微分方程式の縮約と包絡線—くりこみ群法の幾何学的解釈と不変多様体の構成

国広悌二　〈京都大学理学研究科 606–8502 京都市左京区北白川追分町 e-mail: kunihiro@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp〉

くりこみ群方程式を用いた非線型方程式の漸近解析の方法を発展方程式の縮約への応用に焦点を絞り、初等的且つ明快な手続きとして解説する。そこでは、永年項を含む摂動解の包絡線として大域解を構成することで不変多様体の構成とその上での縮約された方程式の導出が達成される。くり込み群方程式が包絡線方程式として解釈できることを示す。くり込み群の方法に基づく縮約理論は、非線形振動子に対する Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky や蔵本によって定式化された縮約の一般論によく対応することが強調される。

1. はじめに

まず、次の簡単な力学の問題を摂動展開で解くことから話しを始めよう:

$$\ddot{x} + \epsilon\dot{x} + x = 0, \tag{1.1}$$

ここで ϵ は正の小さなパラメータ。これは減衰振動の方程式でその厳密解は

$$x(t) = A(t)\sin\phi(t), \tag{1.2}$$

ここに $A(t) = \bar{A}\exp(-\epsilon t/2)$, $\phi(t) = \omega t + \bar{\theta}$ $(\omega \equiv \sqrt{1-\epsilon^2/4})$ である。($\bar{A}$、$\bar{\theta}$ は定数。) ϵ に比例する減衰項のために角速度 ω は小さくなり、振幅 $A(t)$ は時間と共にゆっくりと減小する。

単純な摂動展開 $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots$ を行ってこの方程式を解くことを試みよう。$x_0 = A\sin(t+\theta)$ と取ると、1 次の摂動方程式は、

$$\mathcal{L}x_1 \equiv \ddot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_0 = -A\cos(t+\theta), \tag{1.3}$$

となる。ただし、$\mathcal{L} \equiv d^2/dt^2 + 1$。この方程式は 減衰のないときの強制振動の方程式と同じであり、しかも外力の振動数が固有振動数と一致するので 共鳴が起こり、振幅は時間とともに単調に増大する；$x_1 = -A/2\cdot t\sin(t+\theta)$. これは「永年項」である。2 次の摂動でも同様のことが起こり、結局 2 次の摂動解は

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(t+\theta) - \epsilon\frac{A}{2}t\sin(t+\theta) \\ &\quad +\epsilon^2\frac{A}{8}\{t^2\sin(t+\theta) - t\cos(t+\theta)\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

と書け、永年項のため振幅は時間の冪で増大していく。これは減衰とはほど遠く、全くまずい結果である。永年項の出現は左辺の線形演算子 $\mathcal{L}$ のゼロモードが非斉次項になっていることに起因している。

しかし、一方で (1.4) は厳密解 (1.2) を ϵ について展開した式になっている。実際、摂動解は ϵ^2 のオーダーで $x \simeq A(1-\epsilon/2\cdot t+\epsilon^2/8\cdot t^2)\sin((1-\epsilon^2/8)t+\theta) \simeq A\exp(-\epsilon t/2)\sin(\sqrt{1-\epsilon^2/4}t+\theta)$ とまとめることができる。

ここに、摂動展開の典型的な問題が現れている。斉次方程式を与える線形演算子 $\mathcal{L}$ のゼロモードが存在するとき、単純な摂動展開には永年項が出現し摂動展開が破綻する。そこで課題は永年項の出現をどう避けるか、あるいは、摂動級数を如何に 総和するか、ということである。さらに、摂動の「総和」された項は小さいパラメータに依存しているので、少なくとも一部の摂動の効果は振幅や位相などのゆっくりした運動に「くり込める」ことが予想されるので、そのようなゆっくりしたスケールの運動を分離し、明示的な方程式が得られることが望ましい。それはそのスケール固有の運動法則を抉り出すとともに、自由度の縮減を行うことを意味する。実際、減衰振動の場合、振幅 $A(t)$ は次の簡単な微分方程式を満たしている；$\dot{A} = -\epsilon/2\cdot A$. この解説で説明する「くり込み群法」と呼ばれる方法[1, 2] は、これらの課題を初等的且つ系統的に実行する方法である。

いうまでもなく、くりこみ群 (RG) の方法は、場の理論や臨界現象などの統計物理学の問題に適用され大きな成功を収めている[3]。RG は最初、摂動論に基づいて定式化されたが、その本質は非摂動的である。それを明らかにしたのは Wilson[4] である。

くりこみ群の考え方はおおざっぱには以下のように定式化される: $\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda)$ を非常に大きなエネルギースケール Λ_0 から Λ まで積分して得られた有効作用とする; ただし、$\boldsymbol{g}(\Lambda) = (g_1, g_2, ..., g_n)$ は結合定数のセットである。$\boldsymbol{g}$ が Λ に依存することが重要である。くりこみ群方程式は次の等式を要請することにより得られる；$\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda) = \Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda'), \Lambda')$. ここで、 極限 $\Lambda' \to \Lambda$ を取ると,

$$\frac{d\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda)}{d\Lambda} = 0, \tag{1.5}$$

が得られる。これは Wilson のくりこみ群方程式[4] である。あるいは、Wegner[5] にならってフロー方程式とも呼ばれる。この方程式は摂動論と無関係に成立している。

RG のこの非摂動性のため、くりこみ群には少なくとも次の２つのメリットがある。（１）低次の摂動計算の結果に、くりこみ群方程式を作用させることであるクラスのダイアグラムを無限次足し上げることができる。すなわち、RG 法は摂動級数の総和法になっている。（２）Wilson 型の RG は、低エネルギーでの実効的な、すなわち、低エネルギーおよび長波長の領域で漸近的に厳密な有効作用あるいはハミルトニアンを得る体系的な方法になっている。

ところで、摂動級数が発散級数になっていることは場の理論に限らず数学を使うすべての科学の分野で一般的であり[1]、何らかの便利な「総和法」が必要とされ、実際、いく

[1] 永年項は場の理論における対数発散項に対応している

つかの総和法が知られている[6]。また、ゆっくりした長波長の運動を記述する少数自由度の方程式をもとの多自由度の系から取り出す課題、あるいはより一般に、系に存在する運動のいくつかのスケールを分離し、あるスケールの運動法則を抉り出すことは、パターン形成の物理を含む統計物理学、多体系の集団運動理論等、物理学のほとんどあらゆる分野で基本的な課題であり、理想化を一つの柱とする物理学の精神そのものであるとも言える。

９０年代初頭にイリノイ・グループ[1] によって、非線形拡散方程式や、その他様々な非線形（偏）微分方程式の漸近解の解析に、くりこみ群の方法が有効であることが示され、さらに応用範囲が広がった。これは非平衡系研究者のみならず、（応用）数学者にも多大なインパクトを与えて今でも盛んに研究されている。彼らの方法の処方箋は場の理論や統計物理におけるくりこみ群法に馴染みのある人には理解しやすいであろう。その「哲学的」背景も含めた含意のある解説が大野によって与えられている[2]。

この解説ではくりこみ群法[1] による縮約の背景にある一般的論理構造を明らかにし、その方法を「解析のことば」を用いて[7] 説明する。この方法の初等的かつ明快な手続きがより明らかになるはずである[2]。くりこみ群法による方程式の縮約が可能であるのは、非摂動演算子の固有値がある性質を持ち、非摂動項に永年項が現れる場合である。その典型例は非摂動演算子の固有値の実数部がゼロの場合である。大ざっぱに言えば、中立安定解[9] というものになっている場合である。この場合の縮約は、蔵本[10] が提示した発展方程式の縮約の普遍的構造と一致することを強調する。

また、くりこみ群方程式が古典解析でよく知られている包絡線を構成するための基本方程式[11] と同じ形であることを指摘し、くりこみ群法による漸近解析の解析的な側面が包絡線の概念[3]を使って解釈できることを示す[7]。

もちろん、くりこみ群の数理がすべて包絡線の概念に帰着されるわけではないことは強調されるべきであるが、この解釈による定式化は場の理論のくりこみ群に不慣れな人達、たとえば、数学者などには、微分方程式の問題を古典解析の言葉で記述しているので理解しやすいかもしれない。この解説は極簡単な例から始めるので学部学生以上なら十分理解可能である。

[2]イリノイグループのくりこみ群法については、非常に多くの研究がされており、いくつかの流儀による再定式化もされている[8]。しかし、それらを公平に網羅し解説することは不可能なので、編集者からの要請により、ここでは主に著者と共同研究者による定式化にもとづいた解説になっていることをお断りしておく。

[3]包絡線の概念が理論物理学において有効であることが最初に示されたのは、鈴木増雄氏による CAM(Coherent Anomaly Method)[12] においてであろう。

2. 線形振動子における「縮約」

「はじめに」で取り上げた減衰振動の方程式を例に取り、くりこみ群法とはどういう方法か説明しよう[7]。中立安定解である非摂動解の 積分定数がゆっくりとした運動の自然な集団座標を与えることを示す。また、その包絡線の概念による解釈を与える。

まず、任意の初期時刻 $t = t_0$ 付近での局所解 $\tilde{x}(t, t_0)$ を設定し、次のように展開しておく；$\tilde{x}(t, t_0) = \tilde{x}_0(t, t_0) + \epsilon\tilde{x}_1(t, t_0) + \epsilon^2\tilde{x}_2(t, t_0) + \ ...$ 重要なのは $t = t_0$ での初期値 $W(t_0)$ の設定である。この初期値は、厳密解曲線上 $x = x(t)$ にあると想定する。すなわち、$\tilde{x}(t_0, t_0) = W(t_0) = x(t_0)$. 厳密解 $x(t)$ は ϵ で展開できているとすると、初期値も次のように展開できる；$W(t_0) = W_0(t_0) + \epsilon W_1(t_0) + \epsilon^2 W_2(t_0) + ...$

前節で求めた 0 次解を、

$$\tilde{x}_0(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0)) = A(t_0)\sin(t + \theta(t_0)), \tag{2.1}$$

と書こう。ただし、$\boldsymbol{C}(t_0) \equiv (A(t_0), \theta(t_0))$ は積分定数。ここで、積分定数 $A(t_0)$ と $\theta(t_0)$ が初期時間 t_0 に依存してよいことに注意する。これに対応して初期値は $W_0(t_0) = \tilde{x}_0(t_0; t_0, \boldsymbol{C}(t_0)) = A(t_0)\sin(t_0 + \theta(t_0))$, である。高次項を求めるとき、初期値の高次項を以下の原理で決めるのがこの定式化のポイントである[13]：

(I) $t = t_0$ において、非摂動解が高次項に現れないようにする。

(II) 速い運動を記述する項が消える。

前者は高次の効果をあらかじめ非摂動解の定数にくり込んでおくことに相当する。後者の意味は、後述するように、解の乗る安定多様体の歪みを高次項として取り入れ、解がその多様体内のゆっくりした運動となるための条件である。しかし、本節では無関係なので当面無視してよい。規則 (II) の具体的な適用例は 4.4 節で与えられる。

このような「くりこみ条件」は高次項に現れ得る斉次項の処理のためにどのような摂動論でも必要とされる[6]。この処方箋あるいは上記規則に従えば、特解の選択の不定性の問題[14] は存在しないことを注意しておく。この規則に従い構成した 2 次までの摂動解は

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0)) \quad = \quad & A\sin\phi(t) - \epsilon A/2\cdot(t - t_0)\sin\phi(t) \\ & +\epsilon^2 A/8\cdot\{(t - t_0)^2\sin\phi(t) \\ & -(t - t_0)\cos\phi(t)\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。ここで、$t + \theta(t_0) \equiv \phi(t)$ と置いた。上で説明した規則 (I) に整合的に、$t = t_0$ での初期値は 0 次解が厳密解にできるだけ近いと想定しているので、摂動項のうち $t = t_0$ で非摂動解（0 次解）を用いて消せる項は消せるように摂動解の形を選んでいる。この点が単純な摂動解 (1.4) と形が異なる理由である。これは、高次項が 0 次解の振幅 $A(t_0)$

と $\theta(t_0)$ にくり込んでいることに相当する。このため、この線形方程式の場合 $W_1(t_0) = W_2(t_0) = 0$ となり初期値の補正がない。その代わり、t_0 依存性はまだその関数形は分かっていない $A(t_0)$ と $\theta(t_0)$ を通しても入っている。

しかし、ここで得られた解も永年項のために t が「初期時刻」t_0 から離れると、振幅が単調増加し減衰振動とはかけ離れた悲惨な結果を与える。

ここで 観点を変えてみよう。$t \sim t_0$ での局所解 (2.2) は t_0 をパラメータとする曲線群を表している。この曲線群は $t \sim t_0$ では厳密解に等しいと想定されている。そこで、この局所解としての曲線群の包絡線を構成すれば大域的に妥当な解が得られると期待できる。(実際そうなっていることは後に一般的に示す。)

一般に、パラメータ t_0 で区別される (t, x) 平面上の曲線群が $x = \tilde{x}(t; t_0)$ と表されているとき、その曲線群の包絡線を表す方程式 $x = x_E(t)$(の候補)は包絡線方程式、

$$\frac{d\tilde{x}(t; t_0)}{dt_0} = 0 \tag{2.3}$$

から t_0 を t の関数 $t_0 = t_0(t)$ として求め、$x = \tilde{x}(t; t_0)$ に代入することで得られる[11)]。すなわち、

$$x_E(t) = \tilde{x}(t; t_0(t)). \tag{2.4}$$

いま我々が扱っている最も近似のよい解を構成する問題においては、局所解 $\tilde{x}(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0))$ の構成の仕方から要請されるように摂動解を構成し始める初期時間であるパラメータ t_0 は接点の座標 t に取るべきである。すると、包絡線方程式は次のように未定の関数 $\boldsymbol{C}(t)$ を求めるための方程式、すなわち、くりこみ群方程式になる[7)]:

$$\left.\frac{d\tilde{x}(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0))}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \left.\frac{\partial\tilde{x}(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0))}{\partial t_0}\right|_{t_0=t} + \left.\frac{\partial\tilde{x}(t; t_0, \boldsymbol{C}(t_0))}{\partial \boldsymbol{C}}\frac{d\boldsymbol{C}}{dt_0}\right|_{t_0=t} \tag{2.5}$$

(2.5) において独立な関数の係数をそれぞれ 0 と置くと

$$\frac{dA}{dt} + \epsilon A = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{\epsilon^2}{8} = 0, \tag{2.6}$$

を得る。ただし、$dA/dt = O(\epsilon)$ であることを用いて $O(\epsilon^3)$ の項を無視した。これを 厳密に解いて $A(t) = \bar{A}\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}$, $\theta(t) = -\epsilon^2/8 \cdot t + \bar{\theta}$, を得る。こうして、包絡線 $x = x_E(t)$ は $x_E(t) = \tilde{x}(t; t, \boldsymbol{C}(t)) = W_0(t) = \bar{A}\exp(-\epsilon/2 \cdot t)\sin((1 - \epsilon^2/8)t + \bar{\theta})$, となって初期値関数で与えられ、しかも元の方程式の大域的に妥当な近似解になっている: $\sqrt{1-\epsilon^2/4} = 1 - \epsilon^2/8 + O(\epsilon^4)$, に注意する。$x_E(t) = \tilde{x}(t; t, \boldsymbol{C}(t))$ が大域的に妥当な解であることは厳密解との比較から明らかであるが、後でより一般的に証明する。

まとめると、この線形の方程式の場合、自由度の減少という意味での縮約はないが、包絡線方程式としてのくりこみ群方程式が、非摂動解の積分定数であった振幅 $A(t)$ と位相 $\theta(t)$ の従う運動方程式を分離して与えており、それはまた摂動級数の総和のための方程式にもなっている。

3. 非線形振動子

次に、非線形振動子の問題を取り上げよう。例として極限閉軌道を持つ次の van der Pol 方程式を考える:

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}. \tag{3.1}$$

ここに、ϵ は小さいパラメータである。

3.1. Krylov-Bogoliubov-Mitropolskyの方法

まず概要でも言及した Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) の方法[15)] で解いてみよう。$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots$ と展開すると、0 次の方程式は $\ddot{x}_0 + x_0 = 0$ である。この解は $x_0(t) = A_0\cos(t + \theta_0) \equiv u_0(A_0, \phi); \quad (\phi \equiv t + \theta_0)$, と書ける。

そこで KBM の方法では解を $x(t) = u(A, \phi) = u_0(A, \phi) + \rho(A, \phi)$, $\rho(A, \phi) = \epsilon\rho_1(A, \phi) + \epsilon^2\rho_2(A, \phi) + \cdots$, と書く。この意味は、高次の展開項の一部は 0 次解 u_0 の振幅と位相にくりこむことができ、その他にくりこめない項 ρ があることを想定しているのである。したがって、 ρ_i $(i = 1, 2, , , ,)$ は 0 次解である基準振動を含んではならない。

さて、時間発展は 0 次解で積分定数であった A と ϕ を通してのみであると仮定し、その発展方程式を次のように設定する:

$$\frac{dA}{dt} = F(A), \quad \frac{d\phi}{dt} = 1 + \Omega(A). \tag{3.2}$$

ただし、$F(A), \Omega(A)$ 自身もテーラー展開しておく;$F(A) = \epsilon F_1(A) + \epsilon^2 F_2 + \cdots$, $\Omega(A) = \epsilon\Omega_1(A) + \epsilon^2\Omega_2 + \cdots$.

これらの Ansatz を元の (3.1) に代入して少し面倒な計算をすると、次の方程式が得られる:$\partial^2\rho_1/\partial\phi^2 + \rho_1 = (2F_1 - A + A^3/4)\sin\phi + 2A\Omega_1\cos\phi + A^3/4 \cdot \sin 3\phi \equiv B_1(A, \phi)$. さて、この方程式が可解であるためには Fredholm の交代定理[16)] により、B_1 は u_0 や $du_0/d\phi$ の成分を含んではならない。(可解条件と呼ぶ。)この条件より、$\sin\phi$ と $\cos\phi$ に比例する項が消えないといけない。すなわち、 可解条件は永年項が出ない条件である。具体的には、$F_1 = A/2 \cdot (1 - A^2/4)$, $\Omega_1 = 0$ が得られるので、発展方程式は

$$\frac{dA}{dt} = \epsilon\frac{A}{2}\Big(1 - \frac{A^2}{4}\Big), \quad \frac{d\phi}{dt} = 1, \tag{3.3}$$

となる。この方程式は固定点 $A = 2$ を持ち、van der Pol 方程式の解が半径 2 の極限閉軌道を持つことを示している。このとき、$\rho_1 = -A^3/32 \cdot \sin 3\phi$.

以上をまとめると、解 $x(t)$ は確かに振幅 A と位相 ϕ で表現でき、$x(t)=A(t)\cos\phi(t)-\epsilon A^3(t)/32\cdot\sin 3\phi(t)$, となり、ダイナミクスは (3.3) で与えられ、A と ϕ のそれに簡約（縮約）される。

3.2. くりこみ群の方法

次に、「くりこみ群」の方法で解いてみよう。この方法の特徴は永年項の出現を許すことである。そして、くりこみ群方程式でその永年項を総和し大域的に妥当な解を構成する。そのとき、KBM の方法で Ansatz とした解の構造が自然に導かれる。

$t\sim t_0$ での局所解を $\tilde{x}(t;t_0)$ と書き、$\tilde{x}=\tilde{x}_0+\epsilon\tilde{x}_1+\epsilon^2\tilde{x}_2+\cdots$、と展開する。0 次解は、$\tilde{x}_0=A(t_0)\cos(t+\theta(t_0))$. ここに、$A(t_0)$, $\theta(t_0)$ は積分定数である。以前と同様に、初期時間 t_0 に依存してよいとした。$\tilde{x}_1$ が満たす方程式は、

$$\ddot{\tilde{x}}_1+\tilde{x}_1=-A\Bigl(1-\frac{A^2}{4}\Bigr)\sin\phi(t)+\frac{A^3}{4}\sin 3\phi(t). \quad (3.4)$$

ただし、$\phi(t)=t+\theta(t_0)$.　右辺第一項により共鳴が起き、解に永年項が現れる。基準 (I),(II) によって、解を構成すると、

$$\tilde{x}_1(t;t_0)=(t-t_0)\frac{A}{2}\Bigl(1-\frac{A^2}{4}\Bigr)\sin\phi(t)-\frac{A^3}{32}\sin 3\phi(t) \quad (3.5)$$

となる。第一項は永年項だが、$t=t_0$ で消えるように設定されている。第二項は、非摂動解とは独立な 3 倍振動部分である。これは、解の不変多様体の「歪み」を与えている。ここまでの近似で解は $\tilde{x}=\tilde{x}_0+\epsilon\tilde{x}_1$ で与えられる。永年項のために、大域的には妥当な解とはならない。

そこで、くりこみ群/包絡線方程式 $d\tilde{x}/dt_0|_{t_0=t}=0$ を適用すると、KBM 法で得られたのと同じ (3.3) が得られる。さらに、この解を代入して包絡線を構成すると大域的に妥当な解が得られ、それは KBM 法で得られた解と厳密に一致する。

以上より明らかなように、ここで定式化したくりこみ群法は KBM の方法と等価であり、その初等的な導出を与える。特に、非摂動解 $u_0(A,\phi)$ に現れる積分定数 (A,ϕ) のくりこみと、それと独立な関数 $\rho(A,\phi)$ の和で与えられるという解構造が自然に現れる。さらに、解のダイナミクスはくりこまれた積分定数のくりこみ群方程式で与えられる。

以上の解の縮約の論理構造は、時間の粗視化を含む一般の発展方程式に対しても成り立つことである[13, 17]。そのことを以下に示す。

4. Wilson/Wegner 型くりこみ群（フロー）方程式による発展方程式の縮約と安定多様体の構成

この節ではまず、Wilson/Wegner のくり込み群（フロー）方程式[4, 5] から出発して漸近解析の「くりこみ群法」の一般的定式化を行う。ここでも、包絡線の概念による解釈が直感的な理解を与えることを見るだろう。次に、$t\to\infty$ での解が配位空間内のある多様体に閉じ込められる場合、すなわち、安定多様体[9] が存在する場合、を扱う。くりこみ群法を用いて安定多様体とその上の縮約方程式の構成方法[13] を説明する。

4.1. くりこみ群（フロー）方程式による発展方程式の縮約

次の n 次元（$0<n\le\infty$）の連立方程式を考える;

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t). \quad (4.1)$$

スカラー関数についての任意の階数の微分方程式はベクトル関数についての 1 階の方程式に変換できることに注意する。したがって、以下の議論は前節で扱った振動子に対する方程式に対しても適用できる。

ここで $\boldsymbol{F}$ はあらわに t に依存していてもよいことに注意しておく。この方程式の初期値問題は厳密に解けているものとし、その解を $\boldsymbol{X}(t)$ と書くことにする。ある任意の初期時間 $t=\forall t_0$ における初期値を $\boldsymbol{W}(t_0)$ と書き、この値を厳密解の値に設定する；$\boldsymbol{W}(t_0)=\boldsymbol{X}(t_0)$。この初期値問題をなんらかの近似を用いて解き、その（近似）解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0,\boldsymbol{W}(t_0))$, と書くことにする。このとき、初期値の設定の仕方と定義より

$$\boldsymbol{W}(t_0)=\tilde{\boldsymbol{X}}(t=t_0;t_0,\boldsymbol{W}(t_0))=\boldsymbol{X}(t_0). \quad (4.2)$$

もちろん、方程式が厳密に解ければ任意の t に対して $\boldsymbol{W}(t)=\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0,\boldsymbol{W}(t_0))=\boldsymbol{X}(t)$ である。しかし、厳密解 $\boldsymbol{X}(t)$ 自体は今のところ未知である。この近似解 $\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0,\boldsymbol{W}(t_0))$ を用いて任意の時間 $t=t_0$ での “初期値” としての厳密解 $\boldsymbol{W}(t)=\boldsymbol{X}(t)$ の情報を得る方法として一般的に「くりこみ群法」を定式化することができる。その基礎は次の簡単な事実にある。もし、初期条件が t_0' でのもの $\tilde{\boldsymbol{X}}(t=t_0';t_0',\boldsymbol{W}(t_0'))=\boldsymbol{X}(t_0')$ に変更されても 得られる解は同じである；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0,\boldsymbol{W}(t_0))=\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0',\boldsymbol{W}(t_0')). \quad (4.3)$$

ここで $t_0'\to t_0$ の極限を取ると,

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0}\equiv\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\boldsymbol{W}}\frac{d\boldsymbol{W}}{dt_0}=\boldsymbol{0}, \quad (4.4)$$

を得る。この方程式は、初期値 $\boldsymbol{W}(t_0)$ についての発展方程式 (フロー方程式）である。この方程式は場の理論におけるくりこみ群（フロー）方程式と同じ形をしている。t_0 がエネルギースケール Λ の対数に対応している。

具体的に摂動展開を用いて $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))$ を求める場合、$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))$ と $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0', \boldsymbol{W}(t_0'))$ はそれぞれ $t \sim t_0$ および $t \sim t_0'$ でのみ意味のある妥当な解となっている。したがって、等値性 (4.3) の条件およびそれから導かれたくりこみ群方程式 (4.4) が妥当であるためには $t_0 < t < t_0' \equiv t_0 + \Delta t_0$ を満たす t を取る必要がある。このとき $\Delta t_0 \to 0$ の極限では、必然的に $t = t_0$, となる。したがって、摂動論で $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))$ を構成するときには次の $t = t_0$ という条件のついたくりこみ群方程式を要請することになる[18)]；

$$\left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0}\right|_{t_0=t} + \left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial \boldsymbol{W}} \frac{d\boldsymbol{W}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \boldsymbol{0}. \tag{4.5}$$

前節において我々はこの初期値 $\boldsymbol{W}(t_0)$ についての方程式が包絡線方程式として解釈できることを見た。

このようにしてくりこみ群方程式で改善された解は、包絡線として、

$$\boldsymbol{X}_E(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0 = t, \boldsymbol{W}(t_0 = t)) = \boldsymbol{X}(t), \tag{4.6}$$

となる。最後の等式で、初期値の関係式 (4.2) において $t_0 = t$ と置いた。しかし今や右辺の引数の中の $\boldsymbol{W}(t)$ はくりこみ群方程式 (4.5) の解である。

$\tilde{\boldsymbol{X}}$ が近似的に、たとえば $\mathrm{o}(\epsilon^n)$ を無視する近似で、(4.1) を満たしているとしよう；

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt} = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}, t) + \mathrm{o}(\epsilon^n). \tag{4.7}$$

すると、この近似の程度で包絡線 (4.6) は元の方程式を大域的に満たすことが言える。実際、任意の $t = t_0$ において

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\boldsymbol{X}_E}{dt}\right|_{t_0} &= \left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{d\boldsymbol{X}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))}{dt_0}\right|_{t=t_0} \\ &= \left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))}{dt}\right|_{t=t_0} \\ &= \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}, t)|_{t=t_0} + \mathrm{o}(\epsilon^n) \\ &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_E, t)|_{t=t_0} + \mathrm{o}(\epsilon^n). \end{aligned} \tag{4.8}$$

ここで、第 2 行目で (4.5)、最後の等式で (4.6) を用いた。

ここで一つ注意事項を述べる。BBGKY 階層からボルツマン方程式を導出する場合や、ランジュバン方程式からフォッカー-プランク方程式を出すような粗視化が伴う場合には、ミクロな系での無限小時間と上の階層の無限小時間のオーダーが異なるので、ミクロスケールでは $t - t_0 \to \infty$ だが、マクロスケールでは $t - t_0 << \Delta t_0$ という状況を設定しないといけない[17)]。

4.2. 不変多様体の存在する場合

方程式系 (4.1) に不変多様体 M がある場合を考える。この場合の発展方程式の解の振る舞いの幾何学的なイメージを図 1 に示した[4]: n 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ は十分時間が経った後、ある位相空間の中の多様体（次元 $m < n$）に緩和し、そのダイナミクスが m 次元ベクトル $\boldsymbol{s}(t)$ によって記述される。このとき、$\boldsymbol{s}$ の従う発展方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}), \tag{4.9}$$

であり、$\dim \boldsymbol{s} = m$ のために、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$ は m 次元多様体 M の中だけを運動する: $\mathrm{M} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{s})\}$.

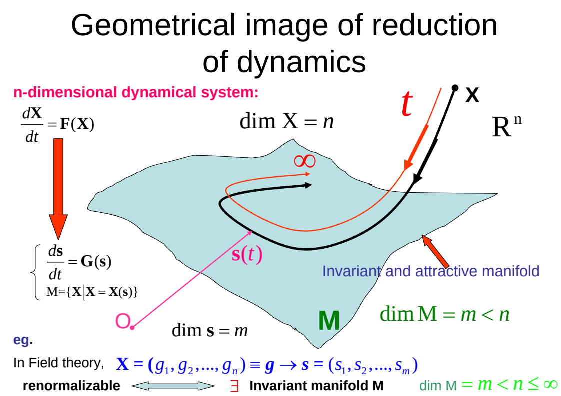

図 1　発展方程式の縮約の幾何学的イメージ。n 次元位相空間内の力学変数 $\boldsymbol{X}(t)$ は、ある時間経過するとよく定義された m 次元多様体 M に近づき、漸近的にはこの多様体中のみに値を持つようになる。自由度は n から m に縮減する。

発展方程式の縮約理論の主眼は、(4.1) から縮約された方程式 (4.9) と不変多様体 M を求めることである。すなわち、ベクトル場 $\boldsymbol{G}$ および M の表現 $\boldsymbol{R}$ を求めることである。

議論を少し具体的にするために、$|\epsilon| < 1$ として $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{X}) + \epsilon \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}, t)$, と書ける場合を考える。ここで、$\boldsymbol{F}_0$ にはあらわな時間依存性がないとしたことに注意する。このときの初期値問題の解を $\boldsymbol{X}(t)$ とする。$\boldsymbol{X}(t)$ は M 上にあるとし、次の展開を仮定する；$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0(t) + \epsilon \boldsymbol{X}_1(t) + \epsilon^2 \boldsymbol{X}_2(t) + \ldots$.

前小節の一般論に従い、任意の時間 $t = t_0$ での初期値 $\boldsymbol{W}(t_0)$ が（未だ解けていない）厳密解の値に一致していると想定し、このときの形式的摂動解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{W}(t_0))$ とする；$\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t_0; t_0, \boldsymbol{W}(t_0)) = \boldsymbol{X}(t_0)$. 以下では、表記を簡単にするために $\tilde{\boldsymbol{X}}$ の $\boldsymbol{W}(t_0)$ の依存性を書かない。摂動展開は、$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_0(t; t_0) + \epsilon \tilde{\boldsymbol{X}}_1(t; t_0) + \epsilon^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_2(t; t_0) + \ldots$. 対応して、初期値も展開しておく; $\boldsymbol{W}(t_0) = \sum_i \epsilon^i W_i(t_0)$.

[4] ここでの記号の選択および図は蔵本のもの[10)] にできるだけ従っている。実際、以下の内容は参考文献[10)] の内容をくりこみ群法のことばを用いて定式化を試みたものである。

さて、最低次の方程式 $d\tilde{\boldsymbol{X}}_0/dt = \boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)$ の解がある関数 $\boldsymbol{R}$ を用いて $\tilde{\boldsymbol{X}}_0(t;t_0) = \boldsymbol{R}(t;\boldsymbol{C}(t_0))$, と書けたしよう。ここで、$\boldsymbol{C}(t_0)$ は積分定数であり、以前と同様、初期時間 t_0 への依存性を持つとした。dim $\boldsymbol{C}$ の値を m と書こう; dim $\boldsymbol{C} = m$。ここで、$\boldsymbol{W}_0(t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_0(t_0;t_0) = \boldsymbol{R}(t_0;\boldsymbol{C}(t_0))$ であるから、初期値 $\boldsymbol{W}_0(t_0)$ は今や積分定数 $\boldsymbol{C}(t_0)$ を用いて具体的に表現されていることに注意する。これに対応して、最低次の不変多様体 M_0 の自然な座標は $\boldsymbol{s}(t_0) = \boldsymbol{C}(t_0)$ で与えられる。これは簡単だが重要な洞察である。われわれは不変多様体の表現について何の仮説も必要ない。単に方程式を解きさえすればよい。そのときの積分定数の組が不変多様体の自然な座標となるのである。

このように非摂動解が求まり、以下のくりこみ群の処方がうまく機能する場合としては次の２通りの場合が知られている： [A] $\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0) = 0$、すなわち、$\tilde{\boldsymbol{X}}_0 =$ 定数、が固定点 (fixed point) になっている場合。固定点の作る集合がこの力学系の不変多様体（あるいは、その基底空間）になり、その次元が m である。たとえば、ボルツマン方程式の流体極限をとる場合、$\boldsymbol{X}_0(t)$ は局所熱平衡分布関数（マクスウェルあるいはジュトナー分布関数）であり、$\boldsymbol{C}$ は密度、温度、流速ベクトルになる。 [B] $\tilde{\boldsymbol{X}}_0$ が振動解になっている場合: (B1) $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ が線形の場合、すなわち、$\mathcal{L}$ を線形演算子として $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}}) = \mathcal{L}\,\boldsymbol{X}$ となっている場合、$\boldsymbol{X}_0(t)$ は調和振動の線形結合であり、不変多様体の座標 $\boldsymbol{C}$ はそれらの振幅と位相になる。これは、前節で扱った（非）線形振動子の場合やホップ分岐が現れる場合[18] がその例である。(B2) $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ が非線形の場合、たとえば、秩序変数の緩和を記述する $\lambda\phi^4$ 模型の場合[19]、$\boldsymbol{X}_0(t)$ は楕円関数になり、$\boldsymbol{C}$ は位相と母数である。

１次の摂動方程式は $d\tilde{\boldsymbol{X}}_1/dt = \boldsymbol{F}_0'(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)\tilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{P}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)$. この非同次方程式の解はその特解と、右辺第２項を０とした同次方程式の一般解の和で表される。

一般に、摂動方程式としての非同次方程式の特解は永年項と非摂動解に独立な解の重ね合わせになっている。くりこみ群法の要点は永年項が $t = t_0$ では０次の非摂動解に繰り込んで無くすることができることの認識にある。初期値の１次の摂動は $\boldsymbol{W}_1(t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_1(t = t_0)$ と与えられ、$\boldsymbol{X}_1(t_0)$ は永年項は含まず０次解に独立な関数である。重要な点は $\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t)$ は摂動方程式の具体的な解であり、あらわに与えられているということである[5]。

以上の手続きを任意の次数まで繰り返すことができる。重要なことは、この手続きにより $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{W}_i(t_) \equiv \boldsymbol{\rho}(t_0)$ は、非摂動解と関数として独立であり、その意味で解空間（不変多様体）の「歪み」を与え、しかもその「歪み」は０次解の積分定数 $\boldsymbol{C}(t_0)$ のみで書かれるということである; $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}(t_0)] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}(t_0)]$.

RG 方程式 (4.5) がこの積分定数を動的変数に「格上げ」しその運動方程式を与える;

$$\left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0}\right|_{t_0=t} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\left.\frac{d\boldsymbol{C}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = 0. \tag{4.10}$$

この方程式の未知関数は $\boldsymbol{C}(t)$ であり、(4.10) は確かに $\boldsymbol{C}(t)$ の時間発展を与えている。解は包絡線として $\boldsymbol{X}_E(t) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}(t)] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}(t)]$ となる。この解は最初の初期値設定と整合的であり、t の関数としては解軌道を与え、$\boldsymbol{C}$ の関数としては不変多様体 M を与えている。こうして、方程式の縮約が実行できた。すなわち、不変多様体の構成とその上を動く軌道を与える運動方程式が組で得られた。

ここで場の量子論との関連について言及しておくのも教育的であると考える。場の理論におけるくりこみ可能性と力学系の理論[9] における有限次元の不変多様体の存在が対応している：積分定数 $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ がくりこみ可能な結合定数の組に対応し、$\boldsymbol{C}$ のみで書かれた $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{C})$ は QED におけるパウリ項のようなくりこみ不可能な演算子に対応している。この構造は Wilson 流のくりこみ群でも一般に維持される[20]。

4.3. 非摂動線形演算子が 0 固有値を持つ場合の一般論

次の一般的方程式に、射影演算子法と組み合わせてくりこみ群法を適用する[13]：

$$\partial_t\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{X} + \epsilon\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{4.11}$$

ただし、$\partial_t\boldsymbol{X} = \partial\boldsymbol{X}/\partial t$、$A$ は線形演算子、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ の非線形関数、そして ϵ は小さな展開パラメタである ($|\epsilon| < 1$)。A は必ずしも対称でもエルミートでもない。ここでは、A は半単純で、m 重に縮退した 0 固有値を持ち、他の固有値は負の実部を持つ場合を扱う。これは前節の [A] の場合である[6]。$A\boldsymbol{U}_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $A\boldsymbol{U}_\alpha = \lambda_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha$, $(\alpha = m+1, m+2, \cdots, n)$. ただし、 $\mathrm{Re}\lambda_\alpha < 0$. Ker$A$ への射影演算子を P、そして、$Q = 1 - P$ と書く。

このような 0 固有値を持つ線形演算子が現れる物理的な状況は比較的一般的にあり、たとえば、系の持つ対称性あるいは保存則を反映している場合や相転移の臨界点でゼロモードが発生する場合などである。

ここでは $t \to \infty$ での系の漸近的な振る舞いを記述する縮約された方程式をくりこみ群法で求めてみよう[7]。

[5] 技術的な注意をすると、非同次方程式の解に同次方程式の解を重ね合わせて 0 次解の「形を整える」ことができる。すなわち、同次方程式の解は 0 次解の定数の相殺項 (counter terms) を与える。上のように構成した解はその意味で minimal の特解である。

[6] [B] の場合、すなわち、A が互いに共役な純虚数の固有値を持つ場合（ホップ分岐等）[18] や、符号の異なる実数解を持つ場合[13] における縮約（不安定多様体の構成）の実際については紙数の都合でその説明は割愛する

[7] 力学系の用語を用いれば、attractive manifold[9] としての安定多様

4.4. 1次の摂動解

最低次の方程式は $(\partial_t - A)\tilde{\boldsymbol{X}}_0 = 0$ である。0 固有値以外の固有値はすべて負の実部を持つので、$t \to \infty$ での最低次の漸近解の初期値は $\mathrm{Ker}A$ に属するとする。$\tilde{\boldsymbol{X}}(t=t_0;t_0) = \boldsymbol{W}_0(t_0) = \sum_{i=1}^{m} C_i(t_0)\boldsymbol{U}_i \equiv \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}]$. このとき、解は定常状態にある: $\tilde{\boldsymbol{X}}_0(t;t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\boldsymbol{W}_0(t_0) = \sum_{i=1}^{m} C_i(t_0)\boldsymbol{U}_i$. 最低次の不変多様体 M_0 の自然なパラメトリゼイションは積分定数 $\boldsymbol{C} = {}^t(C_1, C_2, \cdots, C_m)$ で与えられている。

1次の方程式は $(\partial_t - A)\tilde{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)$ と与えられる。初期値を $\boldsymbol{W}_1(t_0)$ としたとき、解は

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) &= \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[\boldsymbol{W}_1(t_0) + A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0))] \\ &\quad +(t-t_0)P\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)) \\ &\quad -A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)), \end{aligned} \tag{4.12}$$

である。第 2 項の永年項の形は前節の規則 (I) によって設定されている。右辺第 1 項は Q 空間による速い運動を含んでいる。規則 (II) により、また、ゆっくりした運動を引き出したいという動機により、この項の存在は避けるべきである。ところが、うまいことにこの項は未だ決められていない初期値 $\boldsymbol{W}_1(t_0)$ を次のように選ぶことで消すことができる;$\boldsymbol{W}_1(t_0) = -A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0))$. $\boldsymbol{W}_1(t_0)$ は P 空間と独立であり（$P\boldsymbol{W}_1(t_0) = 0$）解空間の歪みを与えるが、$\boldsymbol{C}(t_0)$ のみの関数であることを注意しておく。こうして、1次の摂動解は、規則 (I)、(II) にしたがい、$\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) = (t-t_0)P\boldsymbol{F} - A^{-1}Q\boldsymbol{F}$, と自然に構成できた。このとき、不変多様体は次のものに変更されている;$\mathrm{M}_1 = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{X}_0)\}$. ここで、$\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{X}_0) \equiv -\epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0)$ は不変多様体の M_0 からの「歪み」を表している。

ここまでで近似を止めるとすると、近似解は $\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0) = \boldsymbol{X}_0 + \epsilon\{(t-t_0)P\boldsymbol{F} - A^{-1}Q\boldsymbol{F}\}$, となる。摂動により、P 空間に属する永年項が出現したことに注意しよう。　この解に、くりこみ群方程式 $d\tilde{\boldsymbol{X}}/dt_0|_{t_0=t} = 0$ を適用すると、縮約された方程式 $\dot{\boldsymbol{X}}_0(t) = \epsilon P\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t))$, が得られる。実際この方程式は $\boldsymbol{C}(t)$ についての m 次元連立方程式である;

$$\dot{C}_i(t) = \epsilon\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_i, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}])\rangle, \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{4.13}$$

$dC_i/dt \sim O(\epsilon)$ なので、$\boldsymbol{C}(t)$ の運動は「ゆっくり」であることが分かる。この $\boldsymbol{C}(t)$ を用いて、大域的領域で妥当な解は次のように包絡線として得られる;$\boldsymbol{X}_E(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0=t) = \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{\rho}_1$. ここに、$\boldsymbol{\rho}_1 \equiv -\epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}])$. 一般論で述べた不変多様体 M_0、そして M 全体の座標 $\boldsymbol{s}$ が非摂動解の積分定数 $\boldsymbol{C}$ で与えられていることを強調しておく。

以上の手続きはもちろん 2 次以上の高次項まで進めていくことができる。ここで与えた表式は縮約方程式として普遍的であり、多くの個別の縮約の問題はこれらの方程式に具体的な射影子 P および Q を代入するだけで得られる。

体 M とその上での縮約された運動方程式を求めることに対応するであろう。

ここで与えた縮約の幾何学的イメージは図 2 に示されている。

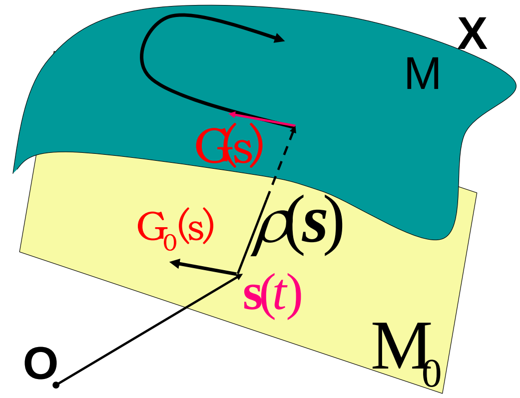

図 2　摂動論的縮約の幾何学的イメージ。非摂動解の積分定数 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{s}$ が 0 次の不変多様体 M_0 の自然な座標を与える。摂動により、M の歪み $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})$ と M 上のベクトル場 $G(\boldsymbol{s})$ が同時に与えられる。すべて、M_0 の座標 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{C}$ を通して書かれている。

ここでいくつかコメントをする:

(i)　ここで定式化したくりこみ群法による縮約法は、蔵本が設定した発展方程式の摂動論的縮約理論（の少なくとも重要な部分）の初等的で簡明な実現であると言える。実際、図 2 と類似の図が[10] には描かれている。 (ii)　非摂動線形演算子がジョルダン細胞を持つ場合も一般論を展開することができる[13]。すなわち、たとえば、2 次元のジョルダン細胞を持つ場合は、$A\boldsymbol{U}_1 = 0,\ A\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1$, となる対状態 $\boldsymbol{U}_1$ $\boldsymbol{U}_2$ が現れる。ジョルダン細胞が現れる問題としては KdV 方程式にしたがうソリトン-ソリトン相互作用や KdV 方程式に高次の微分項を付け加えた Benny 方程式のソリトンの速度を求める問題[21] などがある。

5. おわりに

ここで紹介した系のゆっくりした運動を取り出す方法としてのくりこみ群法は、他の問題にも適用できる。たとえば、離散系の包絡線を定義することができ、差分方程式へ適用することができる[22]。クラマース方程式から断熱的に速い運動を消去してスモルコフスキー方程式を導くフォッカー-プランク方程式の縮約の問題[17]、ランジュバン方程式からフォッカー-プランク方程式を導く問題[17], また、BBGKY 階層からボルツマン方程式を導くこと[17] もくりこみ群法でできる。また、この方法は最近、津村らによって相対論的ボルツマン方程式から粘性を含む相対論的流体を導出することに適用され、興味深い結果が得られている[23]。

非摂動解が振動解となる典型例は外部パラメーターの変化によりホップ分岐が起こる場合である。その場合は[18] で

扱われていて、[10] で展開されているのと同じ構造で縮約が行われることが示される。蔵本の論考[10] との対応でいうと、phase dynamics については佐々の仕事[24] がある。偏微分方程式へのくりこみ群法の適用[1, 25] については個人的には十分明快な定式化の余地はまだ残っているように思われる [26)]。縮約に対する蔵本の方法では、偏微分方程式に対しても明快な定式化がされている[10]。常微分系については、力学系の観点からの基礎付けが千葉[27] によって精力的に行われていることを付記してこの解説の終わりとしたい。

最後に、有益なコメントを下さった査読者に感謝します。

参考文献

1) L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, Phys. Rev. Lett. **73**(1994),1311; Phys. Rev. **E 54** (1996), 376.
2) 大野 克嗣, 日本物理学会誌、**52**(1997), 501.
3) たとえば、江沢 洋他「くりこみ群の方法」岩波書店 (1994 年）.
4) K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12C** (1974), 75.
5) F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973),401.
6) C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).
7) T.Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **94** (1995), 503; (E) **95** (1996), 835; Jpn. J. Ind. Appl. Math. **14**(1997),51; Prog. Theor. Phys. **97**(1997); 日本語の文献として、国広悌二,「素粒子論研究」103 巻 1 号,A160 (2001 年４月).
8) R. Graham, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 2185; K. Matsuba and K. Nozaki, Phys. Rev. E **56** (1997), R4926; S.-i. Goto, Y. Masutomi and K. Nozaki, Prog. Theor. Phys. **102**(1999), 471.
9) J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, 1983); J. D. Crawford, Rev. Mod. Phys. **63** (1991), 991; 俣野　博、「微分方程式　I」岩波講座 **応用数学**、(岩波書店、１９９３）; 藤井 宏、岡本 久、「非線型力学」岩波講座 **応用数学**、(岩波書店、１９９３）.
10) Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99** (1989), 244. 蔵本 由紀、物性研究 **49**(1987) 299; 岩波講座「現代の物理学　15 散逸構造とカオス」（森肇・蔵本由紀著）の中の第５章.(1994 年)
11) たとえば、高木貞治著「解析概論」（岩波書店）p.318.
12) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn.,**55** (1986), 4205.
13) S.-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro, Ann. Phys. **280** (2000), 236.
14) 西浦廉政著　岩波講座「現代数学の展開」「非線形問題 1—パターン形成の数理」（岩波書店、1999）.
15) N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, *Aymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, (Gordon and Breach, 1961).
16) たとえば、吉田耕作著「岩波全書　積分方程式論　第２版」（岩波書店　 1997 年)
17) Y. Hatta and T. Kunihiro, Ann. Phys.**298** (2002),24.
18) T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **97**(1997).
19) H. J. de Vega and J. F. J. Salgado, Phys. Rev. D **56** (1997) 6524
20) J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984), 269.
21) S. Ei and T. Ohta, Phys. Rev. **E50** (1994), 4672.
22) T. Kunihiro and J. Matsukidaira, *Phys. Rev.* **E57** (1998), 4817; 比較的最近の文献として、T. Maruo, S. Goto and K. Nozaki, Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 463.
23) K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. **B646** (2007), 134; K. Tsumura and T. Kunihiro,Phys. Lett. **B668** (2008), 425; `arXiv:0906.0079[hep-ph]`, Phys. Lett. B, 印刷中.
24) S. Sasa, Physica D **108** (1997),45.
25) T. Kunihiro, Jpn. J. Ind. Appl. Math. **14**(1997),51.
26) たとえば、K. Matsuba and K. Nozaki, J. Phys. Soc. Japan, **66** (1997), 3315、およびこれを引用している論文。
27) H. Chiba, J. Math. Phys., **49** (2008), 102703; SIAM J. Appl. Dyn. Sys., **8** (2009), 1066; および引用している論文。

(2012 年 8 月 1 日原稿受付)

Reduction of Differential Equations and Envelopes —- geometrical interpretation of the renormalization-group method and construction of invariant manifolds

Teiji Kunihiro

abstract: An elementary account is given of the renormalization-group(RG) method as a powerful method for an asymptotic analysis of differential equations, especially for the reduction of evolution equations. In this method, the invariant manifold and reduced differential equation are simultaneously derived by constructing the envelope of perturbative solutions involving secular terms. We show that the RG equation may be identified as the envelope equation. The reduction theory based on the RG method as formulated in the present report actually well corresponds to the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky theory for nonlinear oscillators and also Kuramoto's formulation of the reduction theory of the evolution equations.

著者紹介

顔写真

超高温・高密度でのハドロン物質やクォーク物質の物性理論の展開と関連したハドロン物理学が主たる研究分野。1995 年以降くりこみ群法を基礎にした縮約理論とその応用研究も行っている。