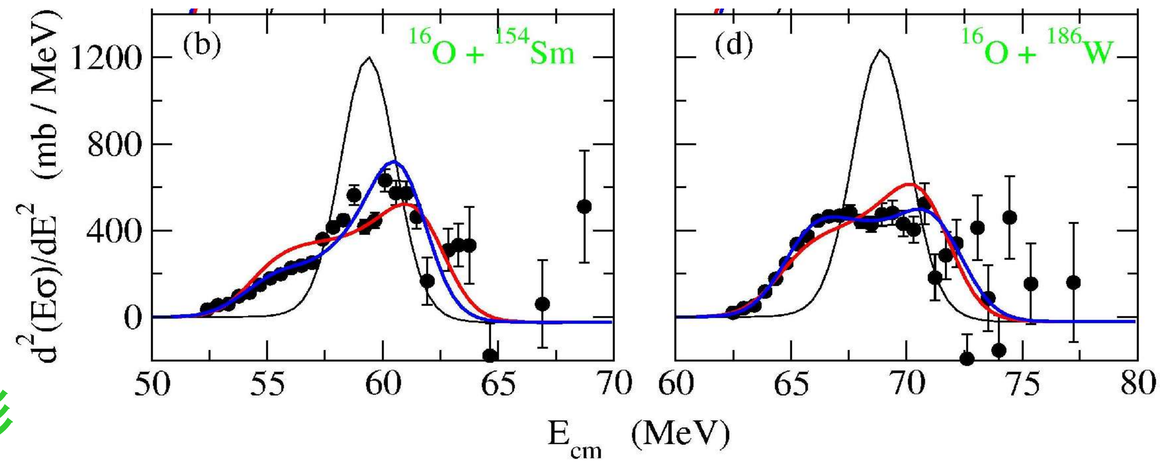
Requires high precision data

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\,\sigma_{\mathrm{fus}}(E;\theta_T)$$



M. Dasgupta et al.,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98)401

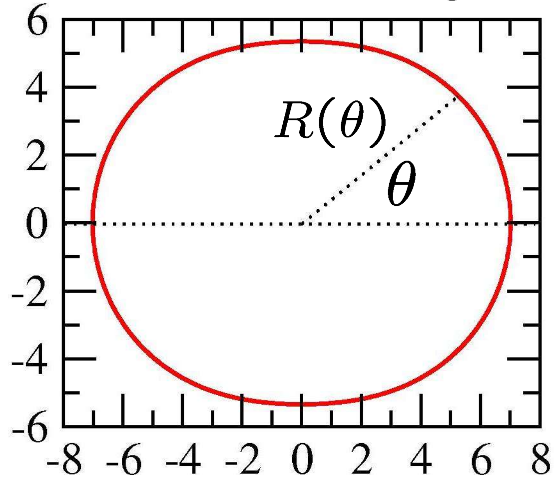
障壁分布を通じて原子核の形を視る



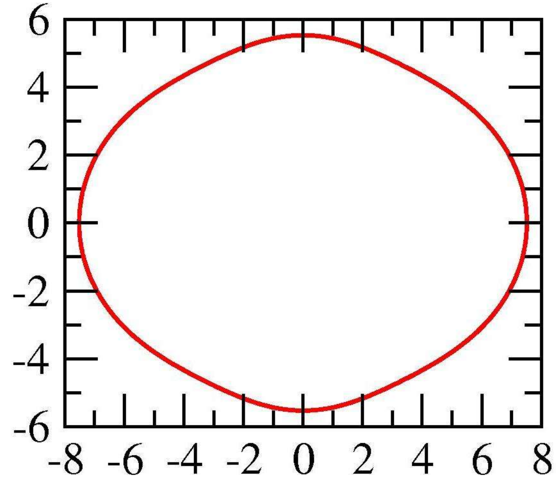
原子核の形

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \cdots)$$

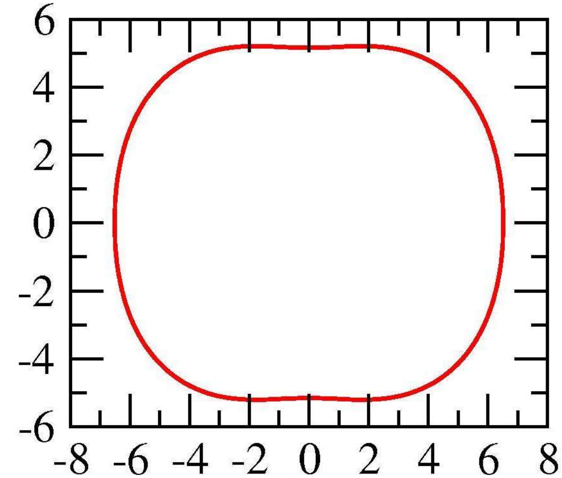
$$R_0 = 5.9 \text{ (fm)}, \quad \beta_2 = 0.3$$



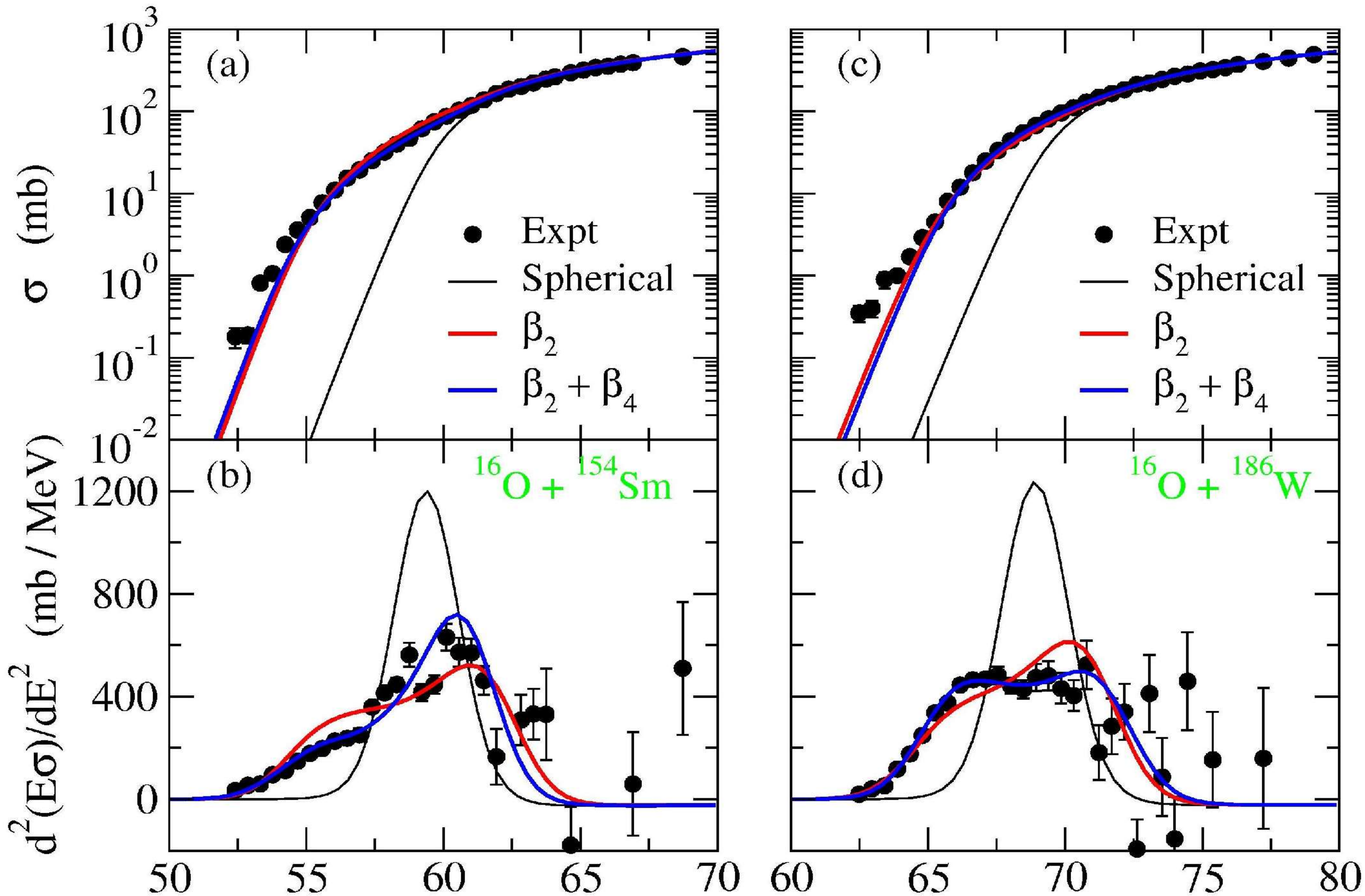
$\beta_4 = 0$



$\beta_4 = 0.1$



$\beta_4 = -0.1$



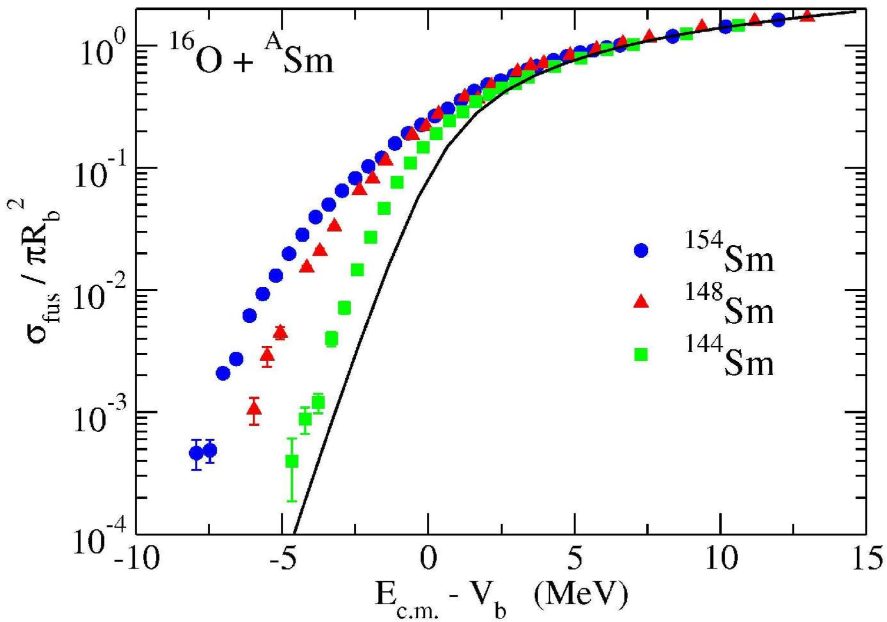
$\beta_2 = 0.33$ $\beta_2 = 0.29$

$\beta_4 = +0.05$ $\beta_4 = -0.03$

障壁分布をとることによって、β_4による違いがかなりはっきりと目に見える！

原子核に対する量子トンネル顕微鏡としての核融合反応

障壁分布法の意義



核融合反応断面積

非常に強い指数関数的エネルギー依存性

→ 核構造の詳細による違いが見えずらい

断面積を別の方法でプロットする: 核融合障壁分布

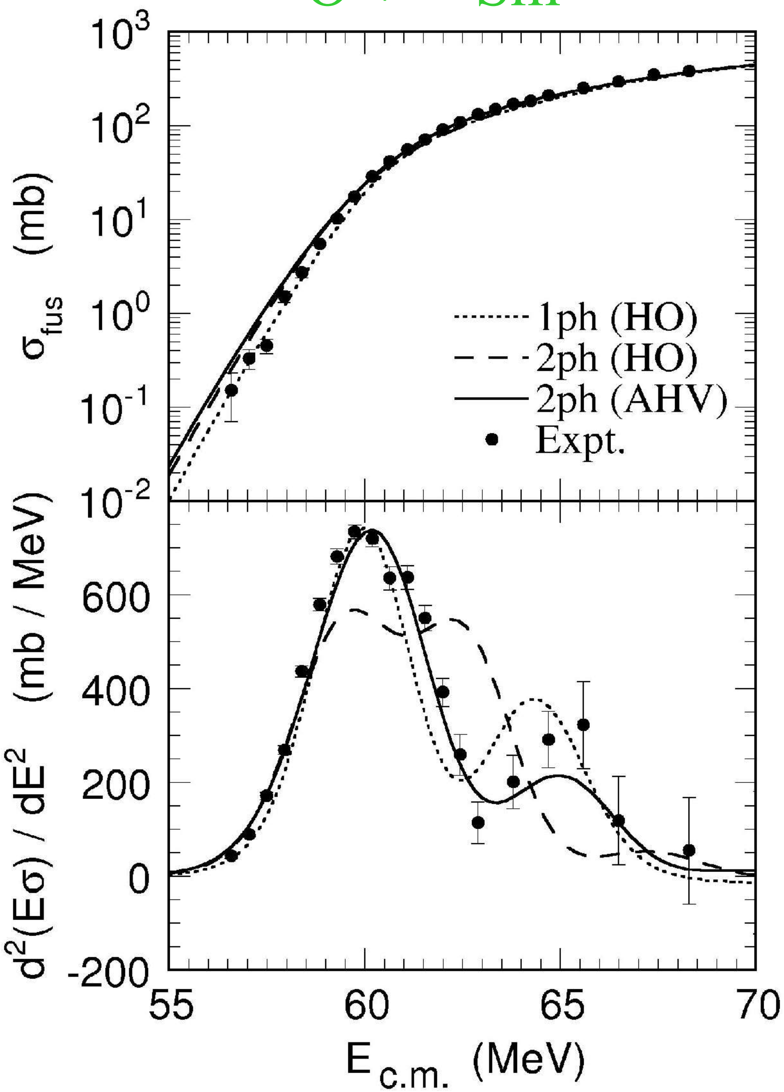
$$\boxed{D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma)}{dE^2}}$$

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

→ 核構造の詳細に敏感な関数

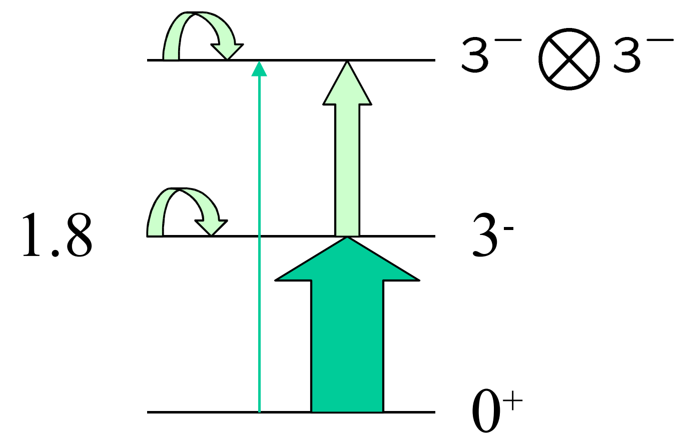
球形振動核の例

$^{16}O + ^{144}Sm$



K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak, PRL79('97)2943

Octupole 振動の非調和性

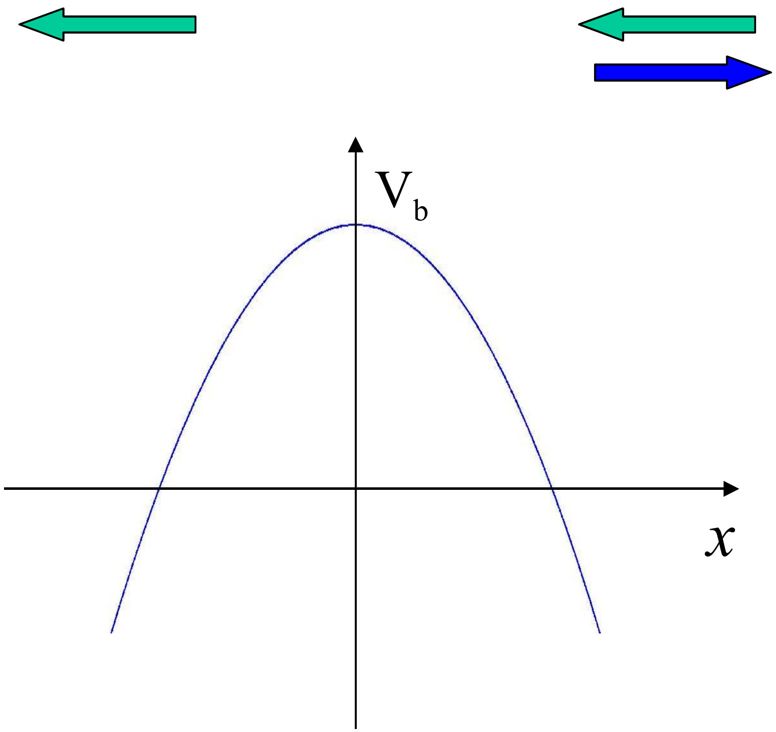


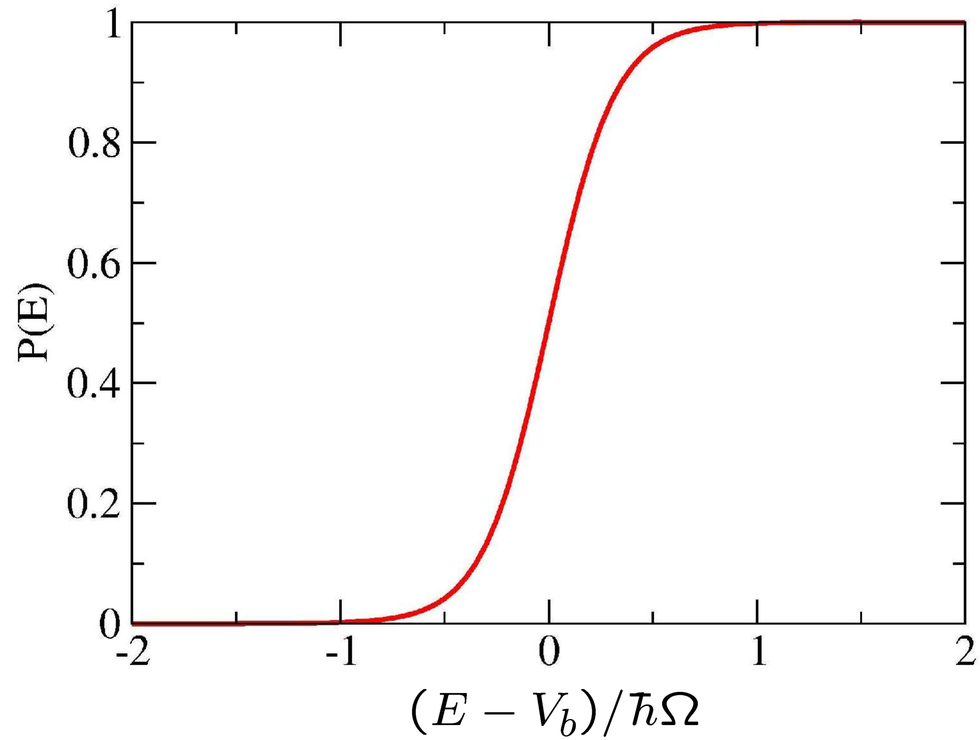
^{144}Sm

Quadrupole moment:

$$Q(3^-) = -0.70 \pm 0.02\mathrm{b}$$

量子反射と重イオン準弾性散乱





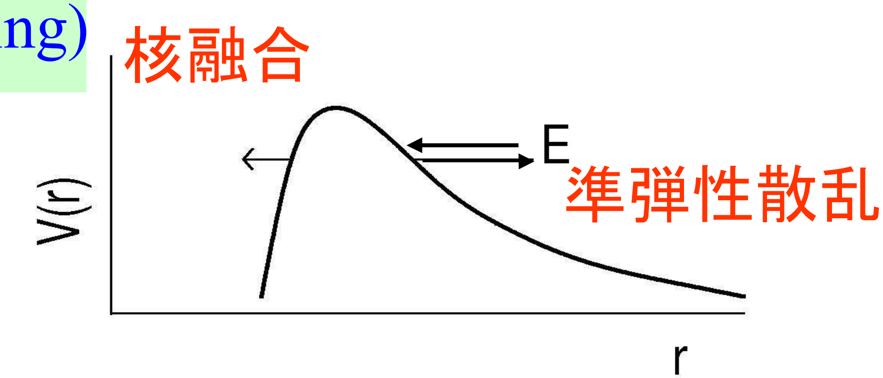
量子力学では $E > V_b$ でも反射が起こる → 量子反射

$$P(E) + R(E) = 1$$

反射確率は透過確率と同じ情報を持ち、反射確率を用いて
障壁分布を定義することも可能

準弾性散乱 (Quasi-Elastic Scattering)

核融合反応を除く全てのプロセスの和(弾性散乱＋非弾性散乱＋核子移行反応＋…….)

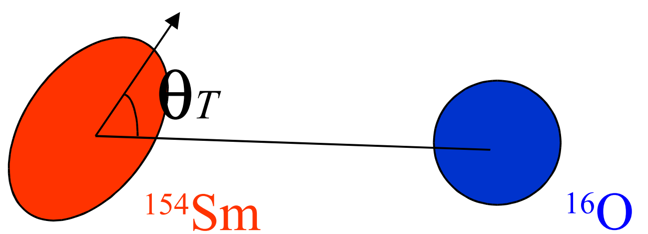


クーロン障壁で跳ね返り検出器に入ってきた粒子を全てつかまえる

反射確率に関係する

核融合反応と相補的

変形核では……



$$
\begin{cases}
\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \displaystyle\int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\mathrm{fus}}(E;\theta_T) \\
\sigma_{\mathrm{qel}}(E,\theta) = \displaystyle\sum_I \sigma(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\mathrm{el}}(E,\theta;\theta_T)
\end{cases}
$$

準弾性散乱障壁分布

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm fus}(E;\theta_T)$$

$$D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

$$\sigma_{\rm qel}(E,\theta) = \sum_I \sigma(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm el}(E,\theta;\theta_T)$$

<u>準弾性散乱障壁分布:</u>

$$\boxed{D_{\rm qel}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)}$$

H. Timmers et al., NPA584('95)190

(note) クーロン力が強い場合の古典的弾性散乱の断面積:

$$\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi) = \sigma_R(E,\pi)\theta(V_b - E)$$

$$\frac{\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} = \theta(V_b - E) = R(E)$$

Quasi-elastic Test Function

Classical elastic cross section (in the limit of a strong Coulomb):

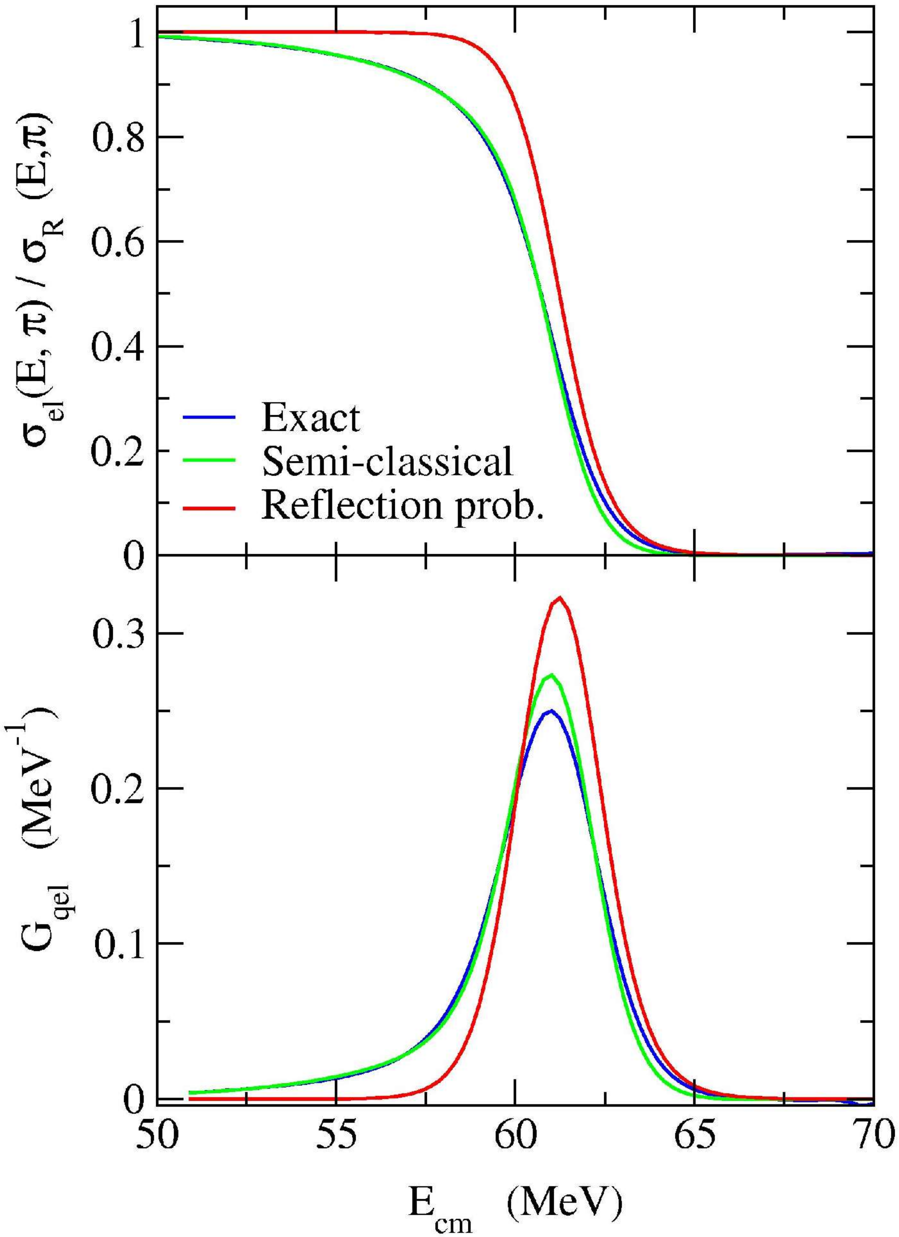
$$\sigma_{\mathrm{el}}^{cl}(E,\pi) = \sigma_R(E,\pi)\theta(V_b - E)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\sigma_{\mathrm{el}}^{cl}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} &= \theta(V_b - E) = R(E) \\ -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{el}}^{cl}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) &= \delta(E - V_b) \end{aligned}}$$

Nuclear effects $\longleftarrow$ Semi-classical perturbation theory

$$\boxed{\frac{\sigma_{\mathrm{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} \sim \left(1 + \frac{V_N(r_c)}{ka}\frac{\sqrt{2a\pi k\eta}}{E}\right)\cdot R(E)}$$

S. Landowne and H.H. Wolter, NPA351('81)171
K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610



Quasi-elastic test function

$$\boxed{G_{\mathsf{qel}}(E) \equiv -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\mathsf{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)}$$

- ➢The peak position slightly deviates from V_b
- ➢Low energy tail
- • Integral over E: unity
- • Relatively narrow width

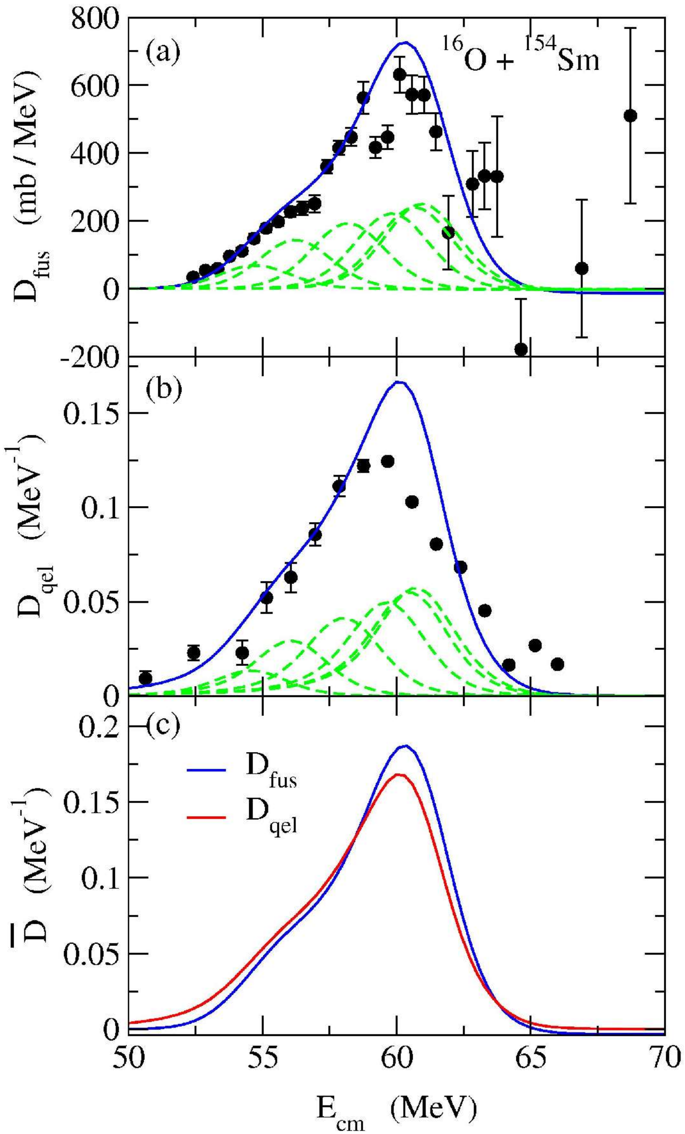
➡ Close analog to fusion b.d.

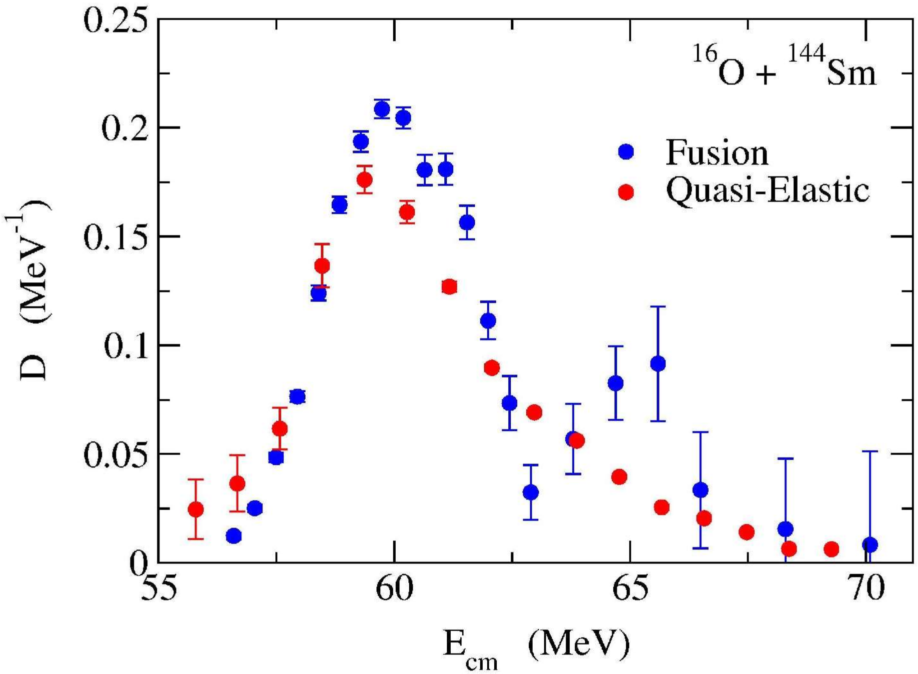
D_{fus} と D_{qel} の比較

核融合障壁分布
準弾性障壁分布

$$D_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\mathrm{fus}})}{dE^2}$$

$$D_{\mathrm{qel}}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{qel}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)$$





H. Timmers et al., NPA584('95)190

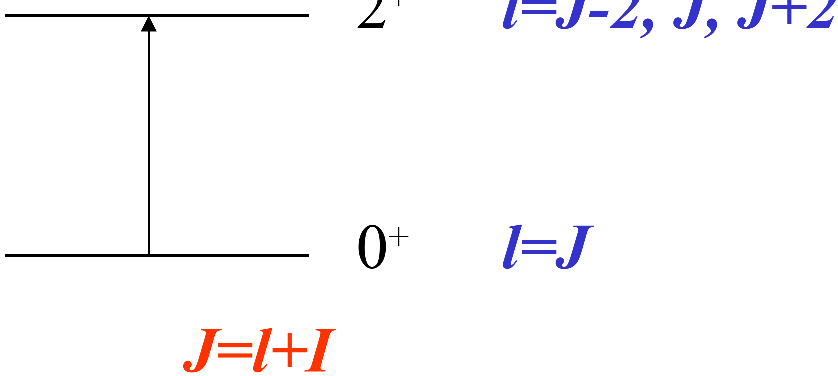
大まかな構造は非常に似通っている

K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610

Comment on the iso-centrifugal approximation

Inelastic excitations: Coupled-channels method

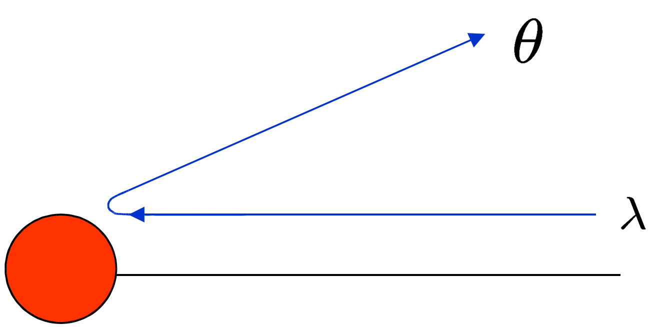
Inherent problem $\longrightarrow$ dimensionality



Truncation	Dimension
2^+	4 $\longrightarrow$ 2
4^+	9 $\longrightarrow$ 3
6^+	16 $\longrightarrow$ 4
8^+	25 $\longrightarrow$ 5

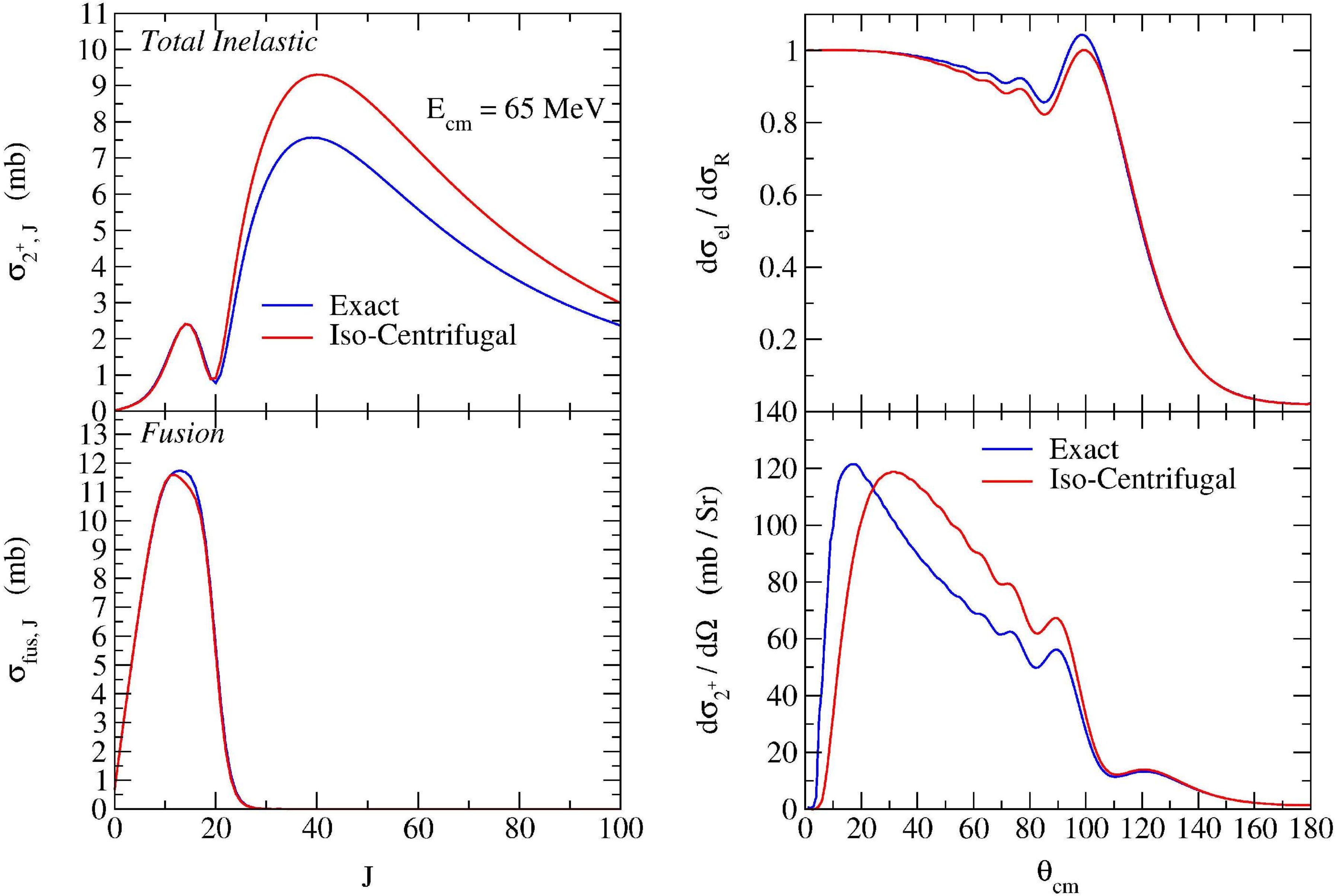
Iso-centrifugal approximation:

λ: independent of excitations



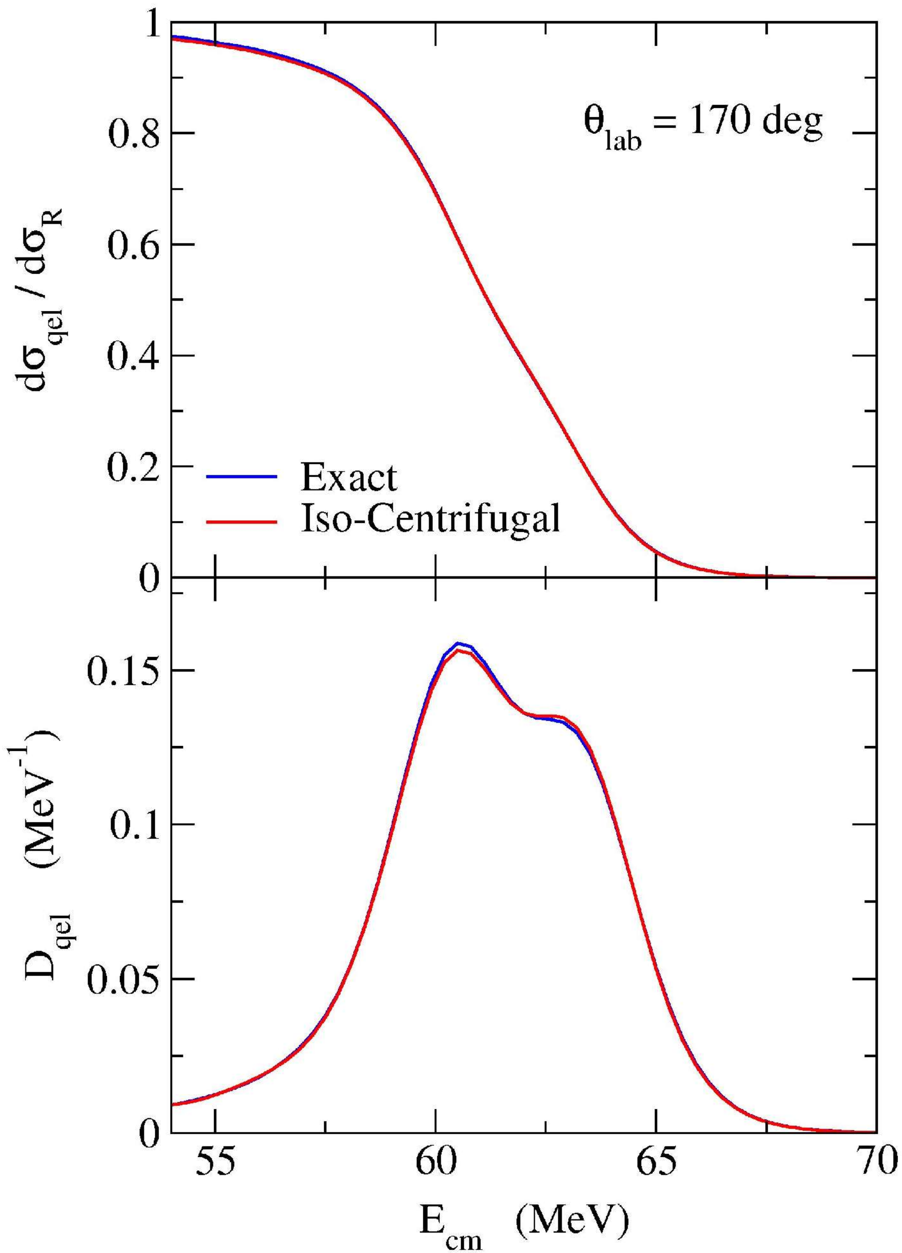
- Works well for fusion
- Not successful for scattering

$^{16}O + ^{144}Sm\ (2^+)$



Total Inelastic
E_{cm} = 65 MeV
Exact
Iso-Centrifugal
$\sigma_{2^+, J}$ (mb)
Fusion
$\sigma_{fus, J}$ (mb)
J
$d\sigma_{el} / d\sigma_R$
$d\sigma_{2^+} / d\Omega$ (mb / Sr)
θ_{cm}

$^{16}O + ^{144}Sm\ (2^+)$



Backward scattering

↔ Small ang. mom.

Iso-centrifugal approximation works good enough

- Simplifies C.C. calculations
- Ensures the similarities between D_{fus} and D_{qel} in CC systems

準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\rm qel}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) \qquad D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えばβ_4の符号）

・実験精度が比較的悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）

・核融合に比べて実験が容易

準弾性散乱：後方にきた粒子をすべて押さえればよい
核融合：recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

・一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

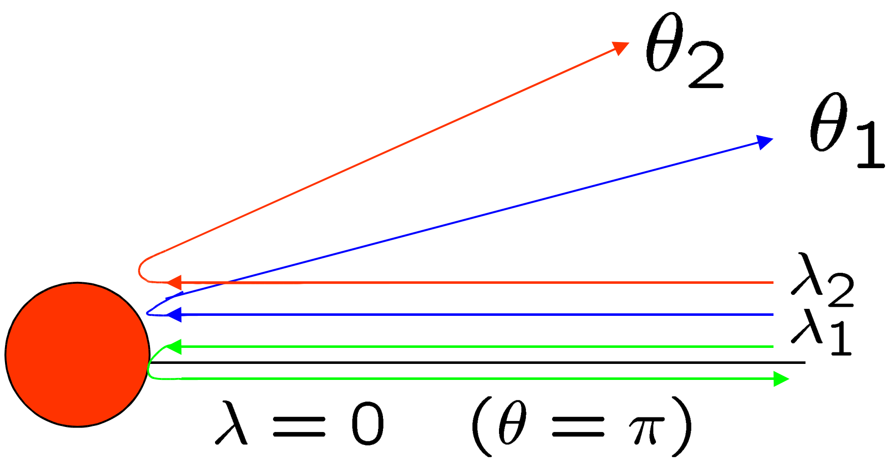
$\longleftrightarrow$

Scaling property of D_{qel}

Expt.: impossible to perform

at $\theta = \pi$

→ Relation among different θ?



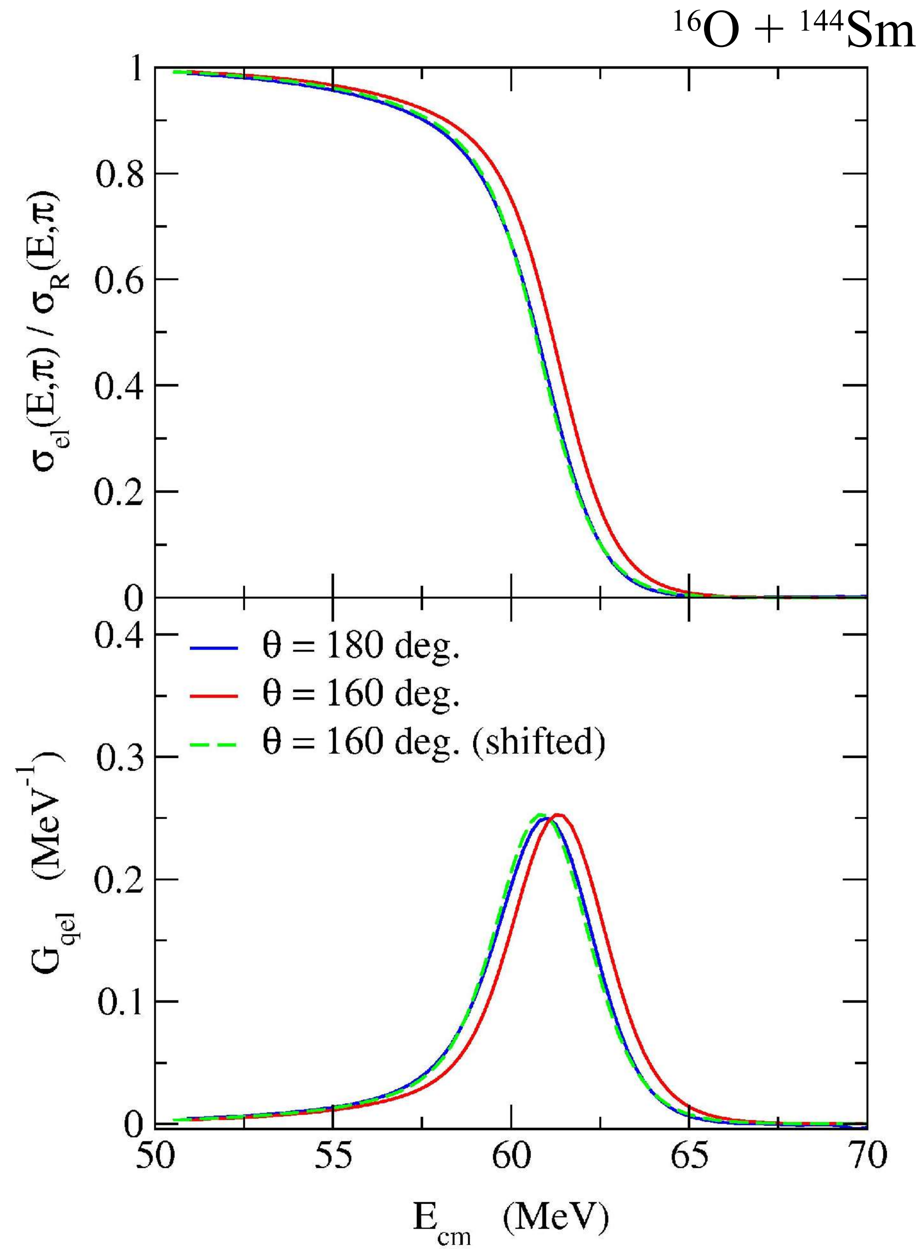
Effective energy:

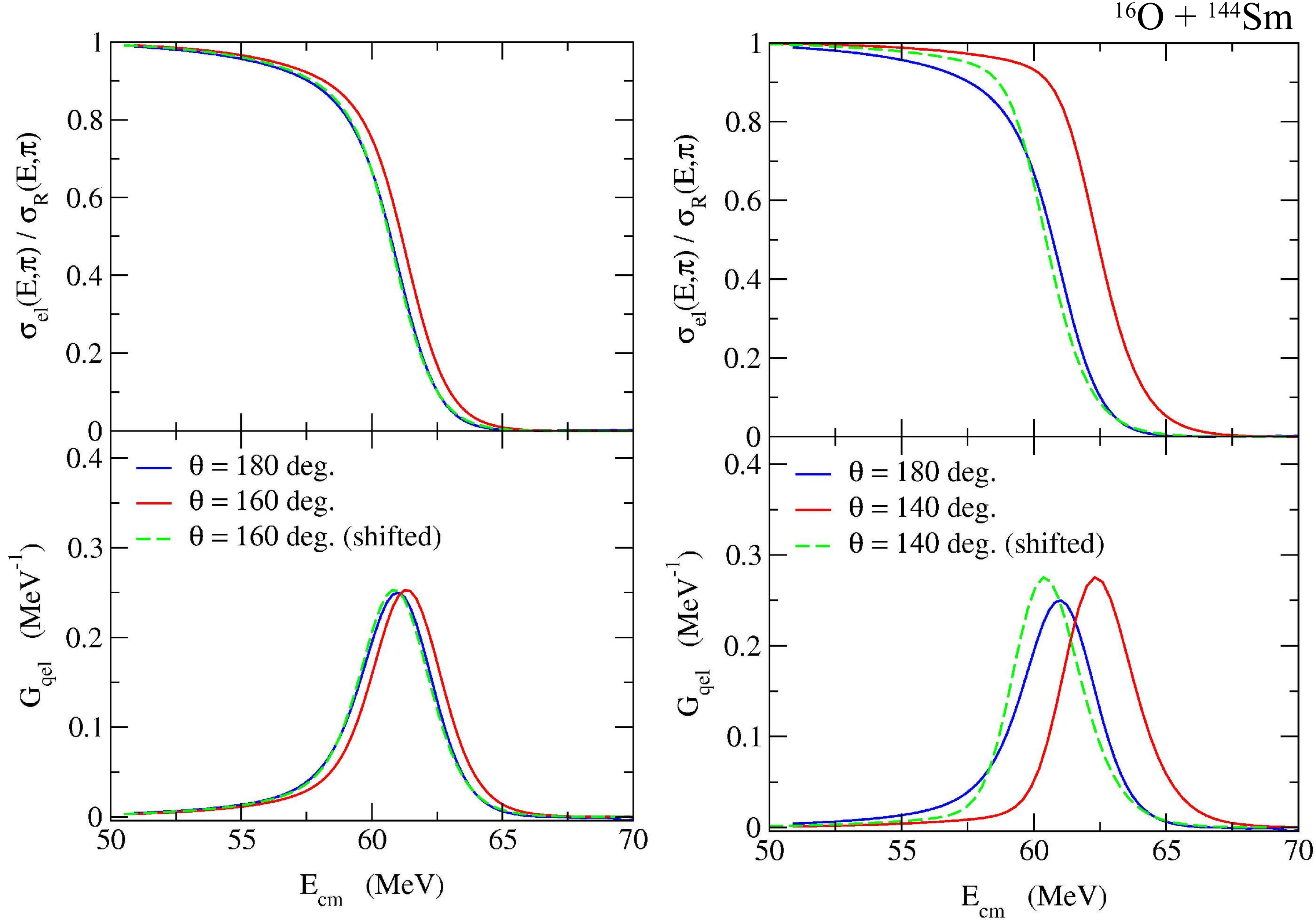
$$E_{\text{eff}} \sim E - \frac{\lambda_c^2 \hbar^2}{2\mu r_c^2}$$

$$= 2E \, \frac{\sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)}$$

$$D_{\text{qel}}(E, \theta) \sim D_{\text{qel}}(E_{\text{eff}}, \pi)$$

$$\lambda_c = \eta \cot(\theta/2)$$




$^{16}O + ^{144}Sm$
$\sigma_{el}(E,\pi) / \sigma_R(E,\pi)$
G_{qel} (MeV^{-1})
E_{cm} (MeV)
θ = 180 deg.
θ = 160 deg.
θ = 160 deg. (shifted)
θ = 180 deg.
θ = 140 deg.
θ = 140 deg. (shifted)

準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\rm qel}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) \qquad D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えばβ_4の符号）

・実験精度が悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）

・核融合に比べて実験が容易

準弾性散乱：後方にきた粒子をすべて押さえればよい

核融合：recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

・一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

$\longleftrightarrow$ 散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

→ **ビーム強度が強くない不安定核ビームの実験に最適**

準弾性散乱を用いて不安定原子核の構造研究が可能

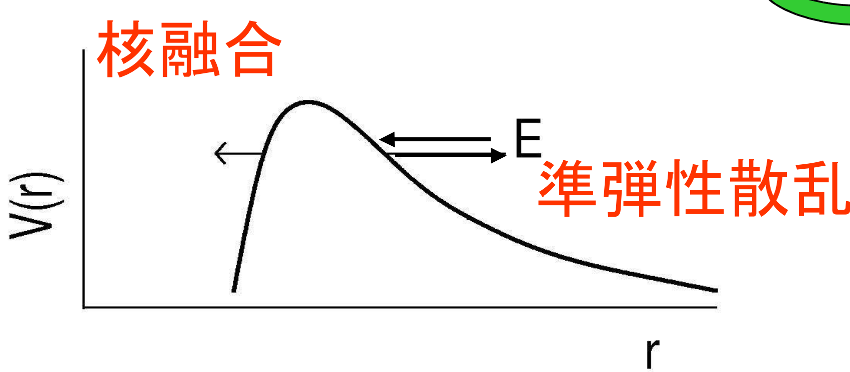
不安定核ビームを用いた実験

核融合障壁分布：高精度の核融合反応断面積が必要

不安定核ビーム：ビーム強度は安定核ビームに比べて弱い

高精度のデータは現段階では望み薄

他の手段で障壁分布を引き出すことは可能か？

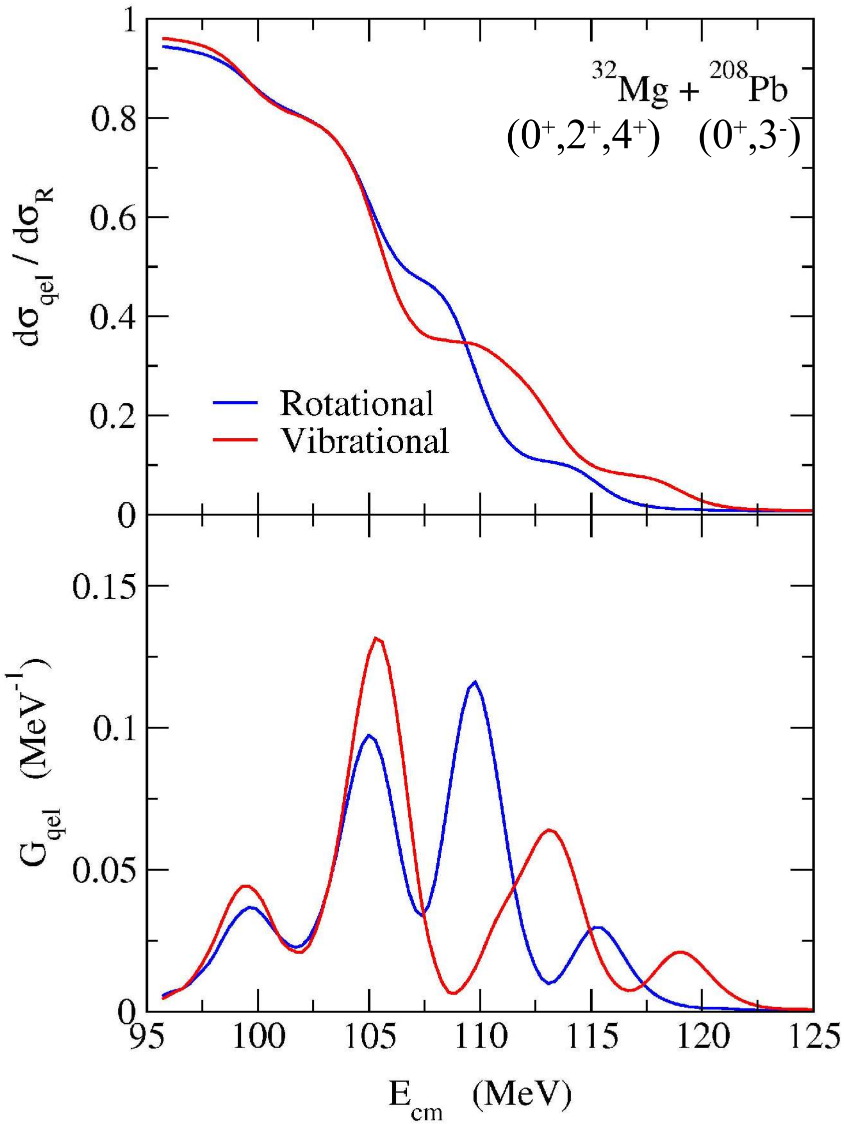


透過確率の代わりに
反射確率に注目

$$P + R = 1$$

準弾性散乱障壁分布

不安定核ビームを用いた準弾性障壁分布



K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610

低強度不安定核ビーム:

準弾性障壁分布の測定

（例えば）

^{32}Mg

理研における実験:

大きいB(E2)と小さいE_{2+}

$\longleftrightarrow$ 変形？

平均場近似計算 $\longrightarrow$ 球形？

^{16}C

陽子と中性子の異なる

（静的）変形？

中性子のみの振動励起？

（その他に）

中性子過剰核に特有な集団励起構造の探求

準弾性散乱を用いた重イオン間ポテンシャルの研究

1) 中性子過剰核の核融合反応

Reference cross section をどうとるか？

→「何に比べて」cross section が enhance/hinder しているのか？

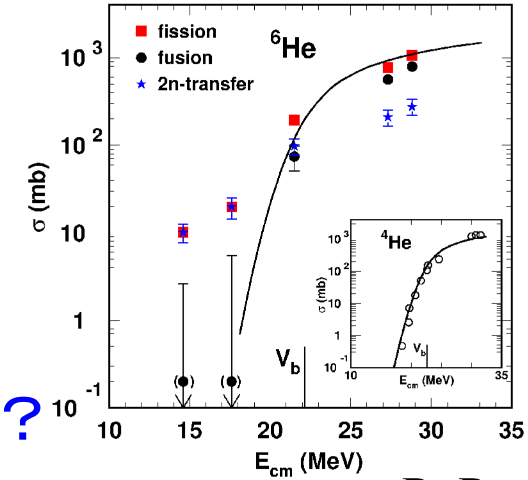
i) Tightly bound 系との比較

^{11}Be + ^{209}Bi ⟷ ^{10}Be + ^{209}Bi

^{6}He + ^{238}U ⟷ ^{4}He + ^{238}U

Break-up の効果を pin down できるか？

Static な効果と dynamical な効果の分離？



R. Raabe et al.

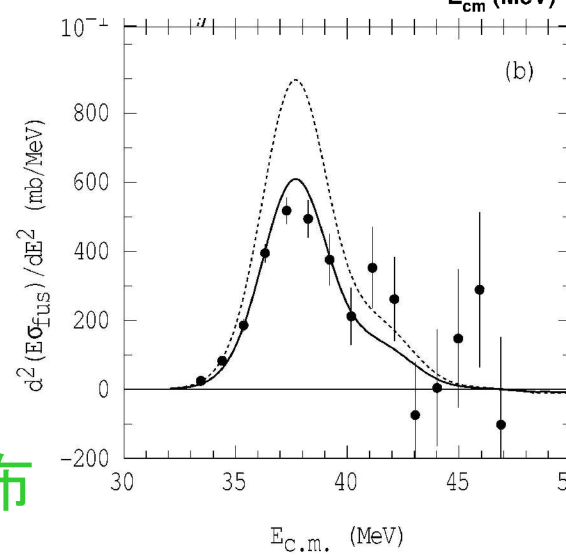
Nature('04)

ii) Average fusion barrier の測定

Fusion barrier distribution をとる

^{9}Be + ^{208}Pb

^{6,7}Li + ^{209}Bi



M. Dasgupta et al.

PRL82('99)1395

中性子過剰核：準弾性散乱障壁分布

2) 超重核生成反応におけるクーロン障壁の系統性

超重核生成反応: 非常に小さい断面積

反応に最適なエネルギーの選択が重要

↑

しかし、クーロン障壁に関する系統性は存在せず

↓

準弾性障壁分布を用いた平均ポテンシャルの高さの測定

原研における計画

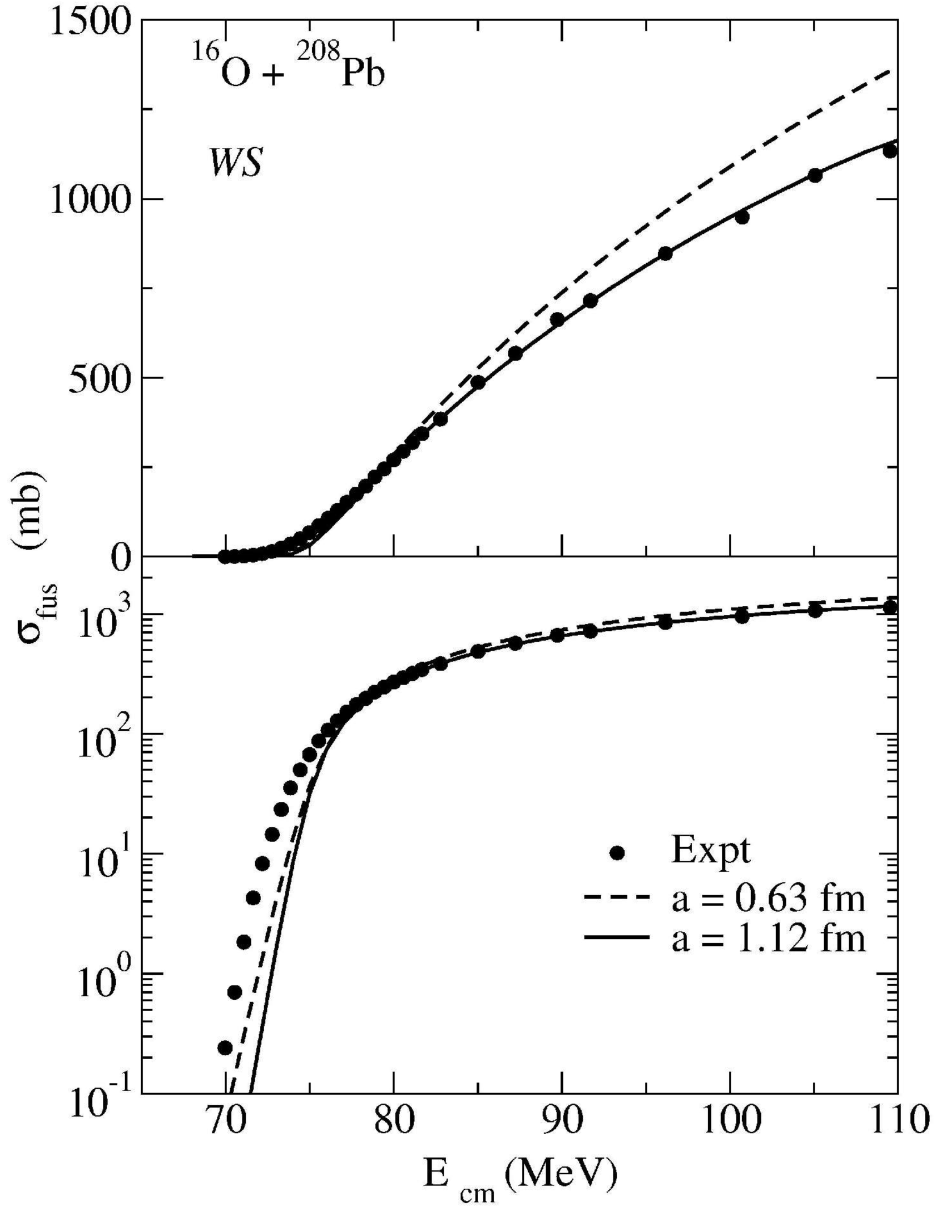
Cold fusion reactions: ^{50}Ti,^{54}Cr,^{58}Fe,^{64}Ni,^{70}Zn+^{208}Pb,^{209}Bi

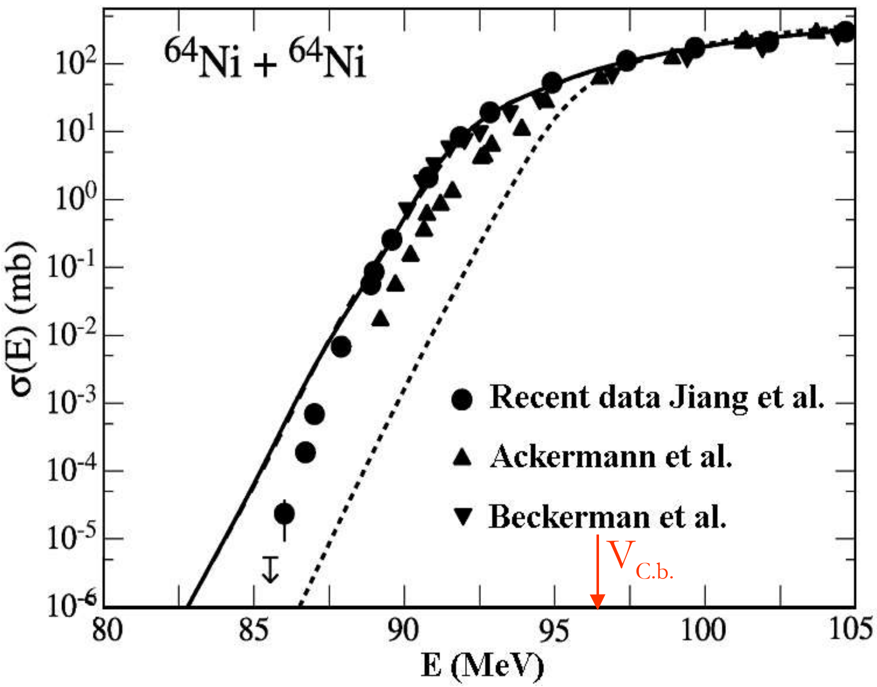
3) Surface diffuseness problem

$V_N(r) = -V_0/[1+\exp((r-R_0)/a)]$

Scattering processes: a ~ 0.63 fm

Fusion: a = 0.75 ~ 1.5 fm

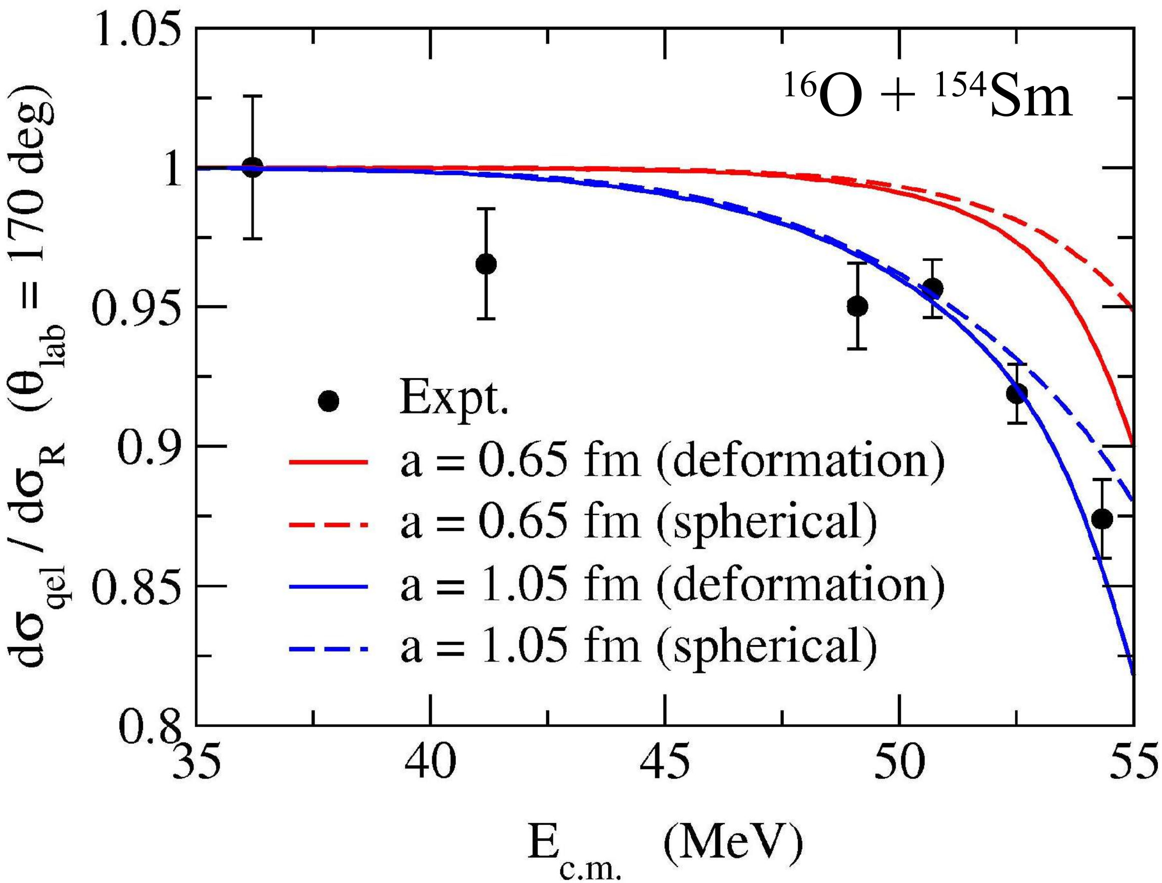




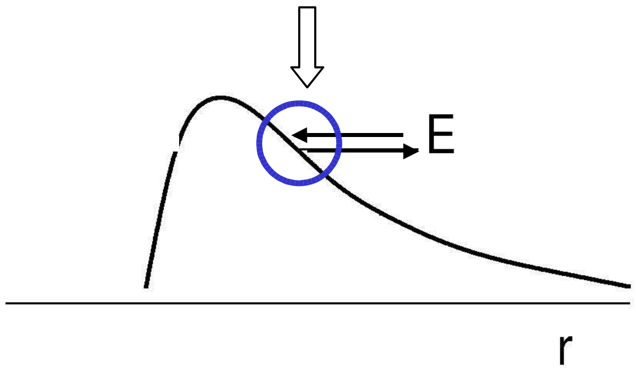
C.L. Jiang et al., PRL93('04)012701

Quasi-elastic scattering at deep subbarrier energies?

K.H., T. Takehi, A.B. Balantekin, and N. Takigawa, Phys. Rev. C71('05)044612

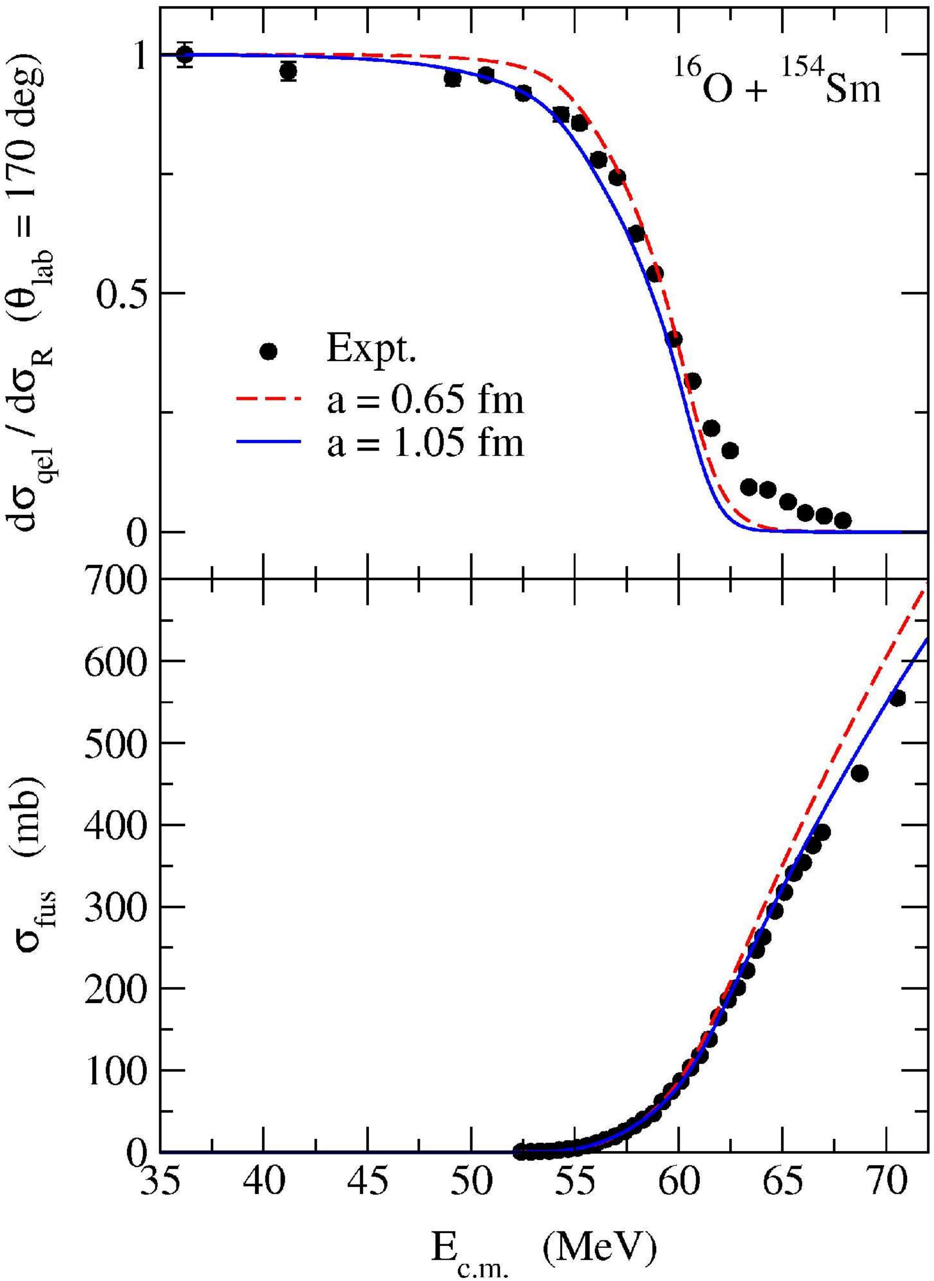


QEL at deep subbarrier energies: sensitive only to the surface region



$$\frac{\sigma_{\mathrm{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} \sim \left(1 + \frac{V_N(r_c)}{ka}\frac{\sqrt{2a\pi k\eta}}{E}\right)\cdot R(E)$$

$$\sim 1 + \frac{V_N(r_c)}{ka}\frac{\sqrt{2a\pi k\eta}}{E}$$



^{16}O + ^{154}Sm
Expt.
a = 0.65 fm
a = 1.05 fm
$d\sigma_{qel} / d\sigma_R$ (θ_{lab} = 170 deg)
σ_{fus} (mb)
$E_{c.m.}$ (MeV)