

Hadrons in holographic QCD

村田 仁樹

平成20年3月8日

目次

第1章 Introduction	1
第2章 D ブレインとゲージ/重力対応	4
2.1 D ブレイン	4
2.2 ブラックブレイン	6
2.3 ゲージ/重力対応	13
第3章 酒井・杉本模型におけるメソン	15
3.1 酒井・杉本模型	15
3.2 強結合	19
3.3 D8 ブレイン上の開弦理論	25
3.4 メソンの相互作用	33
3.5 高スピンメソン	44
3.6 有限温度	49
3.7 有限密度	56
第4章 酒井・杉本模型におけるバリオン	62
4.1 導入	62
4.2 $N_f = 2$ の場合	64
4.3 核子の諸性質	76
4.4 $N_f = 3$ の場合	92
第5章 まとめと展望	106
5.1 Glueball	106
5.2 Quark mass	106
5.3 問題と展望	106

第 6 章 謝辞	108
付 録 A 本文に載せなかった詳細	109
A.1 (2.2.7) の導出	109
A.2 Ricci scalar の導出	112
A.3 作用の評価	114
A.4 (3.2.4) の導出	115
A.5 $x^4(U)$ の性質	116
A.6 X^4 に対する別の表示	116
A.7 (3.4.33) の導出	118
A.8 (3.4.55) の導出	119
A.9 RR 場の normalization	120
A.10 ρ, Z はモジュライ?	121
A.11 (4.2.44) の導出	121
A.12 (4.4.28) の導出	123
A.13 ω_5 に関する公式	124
A.14 New action から導かれる WZW 項	125
A.15 Noether charge	126
付 録 B Skyrme model	128
B.1 $N_f = 2$ の場合	129
B.2 核子の静的性質 (in the Skyrme model)	134
B.3 $N_f = 3$ の場合	137

概要

Maldacena によって予想されたゲージ/重力対応では、重力理論の弱結合領域と場の理論の強結合領域とが対応している。このことから、近年ゲージ/重力対応を用いることで場の理論の非摂動効果を解明しようという試みが盛んに行われている。これらの研究では、低エネルギーで特定の場の理論を実現するような D ブレイン系を構成し、その系を重力理論による近似で解析することが行われる。なかでも、QCD におけるカイラル対称性の破れや閉じ込め、ハドロンのスペクトルなどを重力理論の解析で理解しようというモデルはホログラフィック QCD と呼ばれ、注目を集めている。このホログラフィック QCD では、低エネルギーで QCD を実現する D ブレイン系を構成することが重要となる。現在のところ、massless QCD を最もよく再現しているとされるのが、酒井・杉本モデルである。本論文ではこのモデルについて紹介し、さらにこのモデルからバリオンのスペクトルを導くという筆者の研究も含めた最近の研究についても紹介する。

第1章 Introduction

弦理論は70年代にハドロンの理論として提唱された。この理論では、弦の端に Chan-Paton factor と呼ばれる charge をもたせ、これをフレーバーとみなすことで弦をメソンとみなした。その結果、Regge 軌跡や Veneziano 振幅などをよく再現したのだが、tachyonic モードを含んでしまうことや時空を26次元としなければならないことなど、ハドロンの理論としては重大な欠陥があった。そのころ、漸近的自由性の発見などから QCD が脚光を浴び始め、ハドロンの理論は弦理論ではなく点粒子描像に基づく QCD である、とされるようになった。

しかし、80年代に入って弦理論は別の観点から再び注目を集めることになる。弦理論が重力相互作用を含むことが示唆されたことや超弦理論の発見などから、弦理論は統一理論の候補として再認識されるようになった。すなわち、超弦理論の低エネルギー有効理論として QCD が実現しており、さらに低エネルギーではハドロンの有効理論が実現していると考えられるようになった。この意味では、超弦理論でいう基本的な弦 (fundamental string) とハドロンの間には直接的な関係はないと思える。

にもかかわらず、超弦理論からある意味で‘直接的に’ハドロンの性質を調べる試みが近年活発に行われるようになった。これらの研究では、弦理論から得られる模型で QCD と双対となるような模型を構成し、それを解析する。こういった模型はホログラフィック QCD と呼ばれ、fundamental string をメソンと解釈するという意味で‘直接的に’ハドロンを記述しているといえる。また、QCD の非摂動的性質が比較的容易な手計算によって導けることから、大変注目を集めている。QCD に双対な模型を構成するにあたっては、D ブレインが特に重要な役割を果たす。D ブレインとは、開弦の端点が乗る空間のことであり、Polchinski によってその重要性が認識されるようになった [26]。また、 N 枚の重なった D ブレインの低エネルギー有効理論は、弱結合では $U(N)$ Yang-Mills (YM) 理論、強結合ではブラックブレイン解と呼ばれる重力解で記述できることが分かっている。特に D3 ブレインの場合では、YM 理論は Conformal field theory (CFT) となり、重力解は Anti de Sitter (AdS) 空間となることから、Maldacena は AdS/CFT 対応を予想した [27]。さらにこの予想はより一般化され、「YM 理論の強 (弱) 結合領域は弱 (強) 結合の重力理論で解析できる」というゲージ/重力対応として知られるに至った。

そして、このゲージ/重力対応を用いて YM 理論、なかでも QCD の非摂動効果を明らかにすることを目的とした模型が、上述のホログラフィック QCD である。ホログラフィーという言葉は、文字通り次元の違いからきている。というのも、一般にゲージ/重力対応では高次元の重力理論と低次元の場の理論との対応が予想されており、ホログラフィック QCD では4次元の QCD を高次元の重力理論の解析によって調べる。低エネルギーで正しく QCD を実現す

るようなブレーン系をいかにして構成するか、というところが重要な課題である。これまでのところ、massless QCD に最も近いモデルとされるのが酒井・杉本モデルである [2, 3]。このモデルは N_c 枚の D4 ブレーンと N_f 枚の D8 ブレーン、 $\overline{D8}$ ブレーンから成り、D4 ブレーン上のゲージ場 (D4 に両端を置く開弦) を gluon, D4 ブレーンと D8($\overline{D8}$) とに両足を置き、交差点上に局在した開弦を left(right)-handed quark とみなせば、低エネルギーで massless QCD が実現することを示した (図 1.1 参照)。そして、D8($\overline{D8}$) ブレーン上のゲージ対称性として $U(N_f)_{L(R)}$ カ

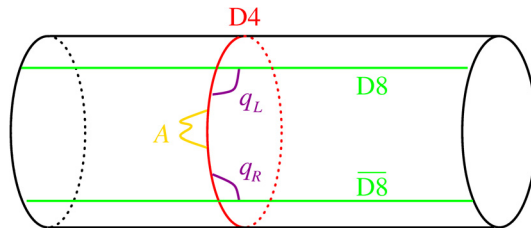


図 1.1: 酒井・杉本モデル

イラル対称性が実現されている。一方、D4 ブレーンをブラック 4 ブレーンに置き換え、その background 上にプローブとしての D8 ブレーンと $\overline{D8}$ ブレーンを置くと、この 2 つがつながって 1 つの D8 ブレーンになることが分かる (図 1.2)。これは、カイラル対称性が自発的に破れたことを表している。このように、QCD の性質が geometrical に理解できることは大変興味深い。また、彼らは D8 ブレーン上の開弦がメソンと同じ量子数を持つことから、これらに対す

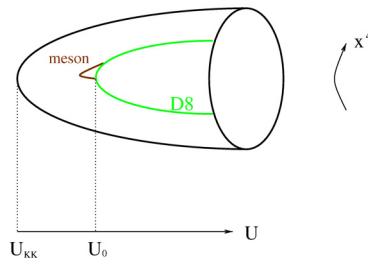


図 1.2: ブラック 4 ブレーンとメソン

る解析を行った。その結果、このモデルが massless pion を含むことやベクトルメソンのスペクトルを再現することなど、現実のメソンの物理をよく再現することが分かった。つまり、先述の通り D8 ブレーンに両端をおく fundamental string がメソンを記述しているのである。

さらに、このモデルが soliton としてバリオンの自由度を含むことも [2] で示唆されていた。そして [23] では 2-flavor の場合に、バリオンを表す soliton の集団座標を量子化することでスペクトルを求めた。その後畑氏と筆者との共同研究 [21] では、3-flavor でのバリオンについて議論した。さらに最近になって、畑氏と山戸氏との共同研究で核子の電荷密度や磁気能率などの

静的性質を調べた。そこで本論文では酒井・杉本模型を導入し、それから得られるメソン物理やバリオンのスペクトルについてレビューする。さらに 3-flavor での議論や核子の静的性質など、筆者が関わった研究について紹介したい。

本論文の構成は以下の通りである。2章では、D ブレインについて紹介し、ブラックブレイン解の導出を行った上で、この2つの比較からゲージ/重力対応の予想に至るまでの議論を行う。3章では酒井・杉本模型を導入し、そこから導かれるメソンの物理、有限温度・有限密度での相転移などについて紹介する。そして4章では soliton としてのバリオンの性質を調べていく。5章では、関連する研究で、ここに載せられなかったものについて簡単に紹介するとともに、この模型の持つ問題点などについて議論する。付録 A では、本文中で省略した計算や議論などを載せておく。また、4章での理解を助けることを目的として、付録 B では Skyrme model におけるバリオンの量子化について説明する。

なお、本論文では計量は時間成分が負となるような notation を採用する。

第2章 D ブレインとゲージ/重力対応

「 $p + 1$ 次元の世界体積を持ち、開弦の端点となる物体」である D_p ブレインが、実は閉弦 (RR 場, graviton etc...) の源としての役割も担うことが Polchinski によって発見された [26]. 一方, 超弦理論の低エネルギー有効理論である 10次元超重力理論 (SUGRA) には, ブラック p ブレインと呼ばれる解が存在し, これもまた RR 場や graviton の源になっていることが知られている. この2つの事実から, Polchinski は D ブレインがブラックブレインと同一視できることを見出した.

さらに, decoupling 極限 (2.1.1 節) という極限では D ブレイン上の開弦理論とバルク中の閉弦理論が decouple する. このとき, D_p ブレイン上の開弦理論の低エネルギー極限は $p+1$ 次元平坦時空中の Yang-Mills (YM) 理論になることが知られている. これに対して, 超重力理論における decoupling 極限はブラックブレイン解の地平面近傍に他ならない (2.3 節). これらの考察をもとに Maldacena は「YM 理論が地平面近傍の重力理論と対応する」と予想した [27]. この対応のことをゲージ/重力対応, あるいは AdS/CFT 対応と呼ぶ. ここ数年では, この対応を用いて場の理論の非摂動的性質を調べようという試みが盛んに行われてきた. その中でも場の理論として QCD like な理論を重力理論の解析によって調べようという研究が, 本修士論文のテーマであるホログラフィック QCD であり, 近年盛んに研究されている.

本章ではまず D ブレインの性質について簡単に紹介し, ブラックブレイン解や AdS/CFT 対応について解説する.

2.1 D ブレイン

まず D ブレインの性質について簡単に復習しておく. ここでは主にボソンのみモードのみを扱う. N 枚の D_p ブレインの有効作用は次のように書けることが知られている [25] ^{*1)}.

$$S_{Dp} = S_{Dp}^{\text{DBI}} + S_{Dp}^{\text{CS}} \quad (2.1.1)$$

$$S_{Dp}^{\text{DBI}} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \text{tr}_N [-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.2)$$

$$S_{Dp}^{\text{CS}} = \mu_p \int \sum_q C_q \wedge \text{Tr} e^{2\pi\alpha' F+B} \quad (2.1.3)$$

^{*1)}これ以外にも集団座標 X^i の交換し $[X^i, X^j]$ などの寄与があるが, 本論文では D ブレインが重なっている状態のみを扱うので, この作用で十分だと考えられる. より一般的な作用は [25] を参照されたい.

ここに,

$$T_p = \mu_p = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1}}, \quad (2.1.4)$$

$F = dA + iA^2$ は $U(N)$ ゲージ場の field strength である. ここで, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$, $\phi_0 = \ln g_s$ として場の 2 次まで展開すると,

$$-\frac{1}{4} T_p g_s^{-1} (2\pi\alpha')^2 \int d^{p+1}\xi \operatorname{tr}_N F_{\mu\nu}^2 \quad (2.1.5)$$

という YM 理論の作用を含むことが分かる. 特に, YM 結合定数 g_{YM} は

$$g_{\text{YM}}^2 = \frac{g_s}{T_p (2\pi\alpha')^2} = (2\pi)^{p-2} g_s l_s^{p-3} \quad (2.1.6)$$

で与えられることが分かる.

2.1.1 decoupling 極限

次の極限を考えよう:

$$g_{\text{YM}}^2 = (2\pi)^{p-2} g_s l_s^{p-3} = \text{fixed}, \quad l_s \rightarrow 0 \quad (2.1.7)$$

この極限では, 10 次元の重力定数 $\kappa = (2\pi)^{\frac{7}{2}} g_s l_s^4 / \sqrt{2}$ は 0 になる. 従って, D ブレイン上の開弦とバルク中の閉弦とが decouple して, 理論は次の 2 つに分かれる.

- 平坦時空上の閉弦理論 S_{clesod}
- $p + 1$ 次元 YM 理論 S_{open}

極限 (2.1.7) は decoupling 極限と呼ばれ, この性質は本修士論文において重要な役割を果たす.

2.1.2 RR charge

D_p ブレインがあるとき, RR-(p+1) 形式の有効理論は

$$S = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int F_{p+2} \wedge *F_{p+2} + \mu_p \int C_{p+1} \wedge *j_{p+1} \quad (2.1.8)$$

と書ける. ここに, κ_{10} は弦理論から決まる定数で,

$$\kappa_{10}^2 = \frac{1}{2} (2\pi)^7 l_s^8 \quad (2.1.9)$$

また, $p \geq 4$ では C_{p+1} は C_{7-p} の magnetic dual として定義されている. 従って, この場合には F_{p+2} は $F_{8-p} = dC_{7-p}$ の Hodge dual と理解する. j_{p+1} は Dp ブレインによる (magnetic for $p \geq 4$ electric for $p \leq 3$) カレントで,

$$\int_{\mathcal{B}^{9-p}} *j_{p+1} = (-1)^{p+1} \quad (2.1.10)$$

となる. ただし, \mathcal{B}^{9-p} は Dp ブレインを内包する球とし, $*j_{p+1}$ は \mathcal{B}^{9-p} 上の $9-p$ 形式である.

この作用から EOM は

$$\frac{1}{2\kappa_{10}^2} d * F_{p+2} = (-1)^{p+1} \mu_p * j_{p+1} \quad (2.1.11)$$

となり, これを \mathcal{B}^{9-p} 上で積分すると,

$$\int_{S^{8-p}} *F_{p+2} = \int_{S^{8-p}} F_{8-p} = 2\kappa_{10}^2 \mu_p = (2\pi l_s)^{7-p} \quad (2.1.12)$$

を得る. これは Dp ブレインの RR charge である.

2.2 ブラックブレイン

次に, Dp ブレインに相当する重力解を探そう.

SUGRA action and EOM

前節の結果から, N 枚の Dp ブレインがあるとき,

$$\int_{S^{8-p}} F_{8-p} = (2\pi l_s)^{7-p} N \quad (2.2.1)$$

となる. 前述のように, $p \geq 4$ ではこの式は RR (7-p) 形式の magnetic charge を表し, $p \leq 3$ においては RR (p+1) 形式の electric charge を表しており, F_{8-p} は $F_{p+2} = dC_{p+1}$ の Hodge dual と理解する. また, Dp ブレインに相当する解に求められる性質は,

1. 静的
2. $C_k = 0$ (for $k \neq 7-p$)
3. $B_{MN} = 0$
4. D ブレインに平行な空間成分 x^i ($i = 1, \dots, p$) には並進対称性と回転対称性がある.
5. D ブレインと垂直方向は球 (S^{8-p}) 対称

6. 計量 g_{MN} , RR(7-p) 形式 C_{7-p} , デイラトン ϕ の非自明な解

7. 無限遠で $g_{MN} \rightarrow \eta_{MN}$, $e^\phi \rightarrow e^{\phi_0} = g_s$

ここで, $M = 0, 1, \dots, 9$ で, g_s は弦理論の結合定数である. この解を求める為の作用は IIA 型と IIB 型とをまとめて

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2} |F_{8-p}|^2 \right] \quad (2.2.2)$$

と書ける^{*2)}. ここに \mathcal{R} は Ricci scalar であり,

$$|F_{8-p}|^2 \equiv \frac{1}{(8-p)!} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_{8-p} N_{8-p}} F_{M_1 \dots M_{8-p}} F_{N_1 \dots N_{8-p}} \quad (2.2.3)$$

$\phi \rightarrow \phi_0$ の解は

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - \phi_0, \quad \tilde{F}_{8-p} \equiv e^{\phi_0} F_{8-p} = g_s F_{8-p} \quad (2.2.4)$$

と置き換えることで, $\phi \rightarrow 0$ の解に帰着される. そこで, 以下では tilde を省略して, まずは $\phi \rightarrow 0$ の解を求める. 性質 1,4,5 を満たす計量は一般に次のように書ける.

$$ds^2 = e^A d\hat{s}^2 + e^B \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \quad (2.2.5)$$

$$= e^{A(\hat{r})} (-\lambda(\hat{r})^2 dt^2 + \lambda(\hat{r})^{-2} d\hat{r}^2 + R(\hat{r})^2 d\Omega_{8-p}^2) + e^{B(\hat{r})} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \quad (2.2.6)$$

x^i は p 次元のデカルト座標であり Dp ブレインに平行な方向を表し, $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ は $10-p$ 次元 Lorentzian 計量で時間成分以外は Dp ブレインに垂直な方向を表している. ここで, $A(\hat{r})$ に対する EOM

$$0 = \frac{\delta S}{\delta A} \propto \hat{g}_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}}$$

は $\hat{g}_{\mu\nu}$ に対する EOM

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}} = 0$$

に含まれている. この事実から, A, B, ϕ を二つの変数 ρ, σ で次のように表すことが許される:

$$\beta\phi = \frac{p-3}{2}\rho - \frac{7-p}{2} \left(\frac{p}{8-p} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma$$

$$\beta A = -\frac{6-p}{8-p}\rho - \left(\frac{p}{8-p} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma$$

^{*2)}この作用は SUGRA の作用で g_{MN}, ϕ, C_{7-p} 以外の場を 0 としたものである. また, 古典解を求めるにあたっては作用全体に掛かる係数は関係しないので, ここでは適当に定数倍しておいた.

$$\beta B = \rho + \frac{p-6}{\sqrt{p(8-p)}}\sigma \quad (2.2.7)$$

ここに, $\beta = -\sqrt{2(9-p)/8-p}$. 実際, 新しい変数での EOM

$$\frac{\delta S}{\delta \rho} = \frac{\delta S}{\delta \sigma} = \frac{\delta S}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}} = 0$$

と元々の EOM

$$\frac{\delta S}{\delta A} = \frac{\delta S}{\delta B} = \frac{\delta S}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}} = 0$$

は明らかに等価である. そこで, 新しい変数 ρ, σ を用いて (2.2.2) を書き直すと,

$$S = \int d^D x \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\rho)^2 - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\sigma)^2 - \frac{e^{\beta\rho}}{2}|F_{8-p}|^2 \right] \quad (2.2.8)$$

となる. ただし, $|F_{8-p}|^2$ に現れる計量は $\hat{g}_{\mu\nu}$ であることに注意されたい. これから導かれる EOM は次のようになる.

$$d(*e^{\beta\rho}F_{8-p}) = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\hat{\nabla}^2\sigma = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\nabla}^2\rho = \frac{\beta e^{\beta\rho}}{2(8-p)!}|F_{8-p}|^2 \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + \frac{e^{\beta\rho}}{2(7-p)!}F_{\mu\lambda_1\dots\lambda_{7-p}}F_{\nu}{}^{\lambda_1\dots\lambda_{7-p}} \\ & - \hat{g}_{\mu\nu}\frac{(7-p)}{2(8-p)}e^{\beta\rho}|F_{8-p}|^2 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

(2.2.10) から,

$$\sigma = 0 \quad (2.2.13)$$

そして, F_{8-p} に対しては次の ansatz をおく.

$$F_{8-p} = Q(\hat{r})\epsilon_{8-p} \quad (2.2.14)$$

ここに ϵ_{8-p} は S^{8-p} の world volume である. すると, Bianchi identity $dF_{8-p} = 0$ から $Q(\hat{r})$ が定数であると分かる:

$$Q(\hat{r}) = Q \quad (2.2.15)$$

このとき, 球対称性から (2.2.9) は自動的に満たされる. Riemann tensor および Ricci tensor の定義式

$$\mathcal{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\rho} \quad (2.2.16)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad (2.2.17)$$

と (2.2.14) も用いると, 結局運動方程式 (2.2.11), (2.2.12) が R, λ, ρ の微分方程式として書ける:

$$\nabla^2 \rho = R^{p-8} (\lambda^2 R^{8-p} \rho')' = \frac{1}{2} \beta e^{\beta \rho} R^{-2(8-p)} Q^2 \quad (2.2.18)$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_t^t = -\frac{1}{2} R^{p-8} (R^{8-p} (\lambda^2)')' = -\frac{7-p}{2(8-p)} e^{\beta \rho} R^{-2(8-p)} Q^2 \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_{\hat{r}}^{\hat{r}} &= -\frac{1}{2} R^{8-p} (R^{8-p} (\lambda^2)')' - (8-p) \lambda^2 R^{-1} R'' \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \rho'^2 - \frac{7-p}{2(8-p)} e^{\beta \rho} R^{-2(8-p)} Q^2 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_b^a = \delta_b^a (R^{p-8} (R^{7-p} \lambda^2 R')' - (7-p) R^{-2}) = \delta_b^a \frac{1}{2(8-p)} e^{\beta \rho} R^{-2(8-p)} Q^2 \quad (2.2.21)$$

ここに, prime は \hat{r} に関する微分を表し, a, b は S^{8-p} 上の座標を表す.

Solving EOM

さて, それではこの方程式を解いていくことにしよう.

まず, (2.2.19) と (2.2.21) から,

$$\partial_r \{ r^{p-6} \partial_r (R^{2(7-p)} \lambda^2) \} = 2(7-p)^3 r^{6-p} \quad (2.2.22)$$

となる. ここで, r は $r^{6-p} dr = R^{6-p} d\hat{r}$ で定義される. これを 2 回積分すれば,

$$R^{2(7-p)} \lambda^2 = r^{2(7-p)} f_+ f_- \quad (2.2.23)$$

を得る. ここに

$$f_{\pm}(r) \equiv 1 - \frac{r_{\pm}^{7-p}}{r^{7-p}} \quad (2.2.24)$$

であり, r_{\pm} は積分定数である.

次に, (2.2.18) と (2.2.19) から, $\widehat{\mathcal{R}}_t^t = -(7-p)/\beta(8-p) \nabla^2 \rho$, すなわち,

$$\partial_r \left(R^{2(7-p)} \lambda^2 r^{p-6} \partial_r \ln(\lambda^2 e^{-\frac{2(7-p)}{\beta(8-p)} \rho}) \right) = 0 \quad (2.2.25)$$

を得る. これを積分していくと,

$$\lambda^2 e^{-\frac{2(7-p)}{\beta(8-p)} \rho} = \left(\frac{f_+}{f_-} \right)^{c_2} \quad (2.2.26)$$

を得る. ここで, 積分においては境界条件として $\lambda = 1, \rho = 0$ ($r \rightarrow \infty$) を課した. また, c_1, c_2 は積分定数である. そして, (2.2.23) と (2.2.26) とから, $r = r_+$ で ρ, R が正則とすると, $c_2 = 1$ と決まる. このとき,

$$e^{\beta \rho} = r^{\beta^2(8-p)} f_-^{\frac{\beta^2(8-p)}{7-p}} R^{-\beta^2(8-p)} \quad (2.2.27)$$

$$R = r f_-^{\frac{1}{7-p}} e^{-\frac{1}{\beta^2(8-p)}\beta\rho} \quad (2.2.28)$$

となる.

さらに, (2.2.19) と (2.2.20) から得られる式:

$$\frac{1}{2}(\partial_r \rho)^2 = -(8-p)R^{-1}(\partial_r^2 R + (6-p)R^{-1}(\partial_r R)^2 - (6-p)r^{-1}\partial_r R) \quad (2.2.29)$$

を考えよう. ここで, $\xi(r)$ を用いて R を次のように表してみよう.

$$R = r f_-^{\frac{\gamma}{2}} e^\xi \quad (2.2.30)$$

ここに,

$$\gamma \equiv \frac{2\beta^2(8-p)}{(7-p)(2(7-p) + \beta^2(8-p))} = \frac{9-p}{(8-p)(7-p)} \quad (2.2.31)$$

ただし2つ目の等式では β の顕な表式 $\beta = -\sqrt{2(9-p)/(8-p)}$ を用いた. また, このとき, (2.2.29) を ξ に関する微分方程式に書き直すと,

$$\partial_r(r^{-1}\dot{\xi}) = -\frac{1}{2}(\beta^2(8-p) + 2(7-p))r(r^{-1}\dot{\xi})^2$$

$r \rightarrow \infty$ で R が有限であるような解は $\xi = \text{const.} \equiv \ln c_3$ となる. そして, 境界条件 $\phi \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) を課すと, 結局 $c_3 = 1$, つまり

$$R = r f_-^{\frac{1}{2}\gamma}, \quad e^{\beta\rho} = f_-^{\gamma(7-p)} \quad (2.2.32)$$

を得る.

最後に, Q をパラメータ r_+, r_- で表そう. そこで, (2.2.18) を r についての微分方程式に書き直し, (2.2.23) を代入すると,

$$\frac{1}{2}\beta Q^2 r^{6-p} R^{-2(7-p)} e^{\beta\rho} = \partial_r(r^{8-p} f_+ f_- \partial_r \rho) \quad (2.2.33)$$

となる. これに対して (2.2.32) を代入すると,

$$Q^2 = 2\beta^{-2}\gamma(7-p)^3(r_+r_-)^{7-p} = (7-p)^2(r_+r_-)^{7-p} \quad (2.2.34)$$

を得る. 以上で EOM (2.2.18)-(2.2.21) の解が求まった^{*3)}.

ここで, (2.2.7) を用いると, ϕ, A, B はそれぞれ

$$e^\phi = f_-^{\frac{p-3}{4}}, \quad e^A = f_-^{-\frac{6-p}{2(8-p)}}, \quad e^B = f_-^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.35)$$

^{*3)}我々が解いた EOM は $\phi, C_{7-p}, g_{\mu\nu}$ に対するものであったが, この解が g_{iM} に対する EOM も満たすかどうかは一般には非自明である. しかし, 今の場合にはこれも成り立つことが容易に示される.

と求まる.

最後に, $\phi \rightarrow \phi_0$ の解を実現するため, (2.2.4) を思い出そう. 元々の場の notation に戻すと,

$$e^\phi = g_s f_-^{\frac{p-3}{4}} \quad (2.2.36)$$

$$F_{8-p} = g_s^{-1} Q \epsilon_{8-p} = g_s^{-1} (7-p) (r_+ r_-)^{\frac{7-p}{2}} \epsilon_{8-p} \quad (2.2.37)$$

となる. ここに, 2行目の2つ目の等式では (2.2.34) を用いた. ここで, (2.2.1) から,

$$N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} (r_+ r_-)^{\frac{7-p}{2}} \quad (2.2.38)$$

ここに, $V_{8-p} = 2\pi^{\frac{9-p}{2}} / \Gamma(\frac{9-p}{2})$ は S^{8-p} の体積であり, d_p は

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) \quad (2.2.39)$$

で定義される.

まとめると, 我々が得た Dp ブレイン解は次のように表される.

$$ds^2 = -f_+ f_-^{-\frac{1}{2}} dt^2 + f_- \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 + f_+^{-1} f_-^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} dr^2 + r^2 f_-^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2$$

$$F = \frac{(2\pi l_s)^{7-p} N}{V_{8-p}} \epsilon_{8-p}, \quad e^\phi = g_s f_-^{\frac{p-3}{4}} \quad (2.2.40)$$

$r = r_+$ では timelike Killing vector が null になる. 従って $r = r_+$ は事象の地平線である. 一方, $r = r_-$ では S^{8-p} の半径が零になるため, curvature singularity が存在する.

2.2.1 Another representation and another frame

上の解では singularity が $r = r_-$ で表されていた. これに対して, singularity を動径座標の原点に取る座標も [9] をはじめ良く用いられる^{*4)}. そこで, 次のような座標を考える.

$$U^{7-p} = r^{7-p} - r_-^{7-p}, \quad U_{\text{KK}}^{7-p} \equiv r_+^{7-p} - r_-^{7-p} \quad (2.2.41)$$

ここで,

$$H(U) = 1 + \frac{R_{\text{Dp}}^{7-p}}{U^{7-p}}, \quad f(U) = 1 - \frac{U_{\text{KK}}^{7-p}}{U^{7-p}}, \quad r_- \equiv R_{\text{Dp}} \quad (2.2.42)$$

^{*4)}[9] で用いられている座標 ρ, r が本論文の r, u にそれぞれ対応している. また, [9](1.12) 式第4項の r^2 は ρ^2 の誤り

を用いて (2.2.40) を書き直すと,

$$ds_s^2 = H(U)^{-\frac{1}{2}} \left(-f(U)dt^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 \right) + H(U)^{\frac{1}{2}} (f(U)^{-1}dU^2 + U^2 d\Omega_{8-p}^2)$$

$$e^\phi = g_s H^{-\frac{p-3}{4}}, \quad F_{8-p} = \frac{(2\pi l_s)^{7-p} N}{V_{8-p}} \epsilon_{8-p}, \quad N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} \left(R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} + (R_{\text{Dp}} U_{\text{KK}})^{7-p} \right) \quad (2.2.43)$$

となる. この座標系において地平面は $U = U_{\text{KK}}$ で表されており, singularity は $U = 0$ にある.

一方, 文献によっては ([11] など) Einstein frame の解も良く用いられる^{*5)}. そこで, (2.2.43) を Einstein frame で表すと,

$$ds_E^2 = H(U)^{\frac{p-7}{8}} \left(-f(U)dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + H(U)^{\frac{p+1}{8}} (f(U)^{-1}dU^2 + U^2 d\Omega_{8-p}^2) \quad (2.2.44)$$

2.2.2 Some properties

重力理論においてソリトンの ADM 質量は Einstein frame での計量の 00 成分 $g_{E,00}$ の平坦時空からのずれで与えられる [22]:

$$g_{E,00} \sim -1 + \frac{16\pi G_N^{10-p}}{(8-p)V_{8-p}} \frac{M_{\text{ADM}}}{U^{7-p}}, \quad (U \rightarrow \infty) \quad (2.2.45)$$

従って, ブラック p ブレインの ADM 質量は

$$M_{\text{ADM}} \geq \frac{(8-p)}{128(2\pi l_s)^{7-p} G_N^{10-p}} N \quad (2.2.46)$$

なる不等式を満たすことが分かる. ここに, 等号は $r_+ = r_-$ の時にのみに成り立つ. この条件は質量に対する BPS 条件に他ならない. 従って, $r_+ = r_-$ では超対称性が保たれていることが期待される. 実際, この解は 16 個の保存する super charge を持つことが知られている. [10] この $r_+ = r_-$ すなわち $U_{\text{KK}} = 0$ の解は特に extremal ブラック p ブレインと呼ばれている. super charge の数の一致から, この extremal 解こそが Dp ブレインに相当すると考えられる.

一方, $r_+ > r_-$ の解は non extremal ブラック p ブレイン解と呼ばれている. BPS 条件が破れていることから, この解は超対称性を破っており, コンパクト化などで超対称性の破れた D ブレインに対応すると考えられる.

^{*5)}[11](87) 式が一番下の式の右辺で $(d-2)$ は $(d-2)^2$ に置き換えるのが正解と思われる. また, 本論文の notation では [11] の D, d, Δ, h, Q は

$$D = 10, \quad d = 9 - p, \quad \Delta = 16, \quad h = r_-, \quad Q = (7-p)d_p g_s l_s^{7-p} N$$

と表されることに注意されたい.

さらに、上の議論から、 U_{KK} は超対称性の破れの度合いを表している。特に、超対称性の破れが小さい場合 ($R_{\text{Dp}} \gg U_{\text{KK}}$) は near extremal ブラック p ブレインと呼ばれている。このとき (2.2.43) のうち N の表式だけが少し変わって、解は

$$ds_s^2 = H^{-\frac{1}{2}} \left(-f(U)dt^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 \right) + H^{\frac{1}{2}} (f(U)^{-1}dU^2 + U^2 d\Omega_{8-p}^2)$$

$$e^\phi = g_s H^{-\frac{p-3}{4}}, \quad F_{8-p} = \frac{(2\pi l_s)^{7-p} N}{V_{8-p}} \epsilon_{8-p}, \quad N = \frac{R_{\text{Dp}}^{2(7-p)}}{d_p g_s l_s^{7-p}} \quad (2.2.47)$$

さらに、AdS/CFT 対応においては、 $U \sim U_{\text{KK}}$ という地平面近傍が重要になる。特に上の near extremal ブラック p ブレイン解においてはこの領域は $R_{\text{Dp}} \gg u \sim U_{\text{KK}}$ と表せる。このとき、 $H(U)$ は

$$H(U) \sim \frac{R_{\text{Dp}}^{7-p}}{U^{7-p}} \quad (2.2.48)$$

と書ける。従って、near extremal 解の地平面近傍を表す解は次のように書ける。

$$ds_s^2 = (R_{\text{Dp}} U^{-1})^{-\frac{7-p}{2}} \left(-f(U)dt^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 \right) + (R_{\text{Dp}} U^{-1})^{\frac{7-p}{2}} (f(U)^{-1}dU^2 + U^2 d\Omega_{8-p}^2)$$

$$e^\phi = g_s H^{-\frac{p-3}{4}}, \quad F_{8-p} = \frac{(2\pi l_s)^{7-p} N}{V_{8-p}} \epsilon_{8-p}, \quad N = \frac{R_{\text{Dp}}^{2(7-p)}}{d_p g_s l_s^{7-p}} \quad (2.2.49)$$

2.3 ゲージ/重力対応

前節では、II 型超重力理論の解で、D ブレインに対応すると考えられるブラックブレイン解 (2.2.43) を導出した。この解では、地平面から十分離れたところで時空は平坦になる。つまり、この領域では平坦時空上の閉弦理論が実現される。従って、理論は以下の二つに別れる。

- 平坦時空上の閉弦理論 $S_{\text{closed}}^{\text{flat}}$
- 地平面近傍 (2.2.49) 上の閉弦理論 $S_{\text{closed}}^{\text{NH}}$

これを (2.1.1) と比較すると、

$$\boxed{S_{\text{open}} \text{ と } S_{\text{closed}}^{\text{NH}} \text{ とが等しい}}$$

という予想に到達する。この対応は「ゲージ/重力対応」などと呼ばれる。

もう少しこの対応についてみておく。N 枚の D ブレインのうち 1 枚を Δx だけ離れたとすると、その間に伸びる開弦は $\Delta x/l_s^2$ という質量を持つことになる。D ブレイン上のゲージ理論に

ついでの情報を得るためには、この量を有限に保つ必要があるだろう。decoupling 極限 (2.1.7) でこの量を有限にとることは、 U が非常に小さい領域、つまり地平面近傍を見ることに等しい。このことから、地平面近傍の閉弦理論が D ブレイン上のゲージ理論と等価であることが期待できる。

2.3.1 AdS₅/CFT₄ 対応

特に今、D3 ブレインを考えよう。コンパクト化などで超対称性が破れていない場合には、対応する重力解は extremal ブラック 3 ブレインだと考えられる。このとき、地平面近傍の時空は

$$ds_s^2 = H(U)^{-\frac{1}{2}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 \right) + H(U)^{\frac{1}{2}} (dU^2 + U^2 d\Omega_{8-p}^2), \quad e^\phi = g_s, \quad (2.3.1)$$

となる。この時空は AdS₅ × S⁵ である。一方、D3 ブレイン上のゲージ理論は 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論で、共形不変な理論 (CFT) となる。この 2 つの間の対応は特に「AdS₅/CFT₄」対応と呼ばれる。

第3章 酒井・杉本模型におけるメソン

2章で述べたゲージ/重力対応が予想されてから、non-AdS/non-CFT 対応への拡張(レビューとしては [4]) ややフレーバーを加える [5] など、より QCD に近い模型、すなわちホログラフィック QCD への応用がなされてきた。D ブレインなどを用いてより QCD に近い模型を構成することが重要となる。これまでにいくつかの模型が考案されてきたが、なかでもとりわけ massless QCD に近い模型とされるのが、ここで紹介する酒井・杉本模型である。この模型は低エネルギー極限で massless QCD を実現していると考えられる。重力理論による解析の結果、massless pion の有効理論として Skyrme model+WZW 項を含み、メソンのスペクトルをよく再現することなどが分かった。

そこで、本章では酒井・杉本模型から導かれるメソン物理について、以下の構成の基でレビューする。3.1 節では模型の構成を紹介し、弱結合での振舞いについて議論する。強結合での超重重力理論を用いた解析を 3.2 節で行い、低スピンメソンのスペクトル (3.3) および相互作用 (3.4)、高スピンメソンのスペクトルを計算していく。さらに、3.6, 3.7 節では有限温度、有限密度系を考え、QCD の相構造について考察する。

3.1 酒井・杉本模型

本節では酒井・杉本模型を導入し、'tHooft coupling が十分小さい領域での振る舞いを調べる。この模型では IIA 型超弦理論において N_c 枚の D4 ブレインと N_f 枚の D8 ブレイン、 N_f 枚の $\overline{D8}$ ブレインから構成される系を考える。後にラージ N_c 極限を考えるが、その時 N_f は常に有限としておく。より具体的な構成は、以下の表および図 3.1 を見ると分かりやすい。

	0	1	2	3	(4)	5	6	7	8	9	
D4	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	
D8	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	

(3.1.1)

一段目の数字は時空の方向を表し、二段目にある記号○(×)はDブレインがその方向に広がっている(いない)ことを表している。また、 x^4 方向は S^1 にコンパクト化されているものとし、そのコンパクト化半径を M_{KK}^{-1} と表す^{*1)}。

^{*1)}文献によってはコンパクト化されていることを分かりやすくするため、この x^4 を τ と書くことがある。しかし、本論文ではそのまま x^4 と表記する。

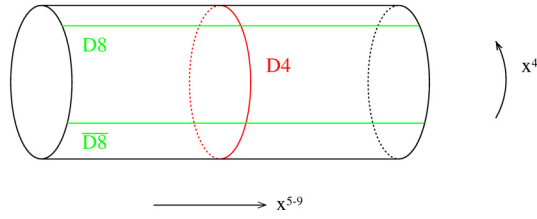


図 3.1: D-brane の配置

上の表と図からすぐに分かる性質についていくつかまとめておく. D4 ブレインと D8($\overline{\text{D8}}$) ブレインとに端をもつ開弦 (以下これを 4-8($\overline{8}$) string と呼ぶ) を考えると, ND 方向は 6 個なので, 系全体では超対称性 (SUSY) は破れている. また, S^1 に D4 ブレインを巻きつけることで, 半周期境界条件を課すことによりフェルミオンが decouple し, さらにループ効果でスカラー場も質量をもつことから, D4 ブレイン上の低エネルギー有効理論はゲージ場だけの理論となる. さらに, N 枚の重なった D ブレイン上には $U(N)$ ゲージ対称性があることから, この理論は $U(N_c)$ pure YM 理論となる [1]. また, 後にこの $U(N_c)$ ゲージ対称性を QCD のカラー対称性と同一視する. (実際には scalar 場の一部のモードが massless となる. 詳しくは 3.1.1 節参照.)

3.1.1 対称性とゼロモード

理論の持つ対称性と massless モードについて考えよう. ここで言う decoupling 極限というのは,

$$g_s = \text{fixed}, \quad g_{\text{YM}}^2 N_c = 2\pi g_s l_s M_{\text{KK}} N_c = \text{fixed}, \quad l_s \rightarrow 0, \quad \kappa \sim g_s l_s^2 \rightarrow 0 \quad (3.1.2)$$

のことを指す. ここに,

$$g_{\text{YM}} = (2\pi l_s M_{\text{KK}} N_c)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.3)$$

は上で述べた pure YM 理論の結合定数であり, 我々の目的から言って, 有限に保つべきであろう. また, κ は 10 次元 SUGRA の重力定数で, $\kappa \rightarrow 0$ というのは, 閉弦と開弦の相互作用が切れることを意味している. 今の場合には D4 ブレイン上に $U(N_c)$ ゲージ対称性があり, D8($\overline{\text{D8}}$) ブレイン上に $U(N_f)_{L(R)}$ ゲージ対称性があることが分かる. さらに, (3.1.1) にあるようにブレインの配置は x^5 - x^9 の $SO(5)$ 回転の下で不変である. また, 3+1 次元 (x^0 - x^3) の Lorentz 対称性もある.

上で挙げた対称性変換に対する表現を中心に, M_{KK} 以下のスケールでどのような massless モードがあるのか, 順に見ていこう.

4-4 string 上述のように, M_{KK} 以下のスケールでは 3+1 次元 $U(N_c)$ ゲージ場 A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は massless モードとして振舞い, 全てのフェルミオン場 (コンパクト化) とほ

とんどのスカラー場 (ループ効果) は decouple する. しかし, 例外として 5 次元ゲージ場の第 4 成分 A_4 の $U(1)$ 部分 a_4 とスカラー場 Φ^i ($i=5,6,7,8,9$) の $U(1)$ 部分 ϕ^i は massless モードとなる. これは次のように理解できる. まず, a_4 が massless になるのは D4 ブレインの DBI 作用が constant shift $a_4 \rightarrow a_4 + a1_{N_f}$ の下で不変であることから分かる. 次に, ϕ^i が massless となるのは, これらのモードが D4 ブレインの位置を表していることから理解できる. しかしながら, 実際に作用を書き下してみると a_4, ϕ^i は irrelevant な項のみに現れることが分かる. すなわち, 低エネルギーではこれらのモードは現れない.

以上の議論から, decoupling 極限では 4-4 string の物理は $U(N_c)$ pure YM 理論となることが分かる.

4-8($\bar{8}$) string ND 方向が 6 個あるので, NS sector からは massless モードは出てこない. 一方, R sector にはフェルミオンの massless モード $q_L^f(q_R^{\bar{f}})$ がある. ここに, $f(\bar{f})$ は $U(N_f)_{L(R)}$ の表現に対する添え字であり, $U(N_c)$ の添え字は implicit に含まれている. また, このモードは 3+1 次元の Lorentz 群において Weyl spinor として振舞う.

8-8 string massless モードは確かにあるのだが, decoupling 極限においては D8 ブレインの張力は D4 ブレインのそれに比べて l_s^4 のスケールで大きくなるため, これらのモードは dynamical でなくなる. そのため, $U(N_f)_{L(R)}$ ゲージ対称性は decoupling 極限において大域的対称性となる.

8- $\bar{8}$ string D8 ブレインと $\bar{D}8$ ブレインとの距離を Δx^4 とおくと, 8- $\bar{8}$ string の lowest モードの質量は

$$m^2 = \left(\frac{\Delta x^4}{2\pi\alpha'} \right)^2 - \frac{1}{2\alpha'} \quad (3.1.4)$$

となる. ただし, $\alpha' = l_s^2$. 本論文では,

$$2\pi l_s < \Delta x^4 = \mathcal{O}(M_{\text{KK}}^{-1}) \quad (3.1.5)$$

の場合を考える. このとき $m^2 > 0$ となり, tachyonic モードはなく, かつ低エネルギーでは全てのモードが decouple している.

まとめると, 系の低エネルギーに現れる massless モードは以下の通り.

	$U(N_c)$	$SO(3,1)$	$SO(5)$	$U(N_f)_L \times U(N_f)_R$
A_μ	adj	4	1	(1, 1)
q_L^f	N_c	2_+	1	$(N_f, 1)$
$q_R^{\bar{f}}$	N_c	2_-	1	$(1, N_f)$

(3.1.6)

従って, この理論はカラー対称性が $U(N_c)$ で, $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ のフレーバー対称性を持った massless QCD である. このとき, A_μ は gluon, $q_L^f(q_R^{\bar{f}})$ は quark である.

3.1.2 作用と decoupling 極限

前節で挙げた massless モードが低エネルギーでどのような理論を構成するか、もう少し詳しく見ていこう。系全体の作用は

$$S = S_{D4} + S_{D8} + S_{\overline{D8}} + S_{\text{bulk}} + S_{\text{mix}} \quad (3.1.7)$$

と書けるだろう。まず、 S_{Dp} というのは 9+1 次元の平坦時空におかれた D ブレイン (上の開弦) の有効理論であり、つまり (平坦時空上の) DBI 作用である。次に、 S_{bulk} は 9+1 次元 flat 時空中の開弦の作用である。最後に、 S_{mix} は D ブレインとバルク中の閉弦との相互作用 (Chern-Simons term, etc) や開弦同士の相互作用 (4-4 string と 4-8 string の結合 etc...), 4-8 string の運動項などを含んでいる。この作用自体は 'tHooft coupling の大小にかかわらず成り立つものであることに注意されたい^{*2)}。

decoupling 極限においては、閉弦と開弦との相互作用が無視でき、作用は閉弦の作用 $S_{\text{closed}} = S_{\text{bulk}}$ と開弦の作用 S_{open} に完全に decouple する。

そこで、 S_{open} に注目しよう。この作用は次の 3 つの寄与からなる。

$$S_{\text{open}} = S_{D4} + S_{D8} + S_{\overline{D8}} + S_{\text{mix}}^{\text{open}} \quad (3.1.8)$$

ここで、 $S_{\text{mix}}^{\text{open}}$ は 4-4 string と 8-8 string との coupling や 4-8 string の運動項などを含む。ところが、decoupling 極限 (3.1.2) において D8 ($\overline{D8}$) ブレイン上の YM coupling は D4 ブレイン上のそれに比べて十分小さくなる為、 S_{open} は

$$S_{D8}, \quad S_{\overline{D8}}, \quad S'_{\text{open}} = S_{D4} + S_{4,8,\overline{8}} \quad (3.1.9)$$

の三つに decouple する。ここに、 $S_{4,8,\overline{8}}$ は 4-4 string, 4-8 string, 4- $\overline{8}$ string からなり、

$$\begin{aligned} S_{4,8,\overline{8}} = & - \sum_f \int_{x^4=x_{D8}^4} d^4x (q_L^f)^\dagger \sigma^\mu D_\mu q_L^f - \sum_{\overline{f}} \int_{x^4=x_{\overline{D8}}^4} d^4x (q_R^{\overline{f}})^\dagger \overline{\sigma}^\mu D_\mu q_R^{\overline{f}} \\ & + (\text{massive modes, higher order terms}) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

と書ける。ここに、 $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ は共変微分であり、 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ 。また、前節の議論から、 S'_{open} 中の massless モードは (3.1.6) で与えられ、 S_{D4} は 3+1 次元 $U(N_c)$ pure YM 理論の作用になる。さらに、 M_{KK} より小さなスケールでにおいて $\Delta x^4 = x_{D8}^4 - x_{\overline{D8}}^4 = \mathcal{O}(M_{\text{KK}}^{-1})$ を零とみなしてよいことに注意すれば、結局 S'_{open} はこの極限で massless QCD の作用になることが分かる。

$$\begin{aligned} S'_{\text{open}} &= S_{\text{QCD}} \\ &= \int d^4x \text{tr} \left(-\frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} F_{\mu\nu}^2 - \sum_f (q_L^f)^\dagger \sigma^\mu D_\mu q_L^f - \sum_{\overline{f}} (q_R^{\overline{f}})^\dagger \overline{\sigma}^\mu D_\mu q_R^{\overline{f}} \right) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

^{*2)}ただし g_s は十分小さいとする。

以上の考察をまとめると，弱結合 ($g_{YM}^2 N_c \ll 1$) では decoupling 極限において M_{KK} 以下の理論は以下の4つの理論に deouple する．

- 平坦時空中の閉弦の理論 S_{closed}
- 平坦時空中におかれた D8 ブレインの理論 S_{D8}
- 平坦時空中におかれた $\overline{\text{D8}}$ ブレインの理論 $S_{\overline{\text{D8}}}$
- 4-4 string, 4-8 string, 4- $\overline{8}$ string からなる理論 $S_{4,8,\overline{8}} = S_{\text{QCD}}$

3.2 強結合

次に， $g_{YM}^2 N_c \gg 1$ の場合を考える．この領域では前節の YM 理論による描写は適切でなくなる．しかしながら，下記のように（古典）重力理論による記述が可能となる．まず，作用 (3.1.7) を考えよう．一般に D ブレインの張力は枚数に比例するから，ラージ N_c 極限では D4 ブレインの張力は無限大となる．作用 (3.1.7) のうち， $\mathcal{O}(N_c^2)$ となるのは

$$S_{N_c^2} = S_{\text{D4}} + S_{4-4,\text{closed}} \quad (3.2.1)$$

の部分で，これ以外の部分 ($S_{N_c^1}$ と書く) は $\mathcal{O}(N_c^1)$ となる．ただし， $S_{4-4,\text{closed}}$ は 4-4 string と閉弦の相互作用項である．ラージ N_c 極限では $S_{N_c^2}$ のみを古典的に扱い，その古典解の上で $S_{N_c^1}$ を考えればよい．つまり， $S_{N_c^1}$ に含まれる 4-4 string 場や閉弦場は全て古典解に置き換えた上で，4-8 string, 8-8 string etc... の理論を考えればよい．

ところで，ラージ N_c 極限において $S_{N_c^2}$ の古典解はブラック 4 ブレイン解で与えられるということが，Polchinski によって示唆されている．そこで，ここでも D4 ブレインをブラック 4 ブレインに置き換える．このとき，D4 ブレインがなくなってしまうので，4-8($\overline{8}$) string などなくなり，残る string は 8-8 string と $\overline{8}$ - $\overline{8}$ string, 閉弦のみとなる^{*3)}．

今，我々に興味があるのは，D4 ブレイン上の場の理論であった．そこで，場の理論の特徴的な量として W ボソンの質量を考えてみよう． N_c 枚の D4 ブレインのうち一枚だけが平行に δl だけ離れたとしよう．このとき，二つの D4 ブレインに端を持つ開弦，すなわち W ボソンの質量は

$$m_W \sim \frac{\delta l}{l_s^2} \quad (3.2.2)$$

となる．場の理論の性質を見る為に我々は当然こういった量を有限に保つべきであろう．つまり，ブラック 4 ブレインの地平面近傍 ($U \sim U_{\text{KK}}$)^{*4)} が場の理論に対応していると考えられる．

^{*3)}本来なら $S_{N_c^2}$ を真面目に解きそれを $S_{N_c^1}$ に代入して 4-8($\overline{8}$) string が decouple するところを見るべきだが，これまでのところそういった研究はなされていない．

^{*4)}後に与える計量を見れば分かるように， $U \sim U_{\text{KK}}$ は通常の意味での地平面にはなっていない．これは，ここで用いた解が元々のブラック 4 ブレイン解を double Wick 回転したものであることに起因する．

一方、地平面近傍の外では、重力が徐々に小さくなり、平坦になる。その領域では前節の弱結合での議論と同様にして、decoupling 極限では $S_{\text{closed}}, S_{\text{D8}}, S_{\overline{\text{D8}}}$ の3つの理論に decouple する。

以上の考察をまとめると、強結合 ($g_{YM}^2 N_c \gg 1$) 領域では decoupling 極限において次の4つの理論に decouple する。

- 平坦時空中の閉弦の理論 S_{closed}
- 平坦時空中におかれた D8 ブレインの理論 S_{D8}
- 平坦時空中におかれた $\overline{\text{D8}}$ ブレインの理論 $S_{\overline{\text{D8}}}$
- ブラック 4 ブレインの地平面近傍での D8 ブレインと $\overline{\text{D8}}$ ブレインおよび閉弦の理論 S_{NH}

この結果を 3.1 節で得た結果と比較すると、

S_{NH} が S_{QCD} の強結合領域を記述している

という予想に到達する。

そこで、本論文では S_{NH} を解析することで QCD の非摂動効果を調べていく。

3.2.1 ブラック 4 ブレインの地平面近傍

我々の目標はブラック 4 ブレインの地平面近傍での D8 ブレインや $\overline{\text{D8}}$ ブレインおよび閉弦の物理、 S_{NH} を調べることにある。そこで、ここではまずブラック 4 ブレイン解を与える。まず、 S^1 に巻きついた D4 ブレイン上のフェルミオンに反周期境界条件を課すことで D4 ブレイン上の SUSY を破っていたことを思い出そう。従って、我々の用いるべき解は non-extremal ブラック 4 ブレイン解である。特に後述のように我々は near-extremal ブラック 4 ブレイン解を用いる必要がある。その解は次のように表される^{*5)}。

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H(U)^{-\frac{1}{2}} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f(U) d\tau^2) + H(U)^{\frac{1}{2}} (f(U)^{-1} dU^2 + U^2 d\Omega_4^2), \\
 e^{-\phi} &= g_s^{-1} H(U)^{\frac{1}{4}}, \quad F_4 = dC_3 = \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4, \\
 H(U) &= \left(1 + \frac{R_{\text{D4}}^3}{U^3}\right), \quad f(U) = 1 - \frac{U_{\text{KK}}^3}{U^3}, \quad R_{\text{D4}}^3 = \pi g_s N_c l_s^3 \gg U_{\text{KK}}, \quad V_4 = \frac{8\pi^3}{3}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

ここで、 $R_{\text{D4}} \gg U_{\text{KK}}$ が near-extremal 条件である。また、 U_{KK} は M_{KK} を用いて次のように表される。

$$U_{\text{KK}} = \frac{4}{9} M_{\text{KK}}^2 R_{\text{D4}}^3 \tag{3.2.4}$$

^{*5)}2 章とは RR 場の normalization が異なることに注意されたい。詳しくは Appendix A.9 参照。

これは x^4 - U 平面上の点 $U = U_{\text{KK}}$ に現れる conical singularity を避けるためである. 具体的な決め方については Appendix A.4 を参照されたい. このとき x^4 の周期 δx^4 は

$$\delta x^4 = 2\pi M_{\text{KK}}^{-1} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_{\text{D4}}^3}{U_{\text{KK}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.5)$$

また, R_{D4} , U_{KK} , g_s を YM 理論のパラメータ g_{YM} , M_{KK} を用いて表すと,

$$R_{\text{D4}}^3 = \frac{1}{2} \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c l_s^2}{M_{\text{KK}}}, \quad U_{\text{KK}} = \frac{2}{9} g_{\text{YM}}^2 N_c M_{\text{KK}} l_s^2, \quad g_s = \frac{1}{2\pi} \frac{g_{\text{YM}}^2}{M_{\text{KK}} l_s} \quad (3.2.6)$$

と書ける. そして, この関係式を用いれば, near-extremal 条件 $R_{\text{D4}} \gg U_{\text{KK}}$ は YM 理論の言葉で次のように表せる.

$$1 \ll (g_{\text{YM}}^2 N_c)^2 (M_{\text{KK}} l_s)^4 \quad (3.2.7)$$

SUGRA 近似の妥当性

(3.2.3) では SUGRA 近似の下で D4 ブレインを IIA 型 SUGRA の解であるブラック 4 ブレインに置き換えた. ところで, SUGRA ‘近似’ というからには, それが成り立つ為の条件がある. ここでその条件について考えてみよう.

IIA 型 SUGRA は IIA 型超弦理論の有効理論であり, l_s より大きいスケールでのみ有効となる. 従って, (3.2.3) が妥当である為には曲率が l_s^{-2} より十分大きいことが必要となる. そこで, (3.2.3) から曲率 \mathcal{R} を計算すると, Appendix A.2 の (A.2.10) より,

$$\mathcal{R} \sim (UR^3)^{-\frac{1}{2}} < (U_{\text{KK}} R_{\text{D4}}^3)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.8)$$

となる. (3.2.6) を用いれば, 曲率が大きい: $\mathcal{R} \gg l_s^{-2}$ という条件は

$$g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1 \quad (3.2.9)$$

と書ける. つまり, SUGRA 近似が成り立つ為にはラージ 'tHooft coupling であることが必要条件となる.

さらに, 弦のループ補正が suppress されるための条件として弦の有効結合定数 e^ϕ が十分小さいことが必要となる. 今, e^ϕ は U の単調増加関数であり,

$$e^{\phi(U_{\text{crit}})} \sim 1, \quad U_{\text{crit}} = R_{\text{D4}} g_s^{-\frac{4}{3}} \quad (3.2.10)$$

となる. ただし, $g_s \ll 1$ を用いた. つまり, (3.2.3) は $U \ll U_{\text{crit}}$ でのみ信頼できるものであり, これより外では 11 次元の M 理論の物理を考えなくてはならない. ここで, $U > U_{\text{KK}}$ で

あったことを思い出すと、(3.2.3) が信頼できる領域が存在するためには、 $U_{\text{crit}} \gg U_{\text{KK}}$ でなければならない。YM 理論の言葉でこの条件を書き直すと*6),

$$R_{\text{D4}} g_s^{-\frac{4}{3}} \gg \frac{2}{9} g_{\text{YM}}^2 N_c M_{\text{KK}} l_s^2$$

$$\therefore \frac{1}{g_{\text{YM}}^4} \gg g_{\text{YM}}^2 N_c \quad (3.2.11)$$

と書ける。

以上の議論をまとめると、SUGRA 近似が信頼できるものであるためには

$$1 \ll g_{\text{YM}}^2 N_c \ll \frac{1}{g_{\text{YM}}^4} \quad (3.2.12)$$

が成り立たなければならない。

地平面近傍

ところで、対応する場の理論の物理 (W ボソンの質量 etc...) を見るために我々の取るべき極限は、

$$l_s \rightarrow 0 \quad \text{with} \quad \frac{U}{l_s^2} = \text{fixed} \quad (3.2.13)$$

であった。この極限では、

$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{D4}}^3}{U^3} &= \frac{\pi g_s N_c l_s^3}{U^3} = \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c}{2 l_s M_{\text{KK}}} \frac{1}{(U/l_s^2)^3} \frac{1}{l_s^3} \\ &= \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c}{2} \frac{l_s^{-4}}{M_{\text{KK}} (U/l_s^2)^3} \\ &\gg 1 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

となる。ただし、 M_{KK} が string scale l_s^{-1} より小さいことを用いた。このとき、

$$H(U) \simeq \frac{R_{\text{D4}}^3}{U^3} \quad (3.2.15)$$

と近似できるから、我々の用いるべきブラック 4 ブレイン解は

$$ds^2 = (U R_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f(U) (dx^4)^2) + (U R_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} (f(U)^{-1} dU^2 + U^2 d\Omega_4^2)$$

$$e^\phi = g_s (U R_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{4}}, \quad F_4 = dC_3 = \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4,$$

*6) ちなみにこの条件は $g_s^{-4/3} \gg (\lambda^2 (M_{\text{KK}} l_s)^4)^{1/3}$ と書け、near-extremal 条件 : (3.2.7) を用いれば $g_s \ll 1$ と書け、(3.2.10) の下にある条件と consistent である。

$$f(U) = 1 - \frac{U_{\text{KK}}^3}{U^3}, \quad R_{\text{D4}}^3 = \pi g_s N_c l_s^3 \gg U_{\text{KK}}, \quad V_4 = \frac{8\pi^3}{3}, \quad U_{\text{KK}} = \frac{4}{9} M_{\text{KK}}^2 R_{\text{D4}}^3 \quad (3.2.16)$$

と書ける.

ところで, この地平面近傍は $R_{\text{D4}} \gg U > U_{\text{KK}}$ で表されているが, この領域が存在するためには, $R_{\text{D4}} \gg U_{\text{KK}}$ でなければならない. この条件は near-extremal 条件に他ならない. こうして, 我々が用いるべき解が near-extremal ブラック 4 ブレイン解の地平面近傍 (3.2.16) であることが分かった.

3.2.2 プローブ D8 ブレイン

前述のように, ブラック 4 ブレインの地平面近傍における D8 ブレイン, $\overline{\text{D8}}$ ブレイン, 閉弦の理論 S_{NH} を調べるのが我々の目標である. 3.2.1 節では, その第一歩としてブラック 4 ブレイン解を与えた. そこで, 本節では D8 ブレインと $\overline{\text{D8}}$ ブレインの物理を見ていくことにする. 図 3.2 にあるように, ブラック 4 ブレインのつくる時空間は $U > U_{\text{KK}}$ で定義されており, $U < U_{\text{KK}}$ には時空間は存在しない. 従って, この背景時空間では D8 ブレインと $\overline{\text{D8}}$ ブレインはつながって 1 つの D8 ブレインになると考えられる.

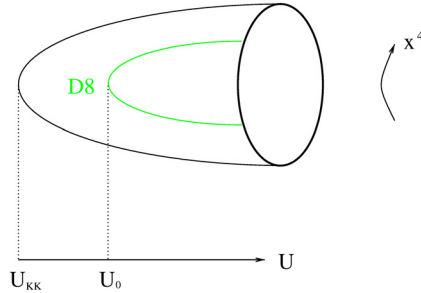


図 3.2: D4 ブレインのつくる背景時空間

D8 ブレインの形

そこで, この D8 ブレインの形を求めよう. 仮定として, D8 ブレインは $\mathbb{R}^{3,1}$ 方向に広がっていて, S^4 に巻きついているものとする. このとき, D8 ブレインは (U, x^4) 平面上の曲線 $U(x^4)$ で表せる. (3.2.16) より, D8 ブレイン上の誘導計量は

$$ds_{\text{D8}}^2 = \left(\frac{U}{R_{\text{D4}}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f \left(\frac{dx^4}{dU} \right)^2 dU^2 \right) + \left(\frac{R_{\text{D4}}}{U} \right)^{\frac{3}{2}} f^{-1} dU^2 + \left(\frac{R_{\text{D4}}}{U} \right)^{\frac{3}{2}} U^2 d\Omega_4^2$$

$$= \left(\frac{U}{R_{D4}} \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{R_{rmD4}}{U} \right)^{\frac{3}{2}} \gamma(U) dU^2 + \left(\frac{R_{D4}}{U} \right)^{\frac{3}{2}} U^2 d\Omega_4^2 \quad (3.2.17)$$

ここに,

$$\gamma(U) \equiv f(U)^{-1} + f(U)(UR_{D4}^{-1})^3(x^{4'})^2 \quad (3.2.18)$$

であり, $x^{4'} \equiv dx^4/dU$. これから,

$$\det(-g_{D8}) = U^8 \left(\frac{R_{D4}}{U} \right)^{\frac{3}{2}} \gamma(U) \quad (3.2.19)$$

を得る. ゲージ場の揺らぎを無視すると, D8 ブレインの作用は

$$\begin{aligned} S_{D8} &= -T_8 \int d^4x dU d\Omega_4 e^{-\phi} \sqrt{\det(-g_{D8})} \\ &\propto \int dU \left(\frac{U}{R_{D4}} \right)^{-\frac{3}{4}} U^4 \left(\frac{U}{R_{D4}} \right)^{-\frac{3}{4}} \gamma(U)^{\frac{1}{2}} \\ &\propto \int dU U^{\frac{5}{2}} \sqrt{f(U)^{-1} + f(U)(UR_{D4}^{-1})^3(x^{4'})^2} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

となる. ここに, T_8 は D8 ブレインの張力で,

$$T_8 = \frac{1}{(2\pi)^8 l_s^9} \quad (3.2.21)$$

である. この作用から導かれる運動方程式 (EOM) は,

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{U^{\frac{11}{2}} f(U) x^{4'}}{\sqrt{f(U)^{-1} + f(U)(UR_{D4}^{-1})^3(x^{4'})^2}} \right) = 0 \quad (3.2.22)$$

と書ける. ところで, つながった D8 ブレインでは点 $U = U_0$ で $x^{4'} = \infty$ となる点が存在する. この点を x^4 の原点にとることにすると, EOM から,

$$\begin{aligned} \frac{U^{\frac{11}{2}} f(U) x^{4'}}{\sqrt{f(U)^{-1} + f(U)(UR_{D4}^{-1})^3(x^{4'})^2}} &= R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^4 f(U_0)^{\frac{1}{2}} \\ \therefore (x^{4'})^2 &= (UR_{D4}^{-1})^{-3} \frac{f(U_0)U_0^8}{f(U)^2 \{f(U)U^8 - f(U_0)U_0^8\}} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

を得る. これを積分すると, D8 ブレインの形は

$$x^4(U) = U_0^4 f(U_0)^{\frac{1}{2}} \int_{U_0}^U \frac{(UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}} dU}{f(U) \sqrt{f(U)U^8 - f(U_0)U_0^8}} \quad (3.2.24)$$

のように求まる.

ここで、この解の性質について少し見ておこう。 $x_\infty^4 \equiv x^4(U = \infty)$ は U_0 の単調減少関数であり、

$$x_\infty^4(U_0 = U_{\text{KK}}) = \pm \frac{\delta x^4}{4}, \quad x_\infty^4(U_0 = \infty) = 0 \quad (3.2.25)$$

となる。特に $U_0 = U_{\text{KK}}$ なる解は、appendix A.5 より、 $x^4(U) = \pm \delta x^4/4$ となり、D8 ブレインの端がちょうど anti-podal な点にある。

3.3 D8 ブレイン上の開弦理論

S_{NH} は上で求めた D8 ブレインに両端を持つ開弦 : 8-8 string とバルク中の閉弦からなる。フレーバー対称性 $U(N_f)_V$ を考えれば、8-8 string はメソンに対応し、閉弦はグルーボールなどに対応すると考えられる。そこで本節では、メソンのスペクトルを求めていく。ただし、 $SO(5)$ に対応する大域的対称性は QCD にはない。そこで、以下では場の S^4 依存性を無視し、ゲージ場の S^4 成分もゼロとしておく。

3.3.1 低スピンモードのスペクトル

ここでは、スピン 0 の (擬) スカラーメソンとスピン 1 の (軸性) ベクトルメソンのスペクトルを求める。直ぐに分かるように、これらのモードは、D ブレインの有効作用である DBI+CS 作用に含まれる。特にスペクトルに関係があるのは DBI 作用であり、

$$S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} = -T_8 \int d^4x dU d\Omega_4 e^{-\phi_{\text{cl}}} \text{tr}_f \sqrt{-\det(g_{\text{D8}} + 2\pi\alpha' F)} \quad (3.3.1)$$

で与えられる。ここに、添え字 cl はブラック 4 ブレイン解を表し、 tr_f は $U(N_f)$ に関するトレースを表している。また、 g_{D8} は D8 ブレイン上の誘導計量 (3.2.17) に $x^4 = x^{4\text{cl}} + X^4(x, U)$ を代入したものである。ここに、 x_{cl}^4 は上で求めた D8 ブレイン解を表し、 X^4 は D8 ブレインの集団座標を表す開弦モードである^{*7)}。このとき、計量は次のように書ける。

$$\begin{aligned} ds_{\text{D8}}^2 &= (UR_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} (\eta_{\mu\nu} + f(U) \partial_\mu X^4 \partial_\nu X^4) dx^\mu dx^\nu + 2f(U) (UR_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} \partial_\mu X^4 \partial_U x^4 dx^\mu dU \\ &\quad + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \gamma(U, X^4) dU^2 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} U^2 d\Omega_4^2 \\ &\equiv ds_5^2 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} U^2 d\Omega_4^2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

ここに、

$$\gamma(U, X^4) = f(U)^{-1} + f(U) (UR_{\text{D4}}^{-1})^3 \left(\frac{d(x^{4\text{cl}} + X^4)}{dU} \right)$$

^{*7)}より一般には X^4 は行列で表され、 N_f 枚の各々の D8 ブレインの集団座標などを表すが、ここでは簡単のためその $U(1)$ 部分、すなわち N_f 枚の D8 ブレインの重心運動だけ考える。

$$= \gamma_{\text{cl}}(U) + f(U)(UR_{\text{D}4}^{-1})^3(X^{4'})^2 \quad (3.3.3)$$

$$\gamma_{\text{cl}}(U) = \frac{U^8}{f(U)U^8 - f(U_0)U_0^8} \quad (3.3.4)$$

である。これから、

$$\sqrt{-\det(g_{\text{D}8} + 2\pi\alpha'F)} = (UR_{\text{D}4}^{-1})^{-3}U^4 \sqrt{-\det(g_5 + 2\pi\alpha'F)} \quad (3.3.5)$$

となる。上に書いた計量を用いてこれを計算していこう。

$$g_5 + 2\pi\alpha'F = \begin{pmatrix} A & B_\mu \\ C_\mu & D_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

と書くと、よく知られた公式から、

$$\det(g_5 + 2\pi\alpha'F) = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) \quad (3.3.7)$$

となる。各小行列は

$$A = (UR_{\text{D}4}^{-1})^{-\frac{3}{2}}\gamma \quad (3.3.8)$$

$$B_\mu = (UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}f(U)\partial_\mu X^4\partial_U x^4 + 2\pi\alpha'F_{\mu U} \quad (3.3.9)$$

$$C_\mu = (UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}f(U)\partial_\mu X^4\partial_U x^4 - 2\pi\alpha'F_{\mu U} \quad (3.3.10)$$

$$D_{\mu\nu} = (UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(\eta_{\mu\nu} + f(U)\partial_\mu X^4\partial_\nu X^4) + 2\pi\alpha'F_{\mu\nu} \quad (3.3.11)$$

と書けるから、

$$\begin{aligned} -\det(D - CA^{-1}B) &= -\exp \text{tr}_g \ln \left[(UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(\eta_{\mu\nu} + f\partial_\mu X^4\partial_\nu X^4) + 2\pi\alpha'F_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - (UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}\gamma^{-1}((UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}f\partial_\mu X^4\partial_U x^4 - 2\pi\alpha'F_{\mu U})((UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}f\partial_\nu X^4\partial_U x^4 + 2\pi\alpha'F_{\nu U}) \right] \\ &= -(UR_{\text{D}4}^{-1})^6 \exp \text{tr}_g \ln \left[\eta_{\mu\nu} + (f - f^2\gamma^{-1}(UR_{\text{D}4}^{-1})^3(x^{4'})^2)\partial_\mu X^4\partial_\nu X^4 \right. \\ &\quad + 2\pi\alpha'(UR_{\text{D}4}^{-1})^{-\frac{3}{2}}F_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2\gamma^{-1}F_{\mu U}F_{\nu U} \\ &\quad - f\gamma^{-1}(UR_{\text{D}4}^{-1})^{\frac{3}{2}}2\pi\alpha'(\partial_\mu X^4F_{\nu U} - \partial_\nu X^4F_{\mu U})(x^{4'}) \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((\partial_\mu X^4)^2\partial_U X^4, \partial_\mu X^4\partial_U X^4F_{\mu U}) \right] \\ &\simeq (UR_{\text{D}4}^{-1})^6 \exp \text{tr}_g \ln \left[\delta^\mu_\nu + \gamma^{-1}\partial^\mu X^4\partial_\nu X^4 + 2\pi\alpha'(UR_{\text{D}4}^{-1})^{-\frac{3}{2}}F^\mu_\nu + (2\pi\alpha')^2\gamma^{-1}F^\mu_U F_{\nu U} \right] \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

ここで、 \simeq において $\partial_\mu X^4F_{\nu U}$ や $\mathcal{O}()$ で書かれる項などを無視した。最後に tr_g を取ることで考えると、これらの項は場や ∂_μ について5次以上となることが分かる。今後出てくる5次以上の項も無視して計算を続けると、

$$-\det(D - CA^{-1}B)$$

$$\begin{aligned}
&= (UR_{D4}^{-1})^6 \exp \left[\gamma^{-1} \partial^\mu X^4 \partial_\mu X^4 + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{-1} F^\mu_U F_{\mu U} - \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^\mu_\nu F^\nu_\mu \right] \\
&= (UR_{D4}^{-1})^6 \left[1 + \gamma^{-1} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^2_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{-1} F^2_{\mu U} \right] \quad (3.3.13)
\end{aligned}$$

ここに，添え字 μ, ν の上げ下げは $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ で行っており，

$$(\partial_\mu X^4)^2 \equiv \partial^\mu X^4 \partial_\mu X^4, \quad F^2_{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F^2_{\mu U} \equiv F^\mu_U F_{\mu U} \quad (3.3.14)$$

と定義されている．これから，

$$\begin{aligned}
-\det(g_5 + 2\pi\alpha' F) &= -A \det(D - CA^{-1}B) \\
&= (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \gamma (UR_{D4}^{-1})^6 \left[1 + \gamma^{-1} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^2_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{-1} F^2_{\mu U} \right] \\
&= (UR_{D4}^{-1})^{\frac{9}{2}} \gamma_{\text{cl}} (1 + \gamma_{\text{cl}}^{-1} f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (X^{4'})^2) \\
&\quad \times \left[1 + \gamma^{-1} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^2_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{-1} F^2_{\mu U} \right] \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

を得る．後に行うモード展開から分かるように，ここにある $X^{4'} 2F^2_{\mu U}$ などは (擬) スカラーメソンとパイオン，(軸性) ベクトルメソンとの4点相互作用を表している．しかし，本論文ではこの相互作用は扱わないことにする．すると，

$$\begin{aligned}
-\det(g_5 + 2\pi\alpha' F) &= (UR_{D4}^{-1})^{\frac{9}{2}} \gamma_{\text{cl}} \left[1 + \gamma_{\text{cl}}^{-1} (\partial_\mu X^4)^2 + \gamma_{\text{cl}}^{-1} f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (X^{4'})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^2_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \gamma_{\text{cl}}^{-1} F^2_{\mu U} \right] \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

を得る．従って，

$$\begin{aligned}
S_{D8}^{\text{DBI}} &= -2T_8 \int d^4 x dU d\Omega_4 e^{-\phi_{\text{cl}}} \text{tr}_f \sqrt{-\det(g_{D8} + 2\pi\alpha' F)} \\
&= -2T_8 V_{4g_s}^{-1} \int d^4 x dU (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{4}} \text{tr}_f (UR_{D4}^{-1})^{-3} U^4 \sqrt{-\det(g_5 + 2\pi\alpha' F)} \\
&= -2T_8 V_{4g_s}^{-1} \int d^4 x dU (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{15}{4}} U^4 (UR_{D4}^{-1})^{\frac{9}{4}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \gamma_{\text{cl}}^{-1} (\partial_\mu X^4)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma_{\text{cl}}^{-1} f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (X^{4'})^2 + \frac{1}{4} (2\pi\alpha')^2 (UR_{D4}^{-1})^{-3} F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (2\pi\alpha')^2 \gamma_{\text{cl}}^{-1} F^2_{\mu U} \right] \\
&= S_X + S_F^{\text{DBI}} + \text{const} \\
S_X &= -2T_8 V_{4g_s}^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} \int d^4 x dU U^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} \left[\gamma_{\text{cl}}^{-1} \frac{1}{2} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{\text{cl}}^{-1} f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (X^{4'})^2 \right] \\
S_F^{\text{DBI}} &= -2(2\pi\alpha')^2 T_8 V_{4g_s}^{-1} R_{D4}^{\frac{9}{2}} \int d^4 x dU U^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (UR_{D4}^{-1})^3 \gamma_{\text{cl}}^{-1} F^2_{\mu U} \right] \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

となる. ここにおいても, X^4 と F の (4次以上の) 相互作用を無視した. ここで, 無次元座標

$$U \equiv U_{\text{KK}} u \quad (3.3.18)$$

を導入すると,

$$\begin{aligned} S_X &= -2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{3}{2}} U_{\text{KK}}^{\frac{7}{2}} \int d^4 x du u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{1}{2} f(u) u^3 (U_{\text{KK}} R_{\text{D4}}^{-1})^3 U_{\text{KK}}^2 (\partial_u X^4)^2 \right] \\ &= -T_X \int d^4 x du \left[\frac{1}{2} u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} (\partial_\mu X^4)^2 + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f(u) u^{\frac{11}{2}} (\partial_u X^4)^2 \right] \\ S_F^{\text{DBI}} &= -2(2\pi\alpha')^2 T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{9}{2}} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} \int d^4 x du \left[\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} F_{\mu u}^2 \right] \\ &= -T_F \int d^4 x du \left[\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} F_{\mu u}^2 \right] \\ &= -T_F \int d^4 x dZ \left(\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} \right)^2 F_{\mu Z}^2 \right] \\ &= -\frac{1}{3} T_F \int d^4 x dZ \left[\frac{1}{4} u(Z)^{-1} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{KK}}^2 u(Z)^3 F_{\mu Z}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

となる. ここで,

$$\gamma_{\text{cl}}(u) = \frac{u^8}{f(u)u^8 - f_0 u_0^8}, \quad f(u) = 1 - u^{-3}, \quad u_0 \equiv \frac{U_0}{U_{\text{KK}}} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} T_X &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{3}{2}} U_{\text{KK}}^{\frac{7}{2}}, \\ T_F &= 2(2\pi\alpha')^2 T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{9}{2}} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(g_{\text{YM}}^2 N_c) N_c}{36\pi^3} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

である.

解の安定性

前節で D8 ブレインの形を求めたが, その形が本当に安定かどうかは S_X を見ることで分かる. S_X をルジャンドル変換すると, エネルギーは

$$\epsilon = T_X \int d^3 x du \left[\frac{1}{2} u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^3 (\partial_i X^4)^2 + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f(u) u^{\frac{11}{2}} (\partial_u X^4)^2 \right] \geq 0 \quad (3.3.22)$$

となり, これはこの解が安定であることを表している.

モード展開

X^4 やゲージ場を U 方向についてモード展開すれば、4次元の理論が得られる。その KK 質量がメソンの質量とみなせる。まず X^4 から始めよう。

$$X^4(x, u) = \sum_n X^{(n)}(x) \eta_n(u) \quad (3.3.23)$$

と展開すると、

$$S_X = -T_X \int d^4x du \sum_{n,m} \left[\frac{1}{2} u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \eta_n \eta_m \partial^\mu X^{(n)} \partial_\mu X^{(m)} + \frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f u^{\frac{11}{2}} \partial_u \eta_n \partial_u \eta_m X^{(n)} X^{(m)} \right] \quad (3.3.24)$$

となる。ここで、規格化として

$$T_X \int_{u_0}^{\infty} du u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \eta_n \eta_m = \delta_{nm} \quad (3.3.25)$$

$$-\frac{4}{9} u^{-\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{\frac{1}{2}} \partial_u (\gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f(u) u^{\frac{11}{2}} \partial_u \eta_n) = \alpha_n \eta_n \quad (3.3.26)$$

を採用すると、このとき、

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} T_X \int_{u_0}^{\infty} du \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f(u) u^{\frac{11}{2}} \partial_u \eta_n \partial_u \eta_m &= -\frac{2}{9} T_X \int_{u_0}^{\infty} du \partial_u (\gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} f(u) u^{\frac{11}{2}} \partial_u \eta_n) \eta_m \\ &= \frac{1}{2} T_X \int_{u_0}^{\infty} du u^{\frac{5}{2}} \gamma_{\text{cl}}^{-\frac{1}{2}} \alpha_n \eta_n \eta_m \\ &= \frac{1}{2} \alpha_n \delta_{nm} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

となる。これらを用いれば、作用は

$$S_X = - \int d^4x \sum_n \left[(\partial_\mu X^{(n)})^2 + \frac{1}{2} M_{\text{KK}}^2 \alpha_n (X^{(n)})^2 \right] \quad (3.3.28)$$

となる。従って、(擬) スカラーメソンの質量は

$$m_{sn}^2 = M_{\text{KK}}^2 \alpha_n \quad (3.3.29)$$

と書ける。つまり、スペクトルを求めるという問題は (3.3.26) の固有値 α_n を求めることに帰着された。一般の U_0 に対してこれを解くのは容易ではないが、 $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合には $\gamma_{\text{cl}} = f^{-1}$ となるため、解析が比較的容易になる。このときの α_n の値は数値的に求められており [2]、その結果は次のようになる。

$$\alpha_1 = 3.3, \quad \alpha_2 = 5.3, \dots \quad (3.3.30)$$

次に, S_F^{DBI} を考えよう. ここで,

$$du = \pm \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{2}} dZ \quad (3.3.31)$$

なる $Z \in (-\infty, \infty)$ を導入する. ただし, $U = U_0$ を $Z = 0$ とし, 右辺の符号は Z のそれと一致する. このとき, u は $Z \rightarrow -Z$ の下で偶となる. ちなみに, $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合には Z は Appendix A.6 のそれと一致する. この Z を用いてゲージ場を

$$A_\mu(x, Z) = \sum_n B_\mu^{(n)}(x) \psi_n(Z) \quad (3.3.32)$$

$$A_Z(x, Z) = \sum_n \varphi^{(n)}(x) \phi_n(Z) \quad (3.3.33)$$

とモード展開すると,

$$F_{\mu\nu} = \sum_n (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)}) \psi_n + \sum_{m,n} [B_\mu^{(n)}, B_\nu^{(m)}] \psi_n \psi_m \quad (3.3.34)$$

$$F_{\mu Z} = \sum_n (\partial_\mu \varphi^{(n)} \phi_n - B_\mu^{(n)} \partial_Z \psi_n) + [B_\mu^{(n)}, \varphi^{(m)}] \psi_n \phi_m \quad (3.3.35)$$

となり, これを (3.3.19) に代入すると,

$$\begin{aligned} S_F^{\text{DBI}} = & -\frac{1}{3} T_F \int dt d^3 x dZ \sum_{n,m} \left[\frac{1}{4} u^{-1} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)}) (\partial^\mu B^{\nu(n)} - \partial^\nu B^{\mu(n)}) \psi_n \psi_m \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} M_{\text{KK}}^2 u^3 (\partial_\mu \varphi^{(n)} \phi_n - B_\mu^{(n)} \partial_Z \psi_n) (\partial^\mu \varphi^{(m)} \phi_m - B^{\mu(m)} \partial_Z \psi_m) \right] + S_{\text{int}} \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

を得る. ここに, S_{int} は場の 3 次以上の項からなる相互作用項であり, 3.4 節で扱う. ここではまずスペクトルをみよう. そこで, $B_\mu^{(n)}$ の運動項を規格化するため,

$$\frac{1}{3} T_F \int dZ u^{-1} \psi_n \psi_m = \delta_{mn} \quad (3.3.37)$$

$$-u(Z) \partial_Z (u(Z)^3 \partial_Z \psi_n) = \lambda_n \psi_n \quad (3.3.38)$$

とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} T_F \int dZ u^3 \partial_Z \psi_n \partial_Z \psi_m &= -\frac{1}{6} T_F \int dZ \partial_Z (u^3 \partial_Z \psi_n) \psi_m \\ &= \frac{1}{6} T_F \int dZ u \lambda_n \psi_n \psi_m \\ &= \frac{1}{2} \lambda_n \delta_{mn} \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

を得る. またこの式から $\lambda_n \geq 0$ と分かる. そして, $\varphi^{(n)}$ の運動項の規格化は

$$\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 \int dZ u^3 \phi_n \phi_m = \delta_{nm} \quad (3.3.40)$$

とすればよい. これを (3.3.39) と比較すると,

$$\phi_n = M_{\text{KK}}^{-1} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \partial_Z \psi_n \quad (3.3.41)$$

とすれば良いことが分かる. しかしながら, (3.3.40) を満たし, $\partial_u \psi_m$ と直行するモードはもう1つある. それは,

$$\phi_0 = C u^{-3} \quad (3.3.42)$$

である. 実際,

$$\int dZ u^3 \phi_0 \phi_n \propto \int dZ \partial_Z \psi_n = 0 \quad (3.3.43)$$

となり, 確かに直交する. ここに, C は規格化定数で,

$$1 = \frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \int dZ u^{-3} \quad (3.3.44)$$

から決まる. さらに, ϕ_0 は ϕ_n の方程式:

$$-\partial_Z (u \partial_Z (u^3 \phi_n)) = \lambda_n \phi_n \quad (3.3.45)$$

の zero-mode になっていることが分かる. またこのとき (3.3.36) をみれば,

$$B_\mu^{(n)} \rightarrow B_\mu^{(n)} + M_{\text{KK}}^{-1} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu \varphi^{(n)} \quad (3.3.46)$$

とゲージ変換することで NG-bosons $\varphi^{(n)}$ ($n \geq 1$) は massive なゲージ場に吸収されることがわかる.

以上の規格直交化により作用は

$$S_F^{\text{DBI}} = - \int dt d^3x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{(0)} \partial^\mu \varphi^{(0)} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + \frac{1}{2} m_n^2 B_\mu^{(n)} B^{\mu(n)} \right) \right] \quad (3.3.47)$$

となる. すなわち,

$$m_n^2 \equiv \lambda_n M_{\text{KK}}^2 \quad (3.3.48)$$

が (擬) ベクトルメソンの質量 (の2乗) を表している. 後は λ_n , すなわち (3.3.38) の固有値問題を解けばよい.

$U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合には λ_n の値は数値的に求まっており [2], その結果は以下の通りである.

$$\lambda_1 = 0.67, \quad \lambda_2 = 1.6, \quad \lambda_3 = 2.9, \quad \lambda_4 = 4.5, \quad \dots \quad (3.3.49)$$

3.3.2 パリティと荷電共役

これまでに得たスペクトルを現実のメソンと同一視するためには、ローレンツ変換性だけでなく、パリティ変換 P や荷電共役変換 C に対する変換性をみる必要がある。そこで、まずは我々の5次元理論から4次元理論の P, C を定義することからはじめよう。座標として Z (3.3.31) を用いよう。このとき、(3.3.26) や (3.3.38) は $Z \rightarrow -Z$ の下で不変だから $\eta_n(Z), \psi_n(Z)$ は偶関数か奇関数のどちらかとなる。また、ローレンツ対称性から、作用は $(x^1, x^2, x^3, Z) \rightarrow -(x^1, x^2, x^3, Z)$ の下で不変となる。この変換は4次元 (x^0, x^1, x^2, x^3) で見ればまさにパリティである。

一方、 $A \rightarrow -A^T$ ではDBI作用は不変だが、CS項：

$$S_{CS} \sim \int C_3 \text{tr}_f F^3 \quad (3.3.50)$$

は符号を変える。しかし、 $A \rightarrow -A^T, Z \rightarrow -Z$ の下では作用は不変になる。4次元で見ればこれは荷電共役変換に他ならない。まとめると、パリティ P と荷電共役変換 C は次の変換で与えられる：

$$P : (x^1, x^2, x^3, Z) \rightarrow -(x^1, x^2, x^3, Z) \quad (3.3.51)$$

$$C : (A, Z) \rightarrow (-A^T, -Z) \quad (3.3.52)$$

次に、 X^4, A_μ, A_Z の P, C 変換性を調べよう。 A_μ, A_Z は定義から明らかで、

$$P : A_\mu \rightarrow A^\mu, A_Z \rightarrow -A_Z \quad (3.3.53)$$

$$C : A_\mu \rightarrow -A_\mu^T, A_Z \rightarrow A_Z^T \quad (3.3.54)$$

と振舞う。これから、

$$P : B_\mu^{(n)} \rightarrow \pm B^{\mu(n)}, \varphi^{(0)} \rightarrow -\varphi^{(0)} \quad (3.3.55)$$

$$C : B_\mu^{(n)} \rightarrow \mp B_\mu^{(n)T}, \varphi^{(0)} \rightarrow +\varphi^{(0)T} \quad (3.3.56)$$

を得る。ここに、符号は ψ_n が偶(奇)関数のときに上(下)をとるものとする。 J^{PC} で書くと、

$$B_\mu^{(n)} : 1^{\pm\pm}, \varphi^{(0)} : 0^{-+} \quad (3.3.57)$$

つまり、 ψ_n が偶(奇)関数なら $B_\mu^{(n)}$ は(軸性)ベクトルメソンとなる。従って、偶関数で固有値の小さいほうから順に $\rho, \rho(1450)$ メソンとみなせ、奇関数の最低固有値は $a_1(1260)$ メソンとみなせる。また、 $\varphi^{(0)}$ は質量0の擬スカラーであり、カイラル対称性の自発的破れに伴うNGボソン、すなわちパイオンとみなせる。パイオンの質量が0というのも、quarkが質量0であることと符合する。次に X^4 の変換性を見よう。作用には

$$S_{CS} \sim \int \text{tr}_f F^2 \wedge C_5, \quad C_5 \sim \pm X^4 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dZ \quad (3.3.58)$$

なる項がある．ここに， C_5 の符号は Z の符号と同じである．従って，作用が不変であるためには P, C で $X^4 \rightarrow -X^4$ でなければならない．つまり，

$$P, C : X^{(n)} \rightarrow \mp X^{(n)} \quad (3.3.59)$$

従って，奇関数で固有値の最も小さいのが $a_0(1450)$ メソンとみなせる．

3.3.3 $U_0 = U_{\text{KK}}$ での数値結果

$U_0 = U_{\text{KK}}$ においては λ_n, α_n の値が数値的に求まっている． P, C に対する変換性も合わせて λ_n^{PC} などと書くと，

$$\lambda_n^{CP} = 0.67^{--}, 1.6^{++}, 2.9^{--}, 4.5^{++}, \dots \quad (3.3.60)$$

$$\alpha_n^{CP} = 3.3^{++}, 5.3^{--}, \dots \quad (3.3.61)$$

ρ メソンの質量を再現するように M_{KK} の値を 949MeV に選んだとき，他の粒子の質量は以下のように表される．

	(軸性) ベクトルメソン					スカラーメソン
	ρ	a_1	ρ'	(a_1')	ρ''	$a_0(1450)$
実験値 (MeV)	776	1230	1465	1640	1720	1474
予言値 ($U_0 = U_{\text{KK}}$)	[776]	1189	1607	2023	2435	1722

素朴には，理論の cut off は M_{KK} 程度と考えられるから， ρ'' メソンの質量まで比較的再現されるのは驚きに値する．

3.4 メソンの相互作用

この 3.4 節では，ゲージ場として anti-Hermitian なもの：

$$\tilde{A} \equiv iA, \quad \tilde{A}^\dagger = -\tilde{A} \quad (3.4.1)$$

を用いる．前節で得た固有モードをもとに，パイオンや ρ メソンなどの相互作用を解析しよう．相互作用項は DBI 作用からだけでなく，CS 項からも出てくる．特に今の D4 background の場合で， S^4 依存性をみない限りにおいては CS 項は^{*8)}，

$$S_{\text{CS}} = i\mu \int_{\text{D8}} C_3 \text{tr} \tilde{F}^3 \quad (3.4.2)$$

^{*8)}RR 場の normalization は 1 章のそれに $\kappa_{10}^2 \mu^{6-p} / \pi = \mu_{6-p} (2\pi l_s)^7 / (2\pi \mu_p)$ 倍したものである．詳細は Appendix A.9 参照．

だけが nonzero になる。ここに, $\mu = 1/48\pi^2$. ここで,

$$\text{tr } \tilde{F}^3 = d\omega_5(\tilde{A}) \quad (3.4.3)$$

$$\omega_5(\tilde{A}) = \text{tr} \left(\tilde{A}\tilde{F}^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}^3\tilde{F} + \frac{1}{10}\tilde{A}^5 \right) \quad (3.4.4)$$

を用いて部分積分を行い, 全微分項を落とすと^{*9)},

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= i\mu \int_{\text{D8}} F_5 \omega_5(\tilde{A}) \\ &= \frac{iN_c}{24\pi^2} \int_{M_5} \omega(\tilde{A}) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

ここに, M_5 は x^0 - x^3, Z で張られる 5次元空間であり, 2つ目の等式では

$$\int_{S^4} F_4 = \int_{S^4} \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4 = 2\pi \quad (3.4.6)$$

を用いた.

従って, 我々がこの節で扱うべき作用は,

$$\begin{aligned} S_F &= S_F^{\text{DBI}} + S_{\text{CS}} \\ &= \frac{1}{3} T_F \int d^4 x dZ \left[\frac{1}{4} u(Z)^{-1} \tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{KK}}^2 u(Z)^3 \tilde{F}_{\mu Z}^2 \right] + \frac{iN_c}{24\pi^2} \int_{M_5} \omega(\tilde{A}) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

と書ける.

3.4.1 パイオンの有効作用

まずはパイオンの有効作用を導こう. $\varphi^{(n)}$ を $B_\mu^{(n)}$ のゲージ変換で吸収してしまうと,

$$U(x) \equiv \text{P exp} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} dZ \tilde{A}_Z(x, Z) \right) \quad (3.4.8)$$

$$= \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dZ \varphi^{(0)}(x) \phi_0 \right) \quad (3.4.9)$$

となり, $U(x)$ はパイオン場とみなせる:

$$U(x) = e^{2i\pi(x)/f_\pi} \quad (3.4.10)$$

今, ゲージ変換 $g(x, Z)$:

$$\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} g(x, Z) = g_\pm(x) \quad (3.4.11)$$

^{*9)}これを落とすのが正しいかどうかは, 今のところ良く分かっていない. しかし, こうすることで後述のようにメソンの物理を上手く再現できる.

の下で,

$$U(x) \rightarrow g_+ U(x) g_-^{-1} \quad (3.4.12)$$

と変換することから, g_{\pm} は $U(N_f)_{L/R}$ 対称性をゲージ化したときの元とみなせる.

さらに,

$$A_{\pm\mu}(x) \equiv \lim_{Z \rightarrow \infty} \tilde{A}_{\mu}(x, Z) \quad (3.4.13)$$

を考えると, これは (3.4.11) の下で

$$A_{\pm} \rightarrow g_{\pm} A_{\pm} g_{\pm}^{-1} + g_{\pm} \partial_{\mu} g_{\pm}^{-1} \quad (3.4.14)$$

と変換する. そこで, この $A_{\pm\mu}$ をゲージ化された $U(N_f)_{L/R}$ のゲージ場とみなそう. そして, $A_{\mu}(x, Z)$ のモード展開として normalizable モード $B_{\mu}^{(n)}$ だけでなく $A_{\pm\mu}$ も取り入れて

$$\tilde{A}_{\mu}(x, Z) = A_{+\mu}(x) \psi_+ + A_{-\mu}(x) \psi_- + \sum_{n \geq 1} B_{\mu}^{(n)} \psi_n(Z) \quad (3.4.15)$$

と書こう. ここに, ψ_{\pm} は,

$$\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} \psi_{\pm} = 1, \quad \lim_{Z \rightarrow \mp\infty} \psi_{\pm} = 0 \quad (3.4.16)$$

を満たす関数である. $B_{\mu}^{(n)}$ の再定義により ψ_{\pm} は自由に取ることが出来るが, ここでは特に

$$\psi_{\pm}(Z) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C \int_0^Z dZ' \phi_0(Z') \right) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \int_0^Z dZ' u(Z')^{-3} \right) \quad (3.4.17)$$

と選ぶこととする.

今, $\tilde{A}_Z = 0$ ゲージへ移るため,

$$g(x, Z)^{-1} = \text{P exp} \left(- \int_{-\infty}^Z dZ' \tilde{A}_Z(x, Z') \right) \quad (3.4.18)$$

なる g でゲージ変換すると,

$$\tilde{A}_M^g = g \tilde{A}_M g^{-1} + g \partial_M g^{-1} \quad (3.4.19)$$

となるが, このとき,

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \tilde{A}_{\mu}^g(x, Z) = A_{+\mu}^{U^{-1}}, \quad \lim_{Z \rightarrow -\infty} \tilde{A}_{\mu}^g(x, Z) = A_{-\mu} \quad (3.4.20)$$

となるので, A_{μ}^g のモード展開は

$$\tilde{A}_{\mu}^g(x, Z) = A_{+\mu}^{U^{-1}} \psi_+(Z) + A_{-\mu} \psi_-(Z) + \sum_{n \geq 1} B_{\mu}^{(n)}(x) \psi_n(Z) \quad (3.4.21)$$

と書ける.

Skyrme model

この節ではまずパイオンの相互作用だけに注目したいので, $A_{\pm\mu}, B_{\mu}^{(n)}(x)$ を落して (3.4.7) に代入する. このとき,

$$\tilde{A}_{\mu} = U^{-1}(x)\partial_{\mu}U(x)\psi_{+}(Z) \quad (3.4.22)$$

と書ける. これから, field strength は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= [U^{-1}(x)\partial_{\mu}U(x), U^{-1}(x)\partial_{\nu}U(x)]\psi_{+}\psi_{-} \\ \tilde{F}_{Z\mu} &= U^{-1}(x)\partial_{\mu}U(x)\partial_Z\psi_{+}(Z) \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

となる. これを S_F^{DBI} に代入すると,

$$\begin{aligned} S_F^{\text{DBI}} &= \frac{1}{3}T_F \int_{M_5} d^4x dZ \text{tr} \left[\frac{1}{4}u(Z)^{-1}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M_{\text{KK}}^2 u(Z)^3 F_{\mu Z}^2 \right] \\ &= \int_{M_4} d^4x \text{tr} \left[A(U^{-1}\partial_{\mu}U)^2 + B[U^{-1}(x)\partial_{\mu}U(x), U^{-1}(x)\partial_{\nu}U(x)]^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

を得る. ここに,

$$A = \frac{1}{6}T_F M_{\text{KK}}^2 \int dZ u(Z)^3 (\partial_Z \psi_+)^2 \quad (3.4.25)$$

$$B = \frac{T_F}{12} \int dZ u(Z)^{-1} \psi_+^2 \psi_-^2 \quad (3.4.26)$$

である. (3.4.24) はまさに Skyrme model と同じ形である. これを良く知られた Skyrme model の作用 [31] :

$$S = \int d^4x \left(\frac{f_{\pi}^2}{4} \text{tr}(U^{-1}\partial_{\mu}U)^2 + \frac{1}{32e^2} \text{tr}[U^{-1}(x)\partial_{\mu}U(x), U^{-1}(x)\partial_{\nu}U(x)]^2 \right) \quad (3.4.27)$$

と比較すると,

$$\begin{aligned} f_{\pi}^2 &= 4A = \frac{2}{3}T_F M_{\text{KK}}^2 \int dZ u(Z)^3 (\partial_Z \psi_+)^2 = \frac{2}{3}T_F M_{\text{KK}}^2 \left(\frac{1}{3}T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \right)^2 \int dZ u(Z)^{-3} \\ &= \frac{2}{3}T_F M_{\text{KK}}^2 \left(\int dZ u(Z)^{-3} \right)^{-1} \\ e^2 &= \frac{1}{32B} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Wess-Zumino-Witten (WZW) 項

今度はパイオンと外場の相互作用として WZW 項 [32, 33] が導かれることをみよう. この場合にはモード展開として

$$\tilde{A}_{\mu}^g = A_{+\mu}^{U^{-1}} \psi_{+}(Z) + A_{-\mu} \psi_{-}(Z) \quad (3.4.29)$$

を用いる。ここで注意しなければならないのは、 S_{CS} がゲージ不変でないことである。実際、

$$\omega_5(\tilde{A}^g) = \omega_5(\tilde{A}) + \frac{1}{10} \text{tr}(gdg^{-1})^5 + d\alpha_4(dg^{-1}g, \tilde{A}) \quad (3.4.30)$$

である。ここに、

$$\alpha_4(V, \tilde{A}) \equiv -\frac{1}{2} \text{tr} \left(V(\tilde{A}d\tilde{A} + d\tilde{A}\tilde{A} + \tilde{A}^3) - \frac{1}{2}V\tilde{A}V\tilde{A} - V^3\tilde{A} \right) \quad (3.4.31)$$

である。これを用いれば、

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[\tilde{A}] &= \frac{iN_c}{24\pi^2} \int \omega_5(\tilde{A}) \\ &= \frac{iN_c}{24\pi^2} \int \left(\omega_5(\tilde{A}^g) - \frac{1}{10} \text{tr}(gdg^{-1})^5 - d\alpha_4(dg^{-1}g, \tilde{A}) \right) \\ &= -\frac{iN_c}{24\pi^2} \int_{M_4} (\alpha_4(dUU^{-1}, A_+) - \alpha_4(0, A_-)) \\ &\quad + \frac{iN_c}{24\pi^2} \int \left(\omega_5(\tilde{A}^g) - \frac{1}{10} \text{tr}(gdg^{-1})^5 \right) \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

となる。ここで、 $\omega_5(\tilde{A}^g)$ に (3.4.29) のモード展開を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{M_5} \omega_5(\tilde{A}^g) &= \frac{1}{2} \int_{M_4} \text{tr} \left[(A_+^{U^{-1}} A_- - A_- A_+^{U^{-1}}) d(A_+^{U^{-1}} + A_-) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} A_+^{U^{-1}} A_- A_+^{U^{-1}} A_- + \left((A_+^{U^{-1}})^3 A_- - A_-^3 A_+^{U^{-1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

を得る。従って、

$$S_{\text{CS}} = -\frac{iN_c}{48\pi^2} \int_{M_4} Z - \frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{M_5} \text{tr}(gdg^{-1})^5 \quad (3.4.34)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr} \left[(A_- dA_- + dA_- A_- L A_-^3)(U^{-1} A_+ U + U^{-1} dU) - \text{p.c.} \right] \\ &\quad + \text{tr} \left[dA_- dU^{-1} A_+ U - \text{p.c.} \right] + \text{tr} \left[A_- (dU^{-1} U)^3 - \text{p.c.} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[(A_- dU^{-1} U)^2 - \text{p.c.} \right] + \text{tr} \left[U A_- U^{-1} A_+ dU dU^{-1} - \text{p.c.} \right] \\ &\quad - \text{tr} \left[A_- dU^{-1} U A_- U^{-1} A_+ U - \text{p.c.} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[A_- U^{-1} A_+ U \right]^2 \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

である。これはまさに WZW 項に他ならない。

3.4.2 Vector meson dominance

Vector meson dominance (VMD) とは、パイオンがフォトンと相互作用する際、直接の相互作用 $\mathcal{V}\pi\pi$ (図 3.3) よりも ρ メソンを介した相互作用 (図 3.4) の方が支配的になるという実験事

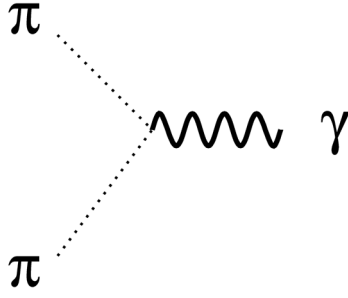


図 3.3: $\mathcal{V}\pi\pi$ coupling

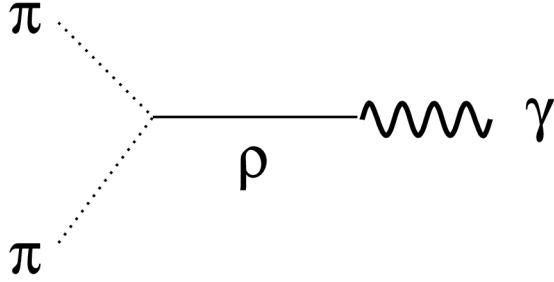


図 3.4: ρ メソンを介した coupling

実のことを言う．結論から言うと，この模型では $\mathcal{V}\pi\pi$ の結合定数が 0 になり，VMD が再現される．

この事実を見るためには，外場のベクトル成分 $\mathcal{V} = \frac{1}{2}(A_+ + A_-)$ とパイオン π ，ベクトルメソン $B^{(n)}$ の相互作用を調べれば良い．そこで，ゲージ変換で $\varphi^{(n)} = 0$ となるゲージへ移り，

$$\tilde{A}_\mu(x, Z) = \mathcal{V}_\mu(x) + \sum_{n \geq 1} \tilde{B}_\mu^{(n)}(x) \psi_n(Z) \quad (3.4.36)$$

$$\tilde{A}_Z(x, Z) = -i\pi(x)\phi_0(Z) \quad (3.4.37)$$

という展開を用いる．このとき，field strength は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \tilde{F}_{\mu\nu}^\mathcal{V} + \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{B}_\mu^{(n)}) \psi_n + \sum_{n \geq 1} \left([\mathcal{V}_\mu, \tilde{B}_\nu^{(n)}] - [\mathcal{V}_\nu, \tilde{B}_\mu^{(n)}] \right) \psi_n \\ &\quad + \sum_{n, m \geq 1} [\tilde{B}_\mu^{(n)}, \tilde{B}_\nu^{(m)}] \psi_n \psi_m \\ \tilde{F}_{Z\mu} &= \sum_{n \geq 1} \tilde{B}_\mu^{(n)} \partial_Z \psi_n + i\partial_\mu \pi \phi_0 - i[\pi, \mathcal{V}_\mu] \phi_0 - i \sum_{n \geq 1} [\pi, \tilde{B}_\mu^{(n)}] \phi_0 \psi_n \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

となるから，

$$\frac{1}{12} T_F \int_{M_5} d^4x dZ u(Z)^{-1} \text{tr} \tilde{F}_{\mu\nu}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} T_F \int_{M_5} d^4 x dZ u(Z)^{-1} \text{tr} \left[(\tilde{F}_{\mu\nu}^{\mathcal{V}})^2 + 2 \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu \mathcal{V}_\nu - \partial_\nu \mathcal{V}_\mu) (\partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{B}_\mu^{(n)}) \psi_n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n, m \geq 1} (\partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{B}_\mu^{(n)}) (\partial^\mu \tilde{B}^{\nu(m)} - \partial^\nu \tilde{B}^{\mu(m)}) \psi_n \psi_m + \mathcal{O}^3(\pi^0) \right] \\
&= \int d^4 x \text{tr} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_{\mathcal{V} B^n} (\partial_\mu \mathcal{V}_\nu - \partial_\nu \mathcal{V}_\mu) (\partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{B}_\mu^{(n)}) + \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{B}_\mu^{(n)})^2 \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}^3(\pi^0) \right] + \mathcal{L}(\mathcal{V}) \tag{3.4.39}
\end{aligned}$$

となる. ここに, $\mathcal{O}^3(\pi^0)$ は場について 3 次以上の項だが π を含まないような項である. また,

$$a_{\mathcal{V} B^n} \equiv \frac{1}{3} T_F \int dZ u^{-1} \psi_n \tag{3.4.40}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{V})$ は \mathcal{V} の運動項だが, 発散している. これは ψ_\pm が non-normalizable であることによる. ここで, $\tilde{B}_\mu^{(n)}$ の運動項を対角化するため,

$$\bar{B}_\mu^{(n)} \equiv \tilde{B}_\mu^{(n)} + a_{\mathcal{V} B^n} \mathcal{V}_\mu \tag{3.4.41}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12} T_F \int_{M_5} d^4 x dZ u(Z)^{-1} \text{tr} \tilde{F}_{\mu\nu}^2 \\
&= \int d^4 x \text{tr} \left[\frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu \bar{B}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \bar{B}_\mu^{(n)})^2 + \mathcal{O}^3(\pi^0) \right] + \mathcal{L}'(\mathcal{V}) \tag{3.4.42}
\end{aligned}$$

を得る. 同様にして,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6} T_F M_{\text{KK}}^2 \int_{M_5} d^4 x dZ u(Z)^3 \text{tr} \tilde{F}_{\mu Z}^2 \\
&= \frac{1}{6} T_F M_{\text{KK}}^2 \int_{M_5} d^4 x dZ u^3 \text{tr} \left[\sum_{n, m \geq 1} \tilde{B}_\mu^{(n)} \tilde{B}^{\mu(m)} \partial_Z \psi_n \partial_Z \psi_m - (\partial_\mu \pi)^2 (\phi_0)^2 \right. \\
&\quad + 2 \sum_{n \geq 1} \tilde{B}_\mu^{(n)} \partial^\mu \pi \phi_0 \partial_Z \psi_n - 2i \sum_{n \geq 1} \tilde{B}_\mu^{(n)} [\pi, \mathcal{V}^\mu] \partial_Z \psi_n \phi_0 + 2 \partial_\mu \pi [\pi, \mathcal{V}^\mu] (\phi_0)^2 \\
&\quad - i \sum_{n, m \geq 1} \left(\tilde{B}_\mu^{(n)} [\pi, \tilde{B}^{\mu(m)}] (\partial_Z \psi_n) \psi_m - \tilde{B}_\mu^{(m)} [\pi, \tilde{B}^{\mu(n)}] \psi_n \partial_Z \psi_m \right) \phi_0 \\
&\quad \left. + 2 \partial_\mu \pi \sum_{n \geq 1} [\pi, \tilde{B}^{\mu(n)}] \phi_0^2 \psi_n + \mathcal{O}^4 \right] \\
&= \int d^4 x \text{tr} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n M_{\text{KK}}^2 (\bar{B}_\mu^{(n)} - a_{\mathcal{V} B^n} \mathcal{V}_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \partial_\mu \pi [\pi, \mathcal{V}^\mu] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n \geq 1} g_{B^n \pi \pi} \partial_\mu \pi [\pi, \bar{B}_\mu^{(n)} - a_{\mathcal{V} B^n} \mathcal{V}_\mu] + \mathcal{O}^4 \right] + \mathcal{L}(\bar{B}^2 \pi, \bar{B} \pi \mathcal{V}, \pi \mathcal{V}^2) \tag{3.4.43}
\end{aligned}$$

を得る。ここに,

$$g_{B^n\pi\pi} \equiv \frac{1}{3}T_F M_{\text{KK}}^2 \int dZ u^3 \phi_0^2 \psi_n \quad (3.4.44)$$

そして, S_{CS} は π に対して 1 次の項しか含まないから, $\mathcal{V}\pi\pi$ の結合定数は

$$1 - \sum_{n \geq 1} g_{B^n\pi\pi} a_{\mathcal{V}B^n} = 1 - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 1} T_F^2 M_{\text{KK}}^2 \int dZ dZ' u(Z)^{-1} \psi_n(Z) u(Z')^3 \phi_0^2(Z') \psi_n(Z') \quad (3.4.45)$$

となる。ここで, 完全性

$$\frac{1}{3} T_F \sum_{n \geq 1} u(Z)^{-1} \psi_n(Z) \psi_n(Z') = \delta(Z - Z') \quad (3.4.46)$$

を用いると,

$$1 - \sum_{n \geq 1} g_{B^n\pi\pi} a_{\mathcal{V}B^n} = 1 - \frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 \int dZ u^3 \phi_0^2 = 0 \quad (3.4.47)$$

となる。従って, $\mathcal{V}\pi\pi$ coupling, 図 3.3 の寄与は存在しない。このことからほぼ VMD は明らかだが, 念のため図 3.4 の寄与が確かにあることを見よう。これを見るには $B\pi\pi$ coupling $g_{B^n\pi\pi}$ と $B\mathcal{V}$ coupling $g_{B^n} a_{\mathcal{V}B^n}$ が non-zero になることを言えばよい。実際, これらの coupling は (3.4.43) 第 1 項に含まれており, その係数は

$$g_{B^n} = m_{B^n}^2 a_{\mathcal{V}B^n} \quad (3.4.48)$$

となり, 軸性ベクトルメソンに対しては 0 となるが, ベクトルメソンに対しては non-zero である。一方, $B\pi\pi$ coupling は (3.4.43) 第 4 項に含まれており, その係数もやはりベクトルメソンに対しては non-zero となる。従って, 確かに図 3.4 の寄与は存在する。こうして VMD が説明できた。

3.4.3 KSRF 関係式

河原林-鈴木-Riazuddin-Fayyazuddin (KSRF) 関係式 [13, 14] とは次の 2 つの関係式を指す:

$$\frac{2g_{\rho\pi\pi} f_\pi^2}{m_\rho^2} = 1 \quad (3.4.49)$$

$$\frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} = 1 \quad (3.4.50)$$

また, これらに対する実験値は

$$\left. \frac{2g_{\rho\pi\pi} f_\pi^2}{m_\rho^2} \right|_{\text{exp}} = 1.02 \quad (3.4.51)$$

$$\left. \frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \right|_{\text{exp}} = 1.20 \quad (3.4.52)$$

となっている。これに対し、この模型の評価では、

$$\begin{aligned} \frac{2g_{\rho\pi\pi}f_\pi^2}{m_\rho^2} &= 2m_\rho^{-2} \left(\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \int dZ u^{-3} \psi_\rho \right) \frac{4}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 \left(\int dZ u^{-3} \right)^{-1} \\ &= \frac{8}{3} T_F \lambda_\rho^{-1} \left(\int dZ u^{-3} \right)^{-2} \int dZ u^{-3} \psi_\rho \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} &= m_\rho^{-2} \left(\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \int dZ u^{-3} \psi_\rho \right) m_\rho^2 \frac{1}{3} T_F \int dZ u^{-1} \psi_\rho \\ &= \frac{1}{3} T_F \left(\int dZ u^{-3} \right)^{-1} \left(\int dZ u^{-3} \psi_\rho \right) \left(\int dZ u^{-1} \psi_\rho \right) \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

ここに、 λ_ρ, ψ_ρ は ρ メソンに対応するモードの固有値および固有関数である。

さらに、Appendix A.8 の計算から、より一般化された KSRF 関係式：

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2g_{B^n \pi \pi}^2 f_\pi^2}{m_{B^n}^2} = \frac{2}{3} \quad (3.4.55)$$

が成り立つことが分かる。同様に、(3.4.47) から、次の式が成り立つ。

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g_{B^n} g_{B^n \pi \pi}}{m_{B^n}^2} = \sum_{n \geq 1} g_{B^n \pi \pi} a_{\nu B^n} = 1 \quad (3.4.56)$$

3.4.4 $U(1)_A$ アノマリーと η' メソンの質量

N_f 枚の D8 ブレインがあるとき、D8 ブレイン上のゲージ変換 $\delta_\Lambda \tilde{A} = d\Lambda + [\Lambda, \tilde{A}]$ で RR1 形式は

$$\delta_\Lambda C_1 = -i \text{tr}(\Lambda) \delta(x^4) dx^4 \quad (3.4.57)$$

と変換する。

ところで、D4 ブレイン上には CS 項

$$\frac{1}{8\pi^2} \mu_4 \int_{D4} C_1 \text{tr}_c F_c^2 \quad (3.4.58)$$

がある。ここに、 F_c は D4 ブレイン上のゲージ場の field strength である。従って、 θ パラメータは

$$\theta = \int_{S^1} C_1 = \int_{\mathbb{R}^2} F_2 \quad (3.4.59)$$

ここで、 S^1 の座標は x^4 で表され、 $U \rightarrow \infty$ にある^{*10)}。これから、(3.4.57) を用いて

$$\delta_\Lambda \theta = -i \int_{S^1} \text{tr}(\Lambda) \delta(x^4) dx^4 = -i \text{tr}(\Lambda)|_{z=+\infty} + i \text{tr}(\Lambda)|_{z=-\infty} \quad (3.4.60)$$

を得る。特に今、 $U(1)_A$ 変換は $\Lambda|_{z=\pm\infty} = \pm i\alpha \cdot 1_{N_f}$ で表されるから、

$$\delta_\Lambda \theta = 2N_f \alpha \quad (3.4.61)$$

これはまさに QCD の $U(1)_A$ アノマリーである。

さらに、(3.4.57) より、 F_2 はゲージ不変ではなく、

$$\tilde{F}_2 \equiv dC_1 + i \text{tr}(\tilde{A}) \wedge \delta(x^4) dx^4 \quad (3.4.62)$$

が不変となる。このとき、

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}_2 = \theta + i \int_{-\infty}^{\infty} dZ \text{tr}(\tilde{A}_Z) \quad (3.4.63)$$

ここで、(3.4.8) と (3.4.10) とから、 $\varphi^{(n)} = 0$ ($n \geq 0$) ゲージでは

$$i \int_{-\infty}^{\infty} dZ \text{tr}(\tilde{A}_Z) = \frac{2}{f_\pi} \text{tr}(\pi) = \frac{\sqrt{2N_f}}{f_\pi} \eta'(x) \quad (3.4.64)$$

となることを用いると、

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}_2 = \theta + \frac{\sqrt{2N_f}}{f_\pi} \eta' \quad (3.4.65)$$

となる。このとき、ゲージ不変な作用は (A.9.4) より、

$$S_{C_1} = -\frac{1}{4\pi(2\pi l_s)^6} \int d^{10}x |\tilde{F}_2|^2 \quad (3.4.66)$$

である。今、(3.4.65) を満たすような \tilde{F}_2 は

$$\tilde{F}_2 = \frac{c}{U^4} \left(\theta + \frac{\sqrt{2N_f}}{f_\pi} \eta' \right) dU \wedge dx^4 \quad (3.4.67)$$

と書ける。ここに、

$$c \equiv \frac{3U_{\text{KK}}^3}{\delta x^4} \quad (3.4.68)$$

(3.4.67) を (3.4.66) に代入すると、

$$S_{C_1} = -\frac{\chi_g}{2} \int d^4x \left(\theta + \frac{\sqrt{2N_f}}{f_\pi} \eta' \right)^2 \quad (3.4.69)$$

^{*10)} $U \rightarrow \infty$ を考えるのはこれは bulk-boundary 対応による

ここに,

$$\chi_g = \frac{1}{4(3\pi)^6} (g_{\text{YM}} N_c)^3 M_{\text{KK}}^4 \quad (3.4.70)$$

である. さらに, (3.4.69) から,

$$\chi_g = \left(\frac{\partial^2 E_{\text{NH}}}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=0} \quad (3.4.71)$$

と書ける. ただし, E_{NH} は地平面近傍の理論 (作用は S_{NH} と書かれていた) の真空エネルギーである. 従って, η' メソンの質量は

$$m_{\eta'}^2 = \frac{2N_f}{f_\pi^2} \left(\frac{\partial^2 E_{\text{NH}}}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=0} \quad (3.4.72)$$

となり, これは Witten-Veneziano の公式 [29, 30] に他ならない.

3.4.5 $U_0 = U_{\text{KK}}$ での数値結果

これまでに与えられた表式は $U_0 = U_{\text{KK}}$ においては数値的に求まっている.

Skyrme model のパラメータ

$N_f = 3$ の場合, Skyrme 項は

$$\frac{1}{32e_S^2} \text{tr}[U^{-1}\partial_\mu U, U^{-1}\partial_\nu U]^2 = L_1 P_1 + L_2 P_2 + L_3 P_3 \quad (3.4.73)$$

と書ける. ここに,

$$P_1 = (\text{tr}(\partial_\mu U^{-1}\partial^\mu U))^2, \quad P_2 = \text{tr}(\partial_\mu U^{-1}\partial_\nu U) \text{tr}(\partial^\mu U^{-1}\partial^\nu U), \quad (3.4.74)$$

$$P_3 = \text{tr}(\partial_\mu U^{-1}\partial^\mu U \partial_\nu U^{-1}\partial^\nu U)$$

$$L_1 = \frac{1}{32e_S^2}, \quad L_2 = \frac{1}{16e_S^2}, \quad L_3 = -\frac{3}{16e_S^2} \quad (3.4.75)$$

一方, この模型では f_π^2 と e_S は T_F を M_{KK} の2つのパラメータで表されている. M_{KK} は ρ メソンに合わせて $M_{\text{KK}} \simeq 949 \text{MeV}$ に選ぶことにして, 残ったパラメータ T_F は実験値 $f_\pi \simeq 92.4 \text{MeV}$ を再現するように選ぶと, $L_i (i = 1, 2, 3)$ に対するこの模型の予言値が決まる:

	L_1	L_2	L_3
実験値 ($\times 10^{-3}$)	0.4 ± 0.3	1.4 ± 0.3	-3.5 ± 1.1
予言値 ($U_0 = U_{\text{KK}}$)	0.584	1.17	-3.51

KSRF 関係式

(3.4.53), (3.4.54) から, ρ メソンに対する固有値 λ_ρ と固有関数 $\psi_\rho(Z)$ が数値的に求まれば, KSRF 関係式の右辺の値が求まる. その結果は以下の通りである.

$$\frac{2g_{\rho\pi\pi}f_\pi^2}{m_\rho^2} = 0.654 \quad (3.4.76)$$

$$\frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} = 1.31 \quad (3.4.77)$$

3.5 高スピンメソン

メソンは両端を D8 ブレインにおく開弦で表される. 前節では, KK モードとして現れるスピン 0 の (擬) スカラーメソンやスピン 1 の (軸性) ベクトルメソンのスペクトルおよび相互作用をみた. しかし, この方法ではより大きなスピンをもったモードの解析は困難である.

ところが, 角運動量 J が十分大きければ, 開弦は古典的に扱うことができる. というのも, (3.5.28) 式で見るように, J が大きいことは開弦が長く, 角速度が遅いことを表しているからである. そこで, (x^1, x^2) 平面内で回転し, $U = U_0$ に両端を持つような開弦を考える. 今, D4 background を

$$ds^2 = \left(\frac{U}{R_{D4}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(-(dx^0)^2 + dR^2 + R^2 d\theta^2 + (dx^3)^2 + f(dx^4)^2 \right) + R_{D4}^{\frac{3}{2}} \rho^{-2} U^{\frac{1}{2}} (d\rho^2 + \rho^2 \omega^2) \quad (3.5.1)$$

と表す. ここに, (R, θ) は (x^1, x^2) 平面の極座標である. また, ここでは U の代わりに ρ を用いる:

$$U = \left(\rho^{\frac{3}{2}} + \frac{U_{\text{KK}}^3}{4\rho^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho_{\text{KK}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} U_{\text{KK}}, \quad (3.5.2)$$

$$f(U) = 1 - \frac{U_{\text{KK}}^3}{U^3} = U^{-3} \left(\rho^{\frac{3}{2}} - \frac{U_{\text{KK}}^3}{4\rho^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \quad (3.5.3)$$

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{2}{3} \left(\rho^{\frac{3}{2}} + \frac{U_{\text{KK}}^3}{4\rho^{\frac{3}{2}}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{2}} - \frac{3U_{\text{KK}}^3}{8\rho^{\frac{5}{2}}} \right) = \rho^{-1} U f^{\frac{1}{2}} \quad (3.5.4)$$

そして, 回転する開弦を次の様に表す:

$$X^0 = e\tau, \quad \theta = e\omega\tau, \quad \rho = \rho(\sigma), \quad R = R(\sigma) \quad (3.5.5)$$

ここに τ, σ は世界面の時間的および空間的座標 $(-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2})$ である. また, 開弦の中心 $\sigma = 0$ で $R = 0$ としておく. このとき, 世界面上の誘導計量 γ_{ab} ($a, b = \tau, \sigma$) は,

$$\gamma_{\tau\tau} = g_{MN} \partial_\tau x^M \partial_\tau x^N = (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} \left(-(\partial_\tau X^0)^2 + (\partial_\tau \theta)^2 R^2 \right) = -\epsilon^2 \left(\frac{U}{R_{D4}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\sigma\sigma} &= g_{MN}\partial_\sigma x^M\partial_\sigma x^N = R_{D4}^{\frac{3}{2}}\rho^{-2}U^{\frac{1}{2}}(\partial_\sigma\rho)^2 + (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(\partial_\sigma R)^2 \\ \gamma_{\sigma\tau} &= 0\end{aligned}\tag{3.5.6}$$

ここに $\epsilon \equiv \sqrt{e^2 - (e\omega)^2 R^2}$.

このとき，南部・後藤作用は

$$\begin{aligned}S_{\text{NG}} &= -T_s \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma_{ab}} \\ &= -T_s \int d\tau d\sigma \sqrt{(UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}}((\partial_\tau X^0)^2 + R^2(\partial_\tau\theta)^2) \left(R_{D4}^{\frac{3}{2}}\rho^{-2}U^{\frac{1}{2}}(\partial_\sigma\rho)^2 + (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(\partial_\sigma R)^2 \right)} \\ &= -T_s \int d\tau d\sigma \epsilon U \sqrt{\rho^{-2}(\partial_\sigma\rho)^2 + UR_{D4}^{-3}(\partial_\sigma R)^2}\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

$$= -T_s \int d\tau dR \epsilon U \sqrt{UR_{D4}^{-3} + \rho^{-2}\dot{\rho}^2}\tag{3.5.8}$$

と書ける．(3.5.8) から導かれる EOM は，

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{\epsilon U \dot{\rho}}{\rho^2 \sqrt{UR_{D4}^{-3} + \rho^{-2}\dot{\rho}^2}} \right) = \frac{dU}{d\rho} \frac{\epsilon}{\sqrt{UR_{D4}^{-3} + \rho^{-2}\dot{\rho}^2}} \left(\frac{3}{2} UR_{D4}^{-3} + \rho^{-2}\dot{\rho}^2 \right) - \frac{\epsilon U \dot{\rho}^2}{\rho^3 \sqrt{UR_{D4}^{-3} + \rho^{-2}\dot{\rho}^2}}\tag{3.5.9}$$

となる．ここに上付き dot は d/dR を表す．この EOM を解析的に解くのは困難であるから，開弦を次の2つの領域に分けることで簡単化してみる．

領域 I $\partial_\sigma R = 0$; D8 ブレイン ($U = U_0$) から地平面 ($U = U_{\text{KK}}$) へと降りる線

領域 II $\partial_\sigma \rho = 0$; 地平面上を這うように伸びる線

弦が十分長ければ，この近似は妥当だと考えられる．また，領域 I, II のそれぞれではこの EOM は満たされていることに注意しよう．実際，領域 I では $\dot{\rho} = \infty, R = L$ だから，EOM は近似的に

$$\text{LHS} = \frac{d}{dR} \left(\frac{\epsilon U}{\rho} \right), \quad \text{RHS} = \frac{dU}{dR} \epsilon \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\epsilon U \dot{\rho}}{\rho^2} = \frac{d}{dR} \left(\frac{\epsilon U}{\rho} \right)\tag{3.5.10}$$

と書け，確かに満たされている．同様に領域 II では $\dot{\rho} = 0, \rho = \rho_{\text{KK}}$ だから，EOM は近似的に

$$\text{LHS} = 0, \quad \text{RHS} \propto \frac{dU}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{\text{KK}}} = 0\tag{3.5.11}$$

となり，確かに満たされている．

各領域で EOM が満たされていることが分かったが，今の場合，領域の境界からの寄与も含めて最小作用の原理を満たさなければならない．ところが，2つの領域に分けたものはあくま

で解に対する近似的な描像に過ぎず、これそのものが解であるわけではない。つまり、最小作用の原理を満たす必要はない。しかしながら、2つの領域に分かれるという条件を保った上で、の最小作用の原理は満たすべきであろう。そこで、次の条件付の変分 $\delta R, \delta \rho$ を考える。

$$\partial_\sigma \delta R = 0 \text{ (for } \sigma \in \text{I}), \quad \partial_\sigma \delta \rho = 0 \text{ (for } \sigma \in \text{II}), \quad \delta \rho|_{\partial \text{I}} = 0 \quad (3.5.12)$$

南部・後藤作用 (3.5.7) を R と ρ のそれぞれについて変分してみよう：

$$-\frac{1}{T_s} \delta_R S = \int d\tau d\sigma \left[(\partial_\sigma \delta R) \frac{\epsilon U^2 R_{D4}^{-3} \partial_\sigma R}{\sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2}} - \delta R \frac{(e\omega)^2 R}{\epsilon} U \sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2} \right] \quad (3.5.13)$$

$$-\frac{1}{T_s} \delta_\rho S = \int d\tau d\sigma \left[(\partial_\sigma \delta \rho) \frac{\epsilon U \partial_\sigma \rho}{\rho^2 \sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2}} + \delta \rho \left(\frac{dU}{d\rho} \frac{\epsilon (\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + \frac{3}{2} U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2)}{\sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2}} - \frac{\epsilon U (\partial_\sigma \rho)^2}{\rho^3 \sqrt{U R_{D4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2 + \rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2}} \right) \right] \quad (3.5.14)$$

すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T_s} \delta_R S_{\text{NG}}^{\text{I}} &= - \int_{\text{I}} d\tau d\sigma \delta R \frac{(e\omega)^2 R \partial_\sigma \rho}{\epsilon \rho} U = - \frac{(e\omega)^2 L}{\epsilon_L} \int_{\text{I}} d\tau d\sigma \delta R \frac{U}{\rho} \\ -\frac{1}{T_s} \delta_R S_{\text{NG}}^{\text{II}} &= \int_{\partial \text{II}} d\tau \delta R \epsilon U^{\frac{3}{2}} R_{D4}^{-\frac{3}{2}} - \int_{\text{II}} d\tau d\sigma \delta R \left(\partial_\sigma (\epsilon U^{\frac{3}{2}} R_{D4}^{-\frac{3}{2}}) - \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} U^{\frac{3}{2}} R_{D4}^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \epsilon_L U_{\text{KK}}^{\frac{3}{2}} R_{D4}^{-\frac{3}{2}} \int_{\partial \text{II}} d\tau \delta R \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

となる。ここに $\epsilon_L = \epsilon(R=L)$ 。特に δR として領域 I で σ に依らないものを考えると、 $\delta_R S_{\text{NG}}^{\text{I}} = 0$ から、

$$\frac{(e\omega)^2 L}{\epsilon_L} \int d\rho \frac{U}{\rho} = \epsilon_L (U_{\text{KK}} R_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} \quad (3.5.16)$$

となる。ここで、

$$m_q = T_s \int_{\rho_{\text{KK}}}^{\rho_0} d\rho \sqrt{-g_{00} g_{\rho\rho}} = T_s \int_{\rho_{\text{KK}}}^{\rho_0} d\rho \frac{U}{\rho} \quad (3.5.17)$$

$$T_{\text{eff}} = T_s (U_{\text{KK}} R_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} \quad (3.5.18)$$

を用いると、この関係は

$$1 - \omega^2 L^2 = \frac{\omega^2 L m_q}{T_{\text{eff}}}, \quad \text{or} \quad m_q = ((\omega L)^{-2} - 1) T_{\text{eff}} L \quad (3.5.19)$$

と書ける.

次に, $\delta_\rho S_{\text{NG}}$ について考えてみよう. 各領域での変分は次のようになる.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{T_s} \delta_\rho S_{\text{NG}}^I &= \int_I d\tau d\sigma \left((\partial_\sigma \delta \rho) \frac{\epsilon_L U}{\rho} + \delta \rho \left(\frac{dU}{d\rho} \epsilon_L \rho^{-1} \partial_\sigma \rho - \frac{\epsilon_L U \partial_\sigma \rho}{\rho^2} \right) \right) \\
&= \epsilon_L \frac{U_{\text{KK}}}{\rho_{\text{KK}}} \int_{\partial I} d\tau \delta \rho = 0 \\
-\frac{1}{T_s} \delta_\rho S_{\text{NG}}^{II} &= 0
\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

従って, 停留条件は満たされている.

ところで, この弦のエネルギーと角運動量は

$$E = T_s \int d\sigma \frac{\partial \sqrt{-h}}{\partial (\partial_\tau X^0)} = T_s \int d\sigma \frac{e}{\epsilon} U \sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D_4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2} \tag{3.5.21}$$

$$J = T_s \int d\sigma \frac{\partial \sqrt{-h}}{\partial (\partial_\tau \theta)} = T_s \int d\sigma \frac{e \omega R^2}{\epsilon} U \sqrt{\rho^{-2} (\partial_\sigma \rho)^2 + U R_{D_4}^{-3} (\partial_\sigma R)^2} \tag{3.5.22}$$

で表される. これから, 各領域からの寄与はそれぞれ,

$$E_I = T_s \frac{e}{\epsilon_L} \int d\sigma \frac{\partial_\sigma \rho}{\rho} = 2 \frac{e T_s}{\epsilon_L} \int_{\rho_{\text{KK}}}^{\rho_0} \frac{U}{\rho} = \frac{2m_q}{\sqrt{1 - \omega^2 L^2}} \tag{3.5.23}$$

$$J_I = \frac{2\omega L^2 m_q}{\sqrt{1 - \omega^2 L^2}} \tag{3.5.24}$$

$$\begin{aligned}
E_{II} &= T_s e (U_{\text{KK}} R_{D_4}^{-1})^{\frac{3}{2}} 2 \int_0^L dR \frac{1}{\epsilon} = 2T_{\text{eff}} \int_0^L dR \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}} \\
&= 2T_{\text{eff}} \omega^{-1} \sin^{-1}(\omega L)
\end{aligned} \tag{3.5.25}$$

$$\begin{aligned}
J_{II} &= T_s e \omega (U_{\text{KK}} R_{D_4}^{-1})^{\frac{3}{2}} 2 \int dR \frac{R^2}{\epsilon} = 2T_{\text{eff}} \omega^{-2} \int_0^{\sin^{-1}(\omega L)} d\phi \sin^2 \phi \\
&= T_{\text{eff}} \omega^{-2} (\sin^{-1}(\omega L) - \omega L \sqrt{1 - \omega^2 L^2})
\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

従って, 全エネルギー E_{tot} および全角運動量 J_{tot} は

$$E_{\text{tot}} = E_I + E_{II} = 2T_{\text{eff}} \omega^{-1} \sin^{-1}(\omega L) + \frac{2m_q}{\sqrt{1 - \omega^2 L^2}} \tag{3.5.27}$$

$$J_{\text{tot}} = J_I + J_{II} = T_{\text{eff}} \omega^{-2} \left(\sin^{-1}(\omega L) - \omega L \sqrt{1 - \omega^2 L^2} \right) + \frac{2\omega L^2 m_q}{\sqrt{1 - \omega^2 L^2}} \tag{3.5.28}$$

となる.

ここで特に非相対論的極限 $\omega L \rightarrow 0$ を考えると,

$$E_{\text{tot}} \rightarrow 2m_q + 2T_{\text{eff}} L \tag{3.5.29}$$

$$J_{\text{tot}} \rightarrow 2m_q \omega L^2 + \frac{2}{3} T_{\text{eff}} \omega L^3 \quad (3.5.30)$$

となる。これは長さ $2L$ 、線密度 T_{eff} の棒の両端に質量 m_q の粒子がついている状況を表している。このことから、 m_q, T_{eff} をそれぞれ constituent quark mass, 弦の有効張力とみなせることが分かる。また、(3.5.17) からこのときの quark の質量は

$$m_q \gg T_{\text{eff}} L \quad (3.5.31)$$

となり、非常に重いことが分かる。

一方、相対論的極限 $\omega L \rightarrow 1$ では、

$$E_{\text{tot}} \rightarrow \pi T_{\text{eff}} L \quad (3.5.32)$$

$$J_{\text{tot}} \rightarrow \frac{1}{2} \pi T_{\text{eff}} L^2 \quad (3.5.33)$$

$$m_q \rightarrow 0 \quad (3.5.34)$$

となり、Regge 軌跡が再現される：

$$J = \frac{1}{2\pi T_{\text{eff}}} E^2 \quad (3.5.35)$$

3.6 有限温度

場の理論では、有限温度系は Euclidian time を S^1 コンパクト化することで得られた。これに双対な重力解としては、 t 方向が同じ周期で S^1 コンパクト化された解を採用すべきだろう。ここでも D8 ブレインはプローブとして扱い、まずは D4 ブレインに対応した重力解を探そう。

3.6.1 D4 background

t, x^4 のそれぞれに S^1 コンパクト化された D4 ブレイン解を求めよう。実は、この性質を持つ重力解は2つあることがある。後に示すように、この二つの解がそれぞれ閉じ込め相と非閉じ込め相に対応している。

まず1つ目の解は、単に零温度の重力解 (3.2.16) において t 方向を周期的にしたものである：

$$ds^2 = (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(dt^2 + (dx^i)^2 + f(dx^4)^2) + (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}}(f^{-1}dU^2 + U^2d\Omega_4^2)$$

$$f(U) = 1 - (U_{\text{KK}}U^{-1})^3, \quad F_4 = \frac{2\pi N_c}{V_4}\epsilon_4, \quad e^\phi = g_s(UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{4}}, \quad R_{D4} = \pi g_s N_c l_s^3 \quad (3.6.1)$$

以下これを X_4 と呼ぶことにする。この場合には、 t の周期 $\beta = 1/T$ は他のパラメータ (U_{KK}, R_{D4}) とは独立にとれるが、 x^4 の周期は

$$\delta x^4 = 2\pi M_{\text{KK}}^{-1} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_{D4}^3}{U_{\text{KK}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6.2)$$

と表される。この解は図 3.5 のようにかける。

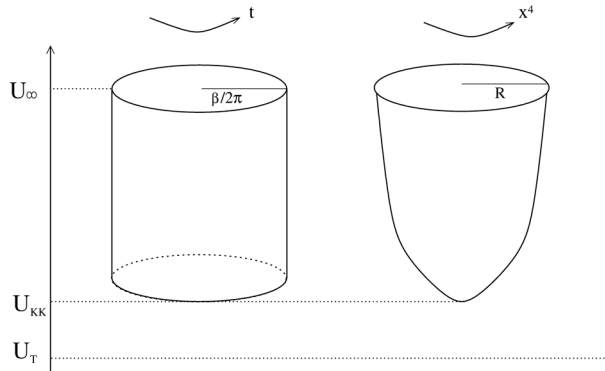


図 3.5: X_4 ($T < T_c$)

2つ目の解は、上の解で t と x^4 を入れ替えたものである：

$$ds^2 = (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}}(\tilde{f}(dt)^2 + (dx^i)^2 + (dx^4)^2) + (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}}(\tilde{f}^{-1}dU^2 + U^2d\Omega_4^2)$$

$$\tilde{f}(U) = 1 - (U_T U^{-1})^3, \quad F_4 = \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4, \quad e^\phi = g_s (U R_{D4}^{-1})^{\frac{3}{4}}, \quad R_{D4} = \pi g_s N_c l_s^3 \quad (3.6.3)$$

ただし、 U の最小値 U_T は上の解の U_{KK} とは一般には異なる。以下これを X_t と呼ぶ。この解では、 x^4 の周期 $2\pi M_{KK}^{-1}$ は U_T, R_{D4} に依らないが、 t の周期 $\beta = \frac{1}{T}$ は

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_{D4}^3}{U_T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6.4)$$

となる。この解は図 3.6 のようにかける。

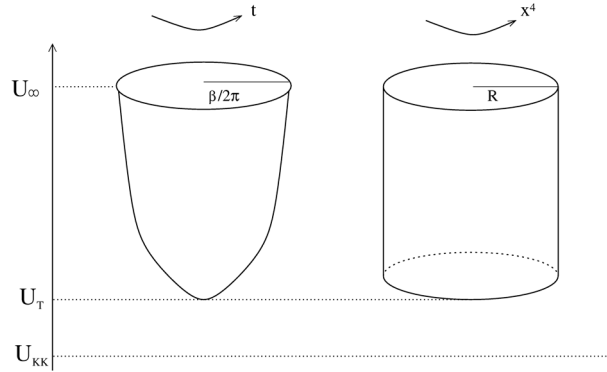


図 3.6: X_t ($T > T_c$)

3.6.2 相転移

有限温度の場の理論では、エネルギーは作用に時間周期をかけたもので与えられる。従って、ある温度下で前小節で求めた 2 つの解 X_4, X_t のうちどちらの解が支配的であるかをみるには、両者の作用を比較すればよい。それぞれの作用の値を $S(X_4), S(X_t)$ と書くと、Appendix A.3 より、

$$\begin{aligned} S(X_4) &= s_0 \int_{U_{KK}}^{\infty} dU U^2 \\ S(X_t) &= s_0 \int_{U_T}^{\infty} dU U^2 \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

となる。ここに、 s_0 は U_{KK}, U_T に依らない正の定数である。従って、両者の差は、

$$S(X_4) - S(X_t) = s_0 \int_{U_{KK}}^{U_T} dU U^2 = \frac{1}{3} s_0 (U_T^3 - U_{KK}^3) = s'_0 \left(T^6 - \frac{1}{(2\pi R)^6} \right) \quad (3.6.6)$$

となる。ただし、 s'_0 も U_{KK}, U_T に依らない正の定数である。これから、 $T_c \equiv M_{KK}/2\pi$ が相転移温度であることが分かる：

低温 ($T < T_c$): X_4 が選ばれる. すなわち, 閉じ込め相.

高温 ($T > T_c$): X_t が選ばれる. すなわち, 非閉じ込め相.

このように QCD で期待される閉じ込め相転移が記述できた.

3.6.3 有限温度でのプローブ D8 ブレイン

上で見たように, ホログラフィック QCD での閉じ込め/非閉じ込めの判定は D4 ブレインのつくる背景時空の性質による. 一方, D8 ブレイン上のゲージ対称性として実現されるカイラル対称性は D8 ブレインの性質を調べることによって初めて分かる.

ところで, 系全体のエネルギー (作用) は近似的に

$$S_{\text{tot}} = S_{D4} + S_{D8} \quad (3.6.7)$$

で与えられる. ここに, S_{D4} は前節で与えた D4 background のエネルギーであり, S_{D8} は D4 時空中のプローブ D8 ブレインのエネルギーである. 本来, 閉じ込め/非閉じ込めを論じる際にも D8 ブレインの寄与をきちんと加味しなければならない. しかしながら, $S_{D4} = \mathcal{O}(N_c^2)$, $S_{D8} = \mathcal{O}(N_c)$ から, ラージ N_c 極限では D8 ブレインによる寄与は十分小さく, 前節の解析は変更を受けない.

さて, それでは前節で得た 2 つの相での D8 ブレインの振る舞いを見て, カイラル相転移について考えていこう.

低温相

前節の結果から, 低温で実現される背景時空は X_4 : (3.6.1) で与えられる. このときは, 零温度のときと同様に, D8 ブレインと $\overline{D8}$ ブレインとがつながって 1 つの D8 ブレインとなり, カイラル対称性は破れている. (U, x^4) 平面における D8 ブレインの形も零温度のときと同様である.

高温相

実現される背景時空は X_t である. このときにもつながった解は存在して, カイラル対称性が破れた (χSB) 相に対応する. ところが, この時空にはもう 1 つ許される解がある. いま, $U = U_T$ には time like killing ベクトルが存在し, 事象の地平面とみなせる. 従って, D8($\overline{D8}$)

ブレインはこの地平面に端を置くことが出来る^{*11)}. すなわち, $x^4 = 0$ で表される D8 ブレインと $x^4 = L$ で表される $\overline{\text{D8}}$ ブレインからなる解が存在しうる. この解はカイラル対称性が回復した (χS) 相に対応する.

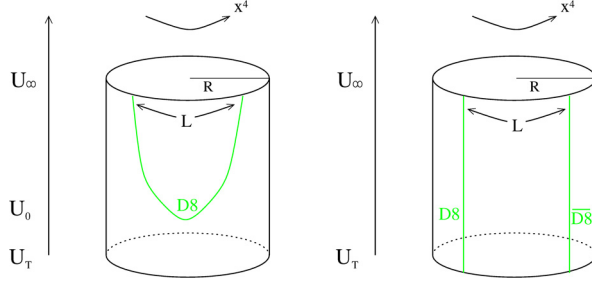


図 3.7: U-shape 解 (左) と平行解 (右)

これら 2 つの解のうちどちらの解が実現されるかは, やはり作用の比較を行うことによって分かる. D8 ブレインの有効作用としては次のものを用いる^{*12)}:

$$S_{\text{D8}} = 2T_8 \int dt d^3x dU d\Omega_4 e^{-\phi} \sqrt{-g_{\text{D8}}} \quad (3.6.8)$$

今の場合, D8 ブレイン上に誘導される計量は,

$$ds_{\text{D8}}^2 = (UR_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} \left(\tilde{f}(U) dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right) + \left((UR_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dx^4}{dU} \right)^2 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \tilde{f}^{-1} \right) dU^2 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} U^2 d\Omega_4^2 \quad (3.6.9)$$

である. 従って,

$$S_{\text{D8}} = 2T_8 V_4 g_s^{-1} \int dt d^3x dU (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{4}} U^4 \tilde{f}^{\frac{1}{2}} \sqrt{(UR_{\text{D4}}^{-1})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dx^4}{dU} \right)^2 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \tilde{f}^{-1}} \\ = 2T_8 V_4 g_s^{-1} \int dt d^3x dx^4 U^4 \tilde{f}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-3} \tilde{f}^{-1} \left(\frac{dU}{dx^4} \right)^2} \quad (3.6.10)$$

となる.

そこで, まず, U-shape 解を求めよう. x^4 を時間とみなすと, ラグランジアン $L(U(x^4))$ は時間に陽に依存していない. 従って, ハミルトニアンは保存する. そして, $dU/dx^4|_{U=U_0} = 0$ となるから,

$$\frac{U^4 \tilde{f}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + (UR_{\text{D4}}^{-1})^{-3} \tilde{f}^{-1} \left(\frac{dU}{dx^4} \right)^2}} = U_0^4 \tilde{f}_0^{\frac{1}{2}}$$

^{*11)}端を持つというのは余り正確な表現ではない. 確かに, 図 3.7 のように (x^4, U) 平面で見ると $U = U_{\text{KK}}$ に端があるように見えるが, 時間方向まで加味すると端点を持たず広がった物体である. この点については高柳氏に指導していただいた.

^{*12)}Euclid 化されていることに注意.

$$\therefore \left(\frac{dx^4}{dU} \right)^2 = \frac{U_0^8 \tilde{f}_0}{U^8 \tilde{f} - U_0^8 \tilde{f}_0} (UR_{D4}^{-1})^{-3} \tilde{f}^{-1} \quad (3.6.11)$$

を得る. よって, U-shape 解の作用は

$$\begin{aligned} S_{D8}^U &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} \int dt d^3 x dU U^4 (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{U^8 \tilde{f}(U)}{U^8 \tilde{f}(U) - U_0^8 \tilde{f}(U_0)}} \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} \int dt d^3 x \int_{U_0}^{\infty} dU U^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{U^8 \tilde{f}(U)}{U^8 \tilde{f}(U) - U_0^8 \tilde{f}(U_0)}} \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{7}{2}} \int dt d^3 x \int_1^{\infty} dy y^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{y^8 \tilde{f}(y)}{y^8 \tilde{f}(y) - \tilde{f}(1)}} \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

となる. ここに,

$$y \equiv \frac{U}{U_0}, \quad \tilde{f}(y) = 1 - \frac{y_T^3}{y^3}, \quad y_T = \frac{U_T}{U_0} (< 1) \quad (3.6.13)$$

である.

次に, 平行解の作用を計算しよう. $dx^4/dU = 0$ を (3.6.10) に代入すると,

$$\begin{aligned} S_{D8}^P &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} \int dt d^3 x \int_{U_T}^{\infty} U^{\frac{5}{2}} \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{7}{2}} \int dt d^3 x \int_{y_T}^{\infty} y^{\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

ここに, 全体にかかる係数 2 は D8 と $\overline{D8}$ の 2 つの寄与があることを表している.

従って, 2 つの解の作用の差は

$$\begin{aligned} \Delta s(y_T) &\equiv \frac{S_{D8}^U - S_{D8}^P}{2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{5}{2}} \int dt d^3 x} \\ &= \int_1^{\infty} dy y^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt{\frac{y^8 \tilde{f}(y)}{y^8 \tilde{f}(y) - \tilde{f}(1)}} - 1 \right) - \frac{2}{7} (1 - y_T^{\frac{7}{2}}) \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

となる.

ここで少し問題点を挙げておく. 見ての通り, Δs は $y_T = U_T/U_0$ にのみ依存する. U_T, U_0 はそれぞれ温度 T と L に依存するから, 相も T と L によって決まる. しかしながら, L に対する低エネルギーでの物理的解釈は今のところ明らかになっていない*13).

そこで, まずは L を固定した上で T を変化させたときに相がどのように変化していくかを見ておこう. (3.6.15) の解析は数値的には行われており [6], 相転移点は

$$y_T^c = \frac{16\pi^2 R_{D4}^3 T_{\chi SB}^2}{9 U_0} = 0.73532$$

*13) そもそも低エネルギーで実現されると考えられる QCD には L というパラメータは入っていない.

$$T_{\chi SB}^2 \equiv 0.73572 \times \frac{9}{16\pi^2} R_{D4}^{-3} U_0(L) \quad (3.6.16)$$

であり, $y_T < (>) y_T^c$ では $\Delta S < (>) 0$ となる. すなわち, $T < T_{\chi SB}$ では U-shape 解が選ばれ, カイラル対称性は破れている. 一方, $T > T_{\chi SB}$ では平行解が選ばれ, カイラル対称性は回復する.

ここで1つ注意しておかなければならないのは, T_d と $T_{\chi SB}$ の大小関係である. $T_d < T_{\chi SB}$ の場合には, 零温度から徐々に温度を上げていくとまず温度 $T = T_d$ で背景時空が X_4 から X_t へと転移し, さらに上げていくと $T = T_{\chi SB}$ で D8 ブレインが U-shape 解から平行解へと転移する. 言い換えれば, 温度 $T = T_d$ で閉じ込め相転移が起こり, $T = T_{\chi SB}$ でカイラル相転移が起こる.

一方, $T_d > T_{\chi SB}$ では状況が異なる. このときには, 零温度から熱していくと, $T = T_d$ で背景時空が X_4 から X_t へと転移し, 同時に D8 ブレインも U-shape 解から平行解へと転移する. つまり, 閉じ込め相転移とカイラル相転移が同時に起こる.

次はこれをもう少し定量的に議論してみよう. $T_d = 2\pi M_{KK}^{-1}$ であり, $T_{\chi SB}$ は U_0 を通して L に依存する. より具体的には,

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_{U_0}^{\infty} dU \frac{dx^4}{dU} = 2 \int_{U_0}^{\infty} dU \sqrt{\frac{U_0^8 \tilde{f}_0}{U^8 \tilde{f} - U_0^8 \tilde{f}_0}} (U R_{D4}^{-1})^{-3} \tilde{f}^{-1} \\ &= R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{-\frac{1}{2}} l(y_T) \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$l(y_T) = 2 \int_1^{\infty} dy \sqrt{\frac{\tilde{f}(1)}{y^3 \tilde{f}(y)(y^8 \tilde{f}(y) - \tilde{f}(1))}} \quad (3.6.18)$$

に数値計算の結果 $y_T^c \sim 0.73572$ を代入すれば, 相転移温度での L は,

$$L \equiv R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{-\frac{1}{2}} l(y_T = 0.73572) \sim 0.751 R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6.19)$$

となる. これを (3.6.16) に代入して逆に解けば, L が与えられたときに一意的に決まる相転移温度は,

$$T_{\chi SB} = \sqrt{0.73572 \times \frac{9}{16\pi} \times \frac{0.751}{L} \sim \frac{0.154}{L}} \quad (3.6.20)$$

となる. 従って, $T_d = T_{\chi SB}$ となるのは,

$$L_c = 0.154 \times 2\pi M_{KK}^{-1} \sim 0.97 M_{KK}^{-1} \quad (3.6.21)$$

が成り立つときということになる.

$T_{\chi SB}$ が L に関して単調減少であることに注意して, 以上の結果をまとめると,

$L < 0.97R$: $T_{\chi SB} > T_d$ となり, 閉じ込め相転移とカイラル相転移が独立に起こる.

$L > 0.97R$: $T_{\chi_{SB}} < T_d$ となり, 閉じ込め相転移とカイラル相転移が同時に起こる.

この結果を (TR) - (L/R) という 2つのパラメータに対する相図として表現すると, 図 3.8 のようになる.

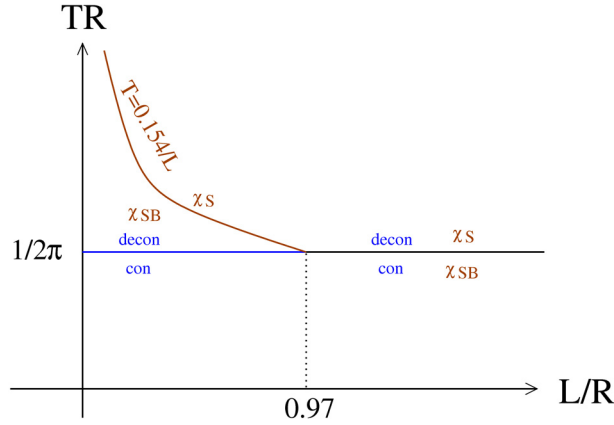


図 3.8: TR - (L/R) 相図

3.6.4 各相でのスペクトル

これまでに見てきたように, 我々の系は温度に応じて相 (真空) が変わる. 従って, 当然ながら, その上の励起モードもことなる. 本節では, 各相で得られるスペクトルを定性的に議論する.

低温相 X_4

背景時空も D8 ブレインの形も零温度の時と同じである. 従って, モードとしては S_{D8} の KK reduction から得られる低スピンメソンと (3.5) 節で扱った高スピンメソンのみである. そして, 結果として得られるスペクトルは定量的にも零温度のそれと全く同じになる.

高温相 X_t

このときには地平面に両端を持つような開弦が存在する. この弦はいくらでも小さな質量を持つことが出来る. 従って, 高温相では mass gap が存在しない. また, D8 ブレインから地平面へと伸びる開弦が存在し, これは quark とみなせる.

$L < L_c$ では、 $T < T_{\chi_{SB}}$ において U-shape 解が選ばれる。D8 ブレインと地平面とが離れているので、quark は質量 $m_q > 0$ を持つ。また、零温度のときと同様、D8 ブレイン上に両端を持つ開弦のスペクトルには mass gap が生じる。 $M > 2m_q$ では D8 ブレインから地平面に伸びて地平面上を這うように伸び、そして再び D8 ブレインに戻るような開弦が存在する。この開弦は地平面上の弦の距離を変えれば質量を連続的に変えることが出来る。つまり、 $M > 2m_q$ では連続スペクトルとなる。

$T > T_{\chi_{SB}}$ 、あるいは $L > L_c$ では、平行解が選ばれる。このときには quark は massless であり連続スペクトルとなる。

3.7 有限密度

有限温度の場の理論では、経路積分がカノニカル分布の分配関数に対応していた。有限密度系を扱うにはグランドカノニカル分布の大分配関数を考える必要がある。そのためには、作用に

$$-\mu \int dt d^3x q^\dagger(x)q(x) \quad (3.7.1)$$

なる項を加えればよい。ここに、 μ は化学ポテンシャルであり、 $q^\dagger q$ はバリオン数密度、あるいは $U(1)_B$ カレントの第 0 成分である。この項を加えることは重力側で何をすることに対応するのか、考えてみよう。[2] では、ゲージ場 A_μ の $z \rightarrow \pm\infty$ での値を $U(N_f)_{L/R}$ の外場とみなしていた。このことから、ゲージ場の $U(1)$ 部分の第 0 成分 \hat{A}_0 の無限遠での値 $\hat{A}_0(x^4 = \pm L/2)$ を μ とみなし、これに couple するものを $U(1)_B$ カレントとみなすべきだという考えに到達する^{*14)}。しかし、このままではゲージ不変でなく、5次元ゲージの取り方に依存してしまうので、具合が悪い。そこで、これまでに μ のゲージ不変な定義として以下の二つのものが考案された。

1. $\mu \equiv \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \hat{A}_0(U = \infty)$

2. $\mu \equiv \frac{1}{\beta} \int_{U_0}^\infty \hat{F}_{0U}(U)$

ただし、2つ目の定義は平行解の場合は積分領域は U_0 ではなく U_T から始まる。静的でかつ $\hat{A}_0(U_0) = 0$ の場合には2つの定義は等価である。本論文ではこれら2つの定義を対等に扱い、それぞれから導かれる結果について考察する。

どちらの定義を採用しようとも、共通してるのは、有限密度系に対応する重力解は $x^4(U)$ のみならず $\hat{A}_0(U)$ の非自明な解だということである。そういった解を求めるためには D4 background 中の D8 ブレインの作用として、次のものを考えればよい：

$$S_{D8} = T_8 \int d^4x dU d\Omega_4 e^{-\phi} \text{tr}_f \sqrt{\det(g_{D8} + 2\pi\alpha' \hat{F})} \quad (3.7.2)$$

^{*14)} この節では \hat{A} の規格化は $\hat{A} = \hat{A}1_{N_f \times N_f}$ としておく。バリオンの場合とは異なるので注意されたい。

ここでは field strength のうちで non-zero になるのは \widehat{F}_{0U} のみであるような場合を考えているから、CS 項は考えなくて良い。さらに、以下では $\widehat{A}_U = 0$ とし、そのため $\widehat{F}_{0U} = -\widehat{A}'_0$ となる。

3.7.1 低温相

低温^{*15)} X_4 に対しては (3.3.19) の計算から、

$$\begin{aligned} S_{D8} &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} N_f \int d^4 x dU U^{\frac{5}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (2\pi\alpha')^2 \gamma^{-1} \widehat{F}_{0M}^2} + \mathcal{O}(\widehat{F}^3) \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} N_f \int d^4 x dU U^{\frac{5}{2}} \sqrt{f^{-1} + f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\widehat{A}'_0)^2} \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

ここに prime は U による微分を表しており、2つ目の等式では $\mathcal{O}(\widehat{F}^3)$ を無視した。また、

$$\gamma(x^{4'}(U), U) = f(U)^{-1} + f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'}(U))^2 \quad (3.7.4)$$

である。この作用から導かれる EOM は、

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{U^{\frac{11}{2}} x^{4'}}{\sqrt{f^{-1} + f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\widehat{A}'_0)^2}} \right) = 0 \quad (3.7.5)$$

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{U^{\frac{5}{2}} \widehat{A}'_0}{\sqrt{f^{-1} + f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\widehat{A}'_0)^2}} \right) = 0 \quad (3.7.6)$$

(3.7.5) は x^4 に関する EOM で、(3.7.6) は \widehat{A}_0 に関する EOM である。低温 X_4 では、D8 ブレインは $\overline{D8}$ ブレインとつながって、一つの D8 ブレインになるのであった。このとき、 $x^{4'}(U_0) = \infty$ なる U_0 が存在する。従って、(3.7.6) から

$$\frac{2\pi U_0^{\frac{5}{2}} \widehat{A}'_0}{\sqrt{1 - (2\pi\widehat{A}'_0)^2 + f(U) (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2}} = \frac{2\pi U_0^{\frac{5}{2}} c}{\sqrt{-(2\pi c)^2 + f(U_0) (U_0 R_{D4}^{-1})^3}} \quad (3.7.7)$$

ここに、 $c = d\widehat{A}_0/dx^4|_{U=U_0}$ 。これから、

$$\left(\frac{d\widehat{A}_0}{dx^4} \right)^2 > 0 \quad (3.7.8)$$

つまり、 \widehat{A}_0 が x^4 について単調であることが分かる。従って、 $\widehat{A}'_0 \neq 0$ から得られる解は $\widehat{A}_0(x^4 = L/2) = -\widehat{A}_0(x^4 = -L/2)$ となり、これでは $U(1)_V$ に対応する化学ポテンシャル μ とは呼べな

^{*15)}我々は常に D8 ブレインをプローブとして扱っている。つまり、今のように D8 ブレイン上の開弦の非自明な解を考えても、それからくる back reaction は無視している。従って、 X_4 が低温相、 X_t が高温相、相転移温度が $T_d = 1/2\pi R$ であることに変わりはない。

い. つまり, μ を導入することに対応する解は $\hat{A}_0 = \mu$ のみである. このとき, EOM を解くと $x^4(U)$ は $\hat{A}_0 = 0$ のときと同じで, (3.2.24) で与えられる:

$$\left(\frac{dx^4}{dU}\right)^2 = \frac{U_0^8 f(U_0)}{(UR_{D4}^{-1})f(U)^2(f(U)U^8 - f(U_0)U_0^8)} \quad (3.7.9)$$

従って, 低温では μ の値にかかわらず χSB 相が実現される.

しかしながら, もし μ の定義として定義 2 を採用すると, この解は $\mu = 0$ に対応することになる. つまり, (3.7.3) には有限密度に対応した解は存在しない. 有限密度に対応する解を見つけるには, (3.7.3) よりももっと一般的な作用から出発する必要があるだろう. 一方, 定義 1 を採用すると, $\hat{A}_0 = \mu$ は立派に化学ポテンシャル μ に対応する解だと言え, 密度を上げててもカイラル対称性が回復しないという結論にいたる.

実際の QCD においては, 低温でも μ を大きくしていけば $chiS$ 相へと転移すると予想されている^{*16)}. 一方, 定義 1 から導かれる結論では, μ を大きくしてもカイラル相転移は起こらなかった. この結論が導かれたことの原因としては, プローブ近似, すなわちラージ N_c 極限をとったことが考えられる. 従って, \hat{A}_0 からの back reaction などを正しく評価すれば, D4 background が変更を受け, D8 と $\overline{D8}$ とが離れるような解が許されるかもしれない.

3.7.2 高温相

一方, 高温 X_t では,

$$\begin{aligned} S_{D8} &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} N_f \int d^4 x dU U^{\frac{5}{2}} \tilde{f}^{\frac{1}{2}} \tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (2\pi\alpha')^2 \tilde{\gamma}^{-1} \tilde{f}^{-1} \hat{F}_{0U}(U)^2} + \mathcal{O}(\hat{F}^3) \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} N_f \int d^4 x dU U^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 + \tilde{f}(UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\hat{A}'_0)^2} \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

ここに, 2 つ目の等式では $\mathcal{O}(\hat{F}^3)$ を無視した. また,

$$\tilde{\gamma}(x^{4'}(U), U) = \tilde{f}(U)^{-1} + (UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'}(U))^2 \quad (3.7.11)$$

これから導かれる EOM は

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{U^{\frac{11}{2}} \tilde{f} x^{4'}}{\sqrt{1 + \tilde{f}(UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\hat{A}'_0)^2}} \right) = 0 \quad (3.7.12)$$

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{U^{\frac{5}{2}} \hat{A}'_0}{\sqrt{1 + \tilde{f}(UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\hat{A}'_0)^2}} \right) = 0 \quad (3.7.13)$$

^{*16)}有限密度系は格子 QCD による数値的解析が困難であり, 未だ満足のいく解析手法が確立したとは言い難い. より確かな手法が確立した際にラージ N_c 極限での相図がここでの結果と一致するかどうかを比較することは興味深い.

気を付けなければならないのは、高温 X_t では U-shape 解だけでなく平行解もありうることである。

そこで、まずは U-shape 解を探そう。このときには、低温度での議論を繰り返せば

$$\widehat{A}_0 = \mu \quad (3.7.14)$$

$$\left(\frac{dx^4}{dU}\right)^2 = \frac{U_0^8 \widetilde{f}_0}{(UR_{D4}^{-1})^3 \widetilde{f}(U^8 \widetilde{f} - U_0^8 \widetilde{f}_0)} \quad (3.7.15)$$

が定義 1 の場合での有限密度に相当する解である。定義 2 の有限密度に相当する解は、これとは別の解を探す必要がある。この解の作用は、 $\mu = 0$ のときと同じで、(3.6.12)：

$$S_{D8}^U(\mu, y_T) = 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{7}{2}} N_f \int dt d^3x \int_1^\infty dy y^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{y^8 \widetilde{f}(y)}{y^8 \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(1)}} \quad (3.7.16)$$

次に、平行解 $x^{4'} = 0$ を考えよう。このとき、(3.7.12) は明らかに満たされる。そして (3.7.13) から、

$$\frac{2\pi\alpha' \widehat{A}'_0 U^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' \widehat{A}'_0)^2}} = C \quad (3.7.17)$$

$$\therefore (2\pi\alpha' \widehat{A}'_0)^2 = \frac{C^2}{C^2 + U^5} \quad (3.7.18)$$

を得る。後はこれを積分すれば、 $\mu(C)$ が求まる。

ところが、積分には積分定数が伴うため、定義 1 では μ の値はこの積分定数にもよる。しかし、作用の値はこの積分定数に依らない。我々の目標は作用を μ の関数として表し、U-shape 解と平行解のどちらが選ばれるかを議論することにある。今のように作用の値を変えずに μ の値を変えられるというのは望ましくない。

この問題は次のように考えると一応解決する。積分定数を決める原理を導入するのである。[35] では、「電荷密度が 0 になるときには $\mu = 0$ とする」とした。ここで、電荷密度は bulk-boundary 対応から、

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \widehat{A}_0(U = \infty)} \Big|_{\text{onshell}} &= \frac{\delta S}{\delta \widehat{A}'_0} (U = \infty) \Big|_{\text{onshell}} \\ &= \frac{U^{\frac{5}{2}} \widehat{A}'_0}{\sqrt{1 + \widetilde{f}(UR_{D4}^{-1})^3 (x^{4'})^2 - (2\pi\alpha')^2 (\widehat{A}'_0)^2}} \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

で与えられる。上の原理を採用すると、 $\mu = 0$ は $\widehat{A}'_0 = 0$ 、すなわち $C = 0$ に対応する。従って、上で問題にしていた積分定数は 0 とすれば良く、

$$\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{U_T}^\infty dU \sqrt{\frac{C^2}{C^2 + U^5}} \quad (3.7.20)$$

$$= \frac{C^{\frac{2}{5}}}{2\pi} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{6}{5})}{\sqrt{\pi}} - \frac{U_T^{\frac{2}{5}}}{C} F_1 \left(\frac{5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -\frac{U_T^5}{C^2} \right) \right) \quad (3.7.21)$$

と決まる。そして、この解の作用は

$$\begin{aligned} S_{D8}^P(\mu, y_T) &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} N_f \int dt d^3x \int_{U_T}^{\infty} dU U^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{U^5}{C(\mu)^2 + U^5}} \\ &= 2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{7}{2}} N_f \int dt d^3x \int_{y_T}^{\infty} dy \frac{y^5}{\sqrt{c(\mu)^2 + y^5}} \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

となる。ここに、 $c(\mu) \equiv C(\mu)/U_0^{5/2}$ 。

従って、作用の差は

$$\begin{aligned} \Delta S(\mu, y_T) &\equiv \frac{S_{D8}^U - S_{D8}^P}{2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{D4}^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{7}{2}} N_f \int dt d^3x} \\ &= \int_1^{\infty} dy y^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{y^8 \tilde{f}(y)}{y^8 \tilde{f}(y) - \tilde{f}(1)}}} - \int_{y_T}^{\infty} dy \frac{y^5}{\sqrt{c(\mu)^2 + y^5}} \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

となる。ここで(3.6.4)と(3.6.17)とから得られる式,,

$$T = \frac{3}{4\pi} (U_T R_{D4}^{-3})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\pi} (U_0 R_{D4}^{-3})^{\frac{1}{2}} y_T^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{L} y_T^{\frac{1}{2}} l(y_T) \quad (3.7.24)$$

から、 y_T は TL の関数として表せる。これから、さらに、 ΔS は $\mu(c)$, LT の関数として表すことができ、相転移点は

$$\mu_c = \mu_c(LT) \quad (3.7.25)$$

という曲線で表される。さらに、(3.7.20)より、

$$\begin{aligned} \mu_c(LT) &= \frac{U_0}{2\pi\alpha'} \int_{y_T}^{\infty} \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + U^5}} \\ &= \frac{R^3}{2\pi\alpha' L^2} \phi(LT) \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

ここに $\phi(LT)$ は与えられた関数であり、数値的には求められている。結果として、 L 一定の上で($\tilde{\mu} = 2\pi\alpha' L^2 \mu / R_{D4}^3$, LT)平面に描かれる相図は図3.9のようになる。

低温領域も含めると、全体の相図は図3.10になる。

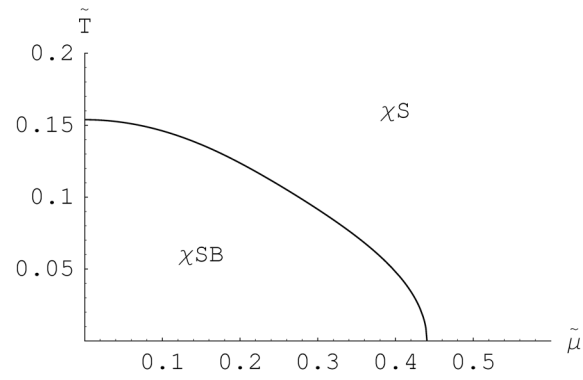


図 3.9: $\tilde{\mu}$ - \tilde{T} 相図 ([34] より)

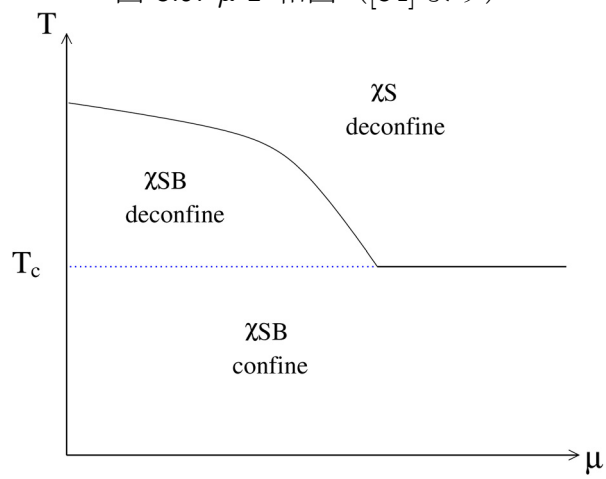


図 3.10: μ - T 相図

第4章 酒井・杉本模型におけるバリオン

4.1 導入

前章でみたように、酒井・杉本模型はメソンの物理をよく記述している。特に 3.4.1 節ではこの模型からパイオンの有効理論として Skyrme model+WZW 項が導かれることも見た。また、Appendix B にある様に Skyrme model+WZW 項はソリトン解としてバリオンを記述する。従って、酒井・杉本模型自体も soliton 解としてバリオンの情報を含んでいると考えるのが自然に思える。そこで、本章では実際にバリオンに相当する解が存在することを示し、得られたスペクトルなどを実験値と比較することを行う。

Skyrme model との比較

Skyrme model では、パイオンや ρ メソンなどの (軸性) ベクトルメソンを含むような場合でバリオンが考えられてきた。一方、この模型はパイオンと無限個の (軸性) ベクトルメソンからなる。

4.1.1 バリオン

酒井・杉本模型からいかにしてバリオンを記述するか、ここで考察してみよう。[2] でも指摘されているように、Witten の baryon vertex [1] の考えに従えば、バリオンは S^4 に巻きついた D4 ブレインとみなせる。さらに、[36] によればこの D4 ブレインは D8 ブレイン上の instanton とみなせる。従って、前章で考えたプローブ D8 ブレイン上の有効理論の instanton がバリオンであると期待できる。

4.1.2 Outline

そこで、次節からは以下のステップでバリオンを導いていく。

- $\lambda \gg 1$ (SUGRA 近似が妥当になる) を考え、 λ^{-1} 展開を行う。

- BPST instanton 解を求める. (このとき, CS 項の $U(1)$ 部分がバリオンを安定化する.)
- instanton の集団座標を量子化. 得られた量子状態=バリオン.

4.1.3 The model

本章では YM-CS 作用 (3.4.7) で $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合を考える^{*1)} :

$$S_F = S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}},$$

$$S_{\text{YM}} = -\kappa \int d^4x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu z}^2 \right), \quad (4.1.1)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4 \times \mathbb{R}} \omega_5(\mathcal{A}),$$

$$\kappa \equiv \frac{\lambda N_c}{216\pi^3} \equiv a\lambda N_c, \quad h(z) \equiv (1+z^2)^{-1/3}, \quad k(z) \equiv 1+z^2 \quad (4.1.2)$$

$$\omega_5(\mathcal{A}) = \text{tr} \left(\mathcal{A} \mathcal{F}^2 - \frac{i}{2} \mathcal{A}^3 \mathcal{F} - \frac{1}{10} \mathcal{A}^5 \right) \quad (4.1.3)$$

また, 本章ではエルミートな $U(N_f)$ ゲージ場を \mathcal{A} と書く :

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{F} \equiv d\mathcal{A} + i\mathcal{A}^2 \quad (4.1.4)$$

Decomposition

$U(N_f)$ ゲージ場 \mathcal{A} を $SU(N_f)$ 部分と $U(1)$ 部分とに分ける :

$$\mathcal{A} = A + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} \hat{A} = A^a t_a + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} \hat{A}, \quad \text{tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (4.1.5)$$

このとき, 作用は次のように書ける.

$$S_{\text{YM}} = -\kappa \int d^4x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right) - \frac{1}{2} \kappa \int d^4x dz \left(\frac{1}{2} h(z) \hat{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \hat{F}_{\mu z}^2 \right) \quad (4.1.6)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \left[\omega_5(A) + \frac{3}{\sqrt{2N_f}} \hat{A} \text{tr} F^2 + \frac{1}{2\sqrt{2N_f}} \hat{A} \hat{F}^2 + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} d \left(\hat{A} \text{tr} \left(2FA - \frac{i}{2} A^3 \right) \right) \right] \quad (4.1.7)$$

^{*1)} $T_F = 6\kappa$

4.2 $N_f = 2$ の場合

まずは $N_f = 2$ の場合を考えよう。この場合は恒等的に

$$\omega_5(A) = 0 \quad (4.2.1)$$

となるから、作用は

$$S = S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}} \quad (4.2.2)$$

$$S_{\text{YM}} = -\kappa \int d^4x dz \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right) - \frac{1}{2} \kappa \int d^4x dz \left(\frac{1}{2} h(z) \widehat{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \widehat{F}_{\mu z}^2 \right) \quad (4.2.3)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int d^4x dz \left[\frac{3}{8} \widehat{A}_0 \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) - \frac{3}{2} \widehat{A}_M \operatorname{tr}(\partial_0 A_N F_{PQ}) + \frac{3}{4} \widehat{F}_{MN} \operatorname{tr}(A_0 F_{PQ}) + \frac{1}{16} \widehat{A}_0 \widehat{F}_{MN} \widehat{F}_{PQ} - \frac{1}{4} \widehat{A}_M \widehat{F}_{0N} \widehat{F}_{PQ} + (\text{total derivatives}) \right] \quad (4.2.4)$$

と書ける。ここに、 $M, N = 1, 2, 3, z$ であり、 $\epsilon^{0123z} = \epsilon_{123z} = +1$ 。

4.2.1 古典解

作用から EOM を立て、その古典解を求めていこう。

S_{YM} の soliton 解

まずは $\lambda \gg 1$ として $1/\lambda$ 展開の leading のみを扱い、バリオンに相当する解を探していこう。作用を見ると、

$$S_{\text{YM}} \sim \mathcal{O}(\lambda^1), \quad S_{\text{CS}} \sim \mathcal{O}(\lambda^0)$$

なので、ここでは S_{YM} のみを考える。さらに、 S_{YM} においては $SU(2)$ 部分と $U(1)$ 部分とが完全に独立である。そこで、ここでは $SU(2)$ 部分のみを扱う。すなわち、この小節で扱う作用は

$$S_{\text{YM}}^{SU(2)} = -\kappa \int d^4x dz \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right] \quad (4.2.5)$$

と書ける。

一方、バリオン数は (anti-)instanton 数で与えられる：

$$N_B = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^3x dz \epsilon_{MNPQ} \text{tr}(F_{MN}F_{PQ}) \quad (4.2.6)$$

実際、この instanton 数 N_B が Skyrme model で定義されたバリオン数 B と等しいことが以下のように分かる。

$A_\mu \rightarrow 0$ を満たす静的な解に対して、

$$g(x)^{-1} = \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^z dz' A_z(\mathbf{x}, z') \right) \quad (4.2.7)$$

でゲージ変換すると、

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} A_\mu(x) = \frac{1}{i} U^{-1}(\mathbf{x}) \partial_i U(\mathbf{x}), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} A_\mu(x) = 0 \quad (4.2.8)$$

$$U(\mathbf{x}) \equiv \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz' A_z(\mathbf{x}, z') \right) \quad (4.2.9)$$

そこで、

$$\text{tr} F^2 = d\omega_3(A), \quad \omega_3(A) = \text{tr} \left(AF - \frac{i}{3} A^3 \right) \quad (4.2.10)$$

を用いると、

$$N_B = -\frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr} F^2 = -\frac{1}{8\pi^2} \int \omega_3(A) \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = \frac{i}{24\pi^2} \int \text{tr} \left(\frac{1}{i} U^{-1} dU \right)^3 \quad (4.2.11)$$

これはまさに (B.1.3) で定義されるバリオン数 B に等しい。

BPST instanton 解

今、我々に興味があるのは $N_B = 1$ のバリオンである。特に、 $k(z) = h(z) = 1$ の場合には、良く知られた BPST instanton 解^{*2)}がこれに相当する：

$$A_M(x) = -if(\xi) g_{\text{inst}}(\mathbf{x}, z) \partial_M g_{\text{inst}}(\mathbf{x}, z)^{-1}, \quad (4.2.12)$$

$$f(\xi) \equiv \frac{\xi^2}{\xi^2 + \rho^2}, \quad \xi \equiv \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{X})^2 + (z - Z)^2} \quad (4.2.13)$$

$$g_{\text{inst}}(\mathbf{x}, z) \equiv \frac{1}{\xi} \left((z - Z) - i(x^i - X^i) \cdot \tau_i \right) \quad (4.2.14)$$

$$F_{ij} = \frac{2\rho^2}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \epsilon_{ija} \tau_a, \quad F_{zj} = \frac{2\rho^2}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \tau_j \quad (4.2.15)$$

$\tau_a (a = 1, 2, 3)$ は Pauli 行列、 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ である。 (\mathbf{X}, Z) と ρ はそれぞれ instanton の位置と大きさを表すパラメータである。今の場合、 $k(z) \neq h(z) \neq 1$ だが、取りあえず ansatz としてこの解を仮定することにする。

^{*2)}通常の用語では、この解は anti-instanton である。

すると、この解の持つエネルギーが計算できて、

$$\begin{aligned} E(\rho) &= \kappa \int d^3x dz \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) F_{ij}^2 + k(z) F_{iz}^2 \right) \\ &= 3\pi^2 \kappa \rho^4 \int dz (z^2 + \rho^2)^{-5/2} (h(z) + k(z)) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

となる。ところが、

$$\frac{dE}{d\rho} > 0, \quad \text{for all } \rho$$

となるから、instanton はつぶれてしまう。ちなみに、このときの最小エネルギーは $E(0) = 8\pi^2 \kappa$ となる。こうして次の結論が得られた。

S_{YM} のみでは BPST instanton は不安定

そこで、次節では $1/\lambda$ の next leading order までを考える。その結果、CS 項が instanton を安定化させることが分かる。

次節に行く前に、別の角度からこの不安定性を示してみよう。 $F_{ij}^2 = (\epsilon_{ijk} F_{jk})^2 / 2$ から、

$$\begin{aligned} E(\rho) &= \frac{\kappa}{4} \int d^3x dz \left(\frac{1}{2} h(z) (\epsilon_{ijk} F_{jk}^a)^2 + k(z) (F_{iz}^a)^2 \right) \\ &\geq \frac{\kappa}{2} \int d^3x dz \sqrt{h(z)k(z)} |\epsilon_{ijk} F_{jk}^a F_{iz}^a| \\ &\geq \left| \frac{\kappa}{2} \int d^3x dz \epsilon_{ijk} F_{jk}^a F_{iz}^a \right| \\ &= 8\pi^2 \kappa |N_B| \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

ここで、一つ目の不等式は Schwartz の不等式であり、最後の等式では (4.2.6) を用いた。等式が成り立つのは

$$\sqrt{h(z)} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = \sqrt{k(z)} F_{iz}^a$$

が成り立つときであり、これは今の BPST instanton 解 (4.2.12) で言うと $\rho = 0$ に相当する。従って、やはり instanton はつぶれてしまう。

ちなみに、 $E(0) = 8\pi^2 \kappa$ は S^4 に巻きついた D4 ブレインの質量と同じである [2]。

S_{CS} からの寄与

$1/\lambda$ 展開の leading では安定な soliton 解がないことが分かったので、next-leading-order まで考えてみよう。結果としては [23, 19, 20] でも指摘されたように、CS 項が解を安定化させることが分かる。

naive expectation

instanton が安定化することを定性的な議論から予想してみよう。\$S_{CS}\$ には

$$\epsilon_{MNPQ} \int \hat{A}_0 dt \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ})$$

なる項が存在している。\$\epsilon_{MNPQ} \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ})\$ が \$N_B\$ に比例することから、バリオン数は \$\hat{A}\$ に対する electric charge とみなせる。ところで、electric charge を持つ粒子のエネルギーは \$E \sim \rho^{-2}\$ だから、この項が instanton が潰れるのを防いで安定化することが期待される。

1/\$\lambda\$ 展開

上の naive expectation を実証していこう。まず、作用を \$1/\lambda\$ の next-to-leading まで書き下す。そこで、次の rescale を施す。

$$\begin{aligned} \tilde{x}^M &= \lambda^{+1/2} x^M, \quad \tilde{x}^0 = x^0 \\ \tilde{\rho} &= \lambda^{+1/2} \rho, \quad \tilde{X}^M = \lambda^{+1/2} X^M \\ \tilde{\mathcal{A}}_0(t, \tilde{x}) &= \mathcal{A}_0(t, x), \quad \tilde{\mathcal{A}}_M(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{A}_M(t, x) \\ \tilde{\mathcal{F}}_{MN}(t, \tilde{x}) &= \lambda^{-1} \mathcal{F}_{MN}(t, x), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{0M}(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{F}_{0M}(t, x) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

tilde 付の量を \$\mathcal{O}(\lambda^0)\$ として扱う。また、これ以後 tilde を省略する。この rescale の下で、作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= -aN_c \int d^4 x dz \operatorname{tr} \left[\frac{\lambda}{2} F_{MN}^2 + \left(-\frac{z^2}{6} F_{ij}^2 + z^2 F_{iz}^2 - F_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right] \\ &\quad - \frac{aN_c}{2} \int d^4 x dz \left[\frac{\lambda}{2} \hat{F}_{MN}^2 + \left(-\frac{z^2}{6} \hat{F}_{ij}^2 + z^2 \hat{F}_{iz}^2 - \hat{F}_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int d^4 x dz \left[\frac{3}{8} \hat{A}_0 \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) \right. \\ &\quad - \frac{3}{2} \hat{A}_M \operatorname{tr}(\partial_0 A_N F_{PQ}) + \frac{3}{4} \hat{F}_{MN} \operatorname{tr}(A_0 F_{PQ}) + \frac{1}{16} \hat{A}_0 \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \hat{A}_M \hat{F}_{0N} \hat{F}_{PQ} + (\text{全微分項}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

と書ける。ここで、\$\mathcal{A}\$ はこの rescale の下で不変なので \$S_{CS}\$ も不変であることに注意されたい。

この作用から導かれる EOM は

$$A_0; \quad D_M F_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a} \epsilon_{MNPQ} \hat{F}_{MN} F_{PQ} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.2.21)$$

$$A_M; \quad D_N F_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.2.22)$$

$$\hat{A}_0; \quad \partial_M \hat{F}_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a} \epsilon_{MNPQ} \left(\operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) + \frac{1}{2} \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.2.23)$$

$$\hat{A}_M; \quad \partial_N \hat{F}_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.2.24)$$

となる. ここでも ansatz として $SU(2)$ 部分は BPST instanton 解 (4.2.12) を仮定する: $F_{MN} = F_{MN}^{BPST}$. 確かにこれは (4.2.22) を満たす. また, (4.2.24) から,

$$\widehat{F}_{MN} = 0 \quad (4.2.25)$$

$$\rightarrow \widehat{A}_M = 0 \quad (4.2.26)$$

を得る. さらにこれを (4.2.21) に代入すると,

$$D_M^2 A_0 = 0 \quad (4.2.27)$$

$$\rightarrow A_0 = 0 \quad (4.2.28)$$

を得る. これらを (4.2.23) に代入れば,

$$\partial_M^2 \widehat{A}_0 + \frac{3}{\pi^2 a} \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^4} = 0 \quad (4.2.29)$$

$$\rightarrow \widehat{A}_0 = \frac{1}{8\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) \quad (4.2.30)$$

となる.

まとめると $N_B = 1$ の BPST instanton 解は

$$A_0 = 0$$

$$A_M = A_M^{BPST} = -if(\xi) g_{\text{inst}}(\mathbf{x}, t) \partial_M g_{\text{inst}}(\mathbf{x}, t)^{-1}$$

$$\widehat{A}_0 = \frac{1}{8\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) \quad (4.2.31)$$

$$\widehat{A}_M = 0$$

と書ける.

そこで, $S = -M \int dt$ を用いてこの instanton の質量を評価すると,

$$M = 8\pi^2 \kappa \left[1 + \lambda^{-1} \left(\frac{\rho^2}{6} + \frac{1}{32\pi^4 a^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{Z^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \right] \quad (4.2.32)$$

となり,

$$\rho^2 = \frac{1}{8\pi^2 a} \sqrt{\frac{6}{5}} \quad (4.2.33)$$

で最小値

$$M_{\min} = 8\pi^2 \kappa + \sqrt{\frac{2}{15}} N_c \quad (4.2.34)$$

をとる. つまりこの解は安定である.

高階微分項の寄与

rescale する前の量 (4.2.33) で表すと,

$$\rho^2 = \frac{1}{8\pi^2 a} \sqrt{\frac{6}{5}} \lambda^{-1} \quad (4.2.35)$$

となる. つまり, instanton の大きさは $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ である.

ところで, 次元解析から高次の項は次元の分だけ l_s を伴う (e.g. $l_s \partial, l_s A, \alpha' F, \dots$). そして, $l_s = \mathcal{O}(\lambda^{+1/2})$ である. 一方, instanton の大きさが $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ なので, $\partial = \mathcal{O}(\lambda^{+1/2})$ となり,

$$l_s \partial = \mathcal{O}(\lambda^0) \quad (4.2.36)$$

となる. 同様にして, 高階微分項は全て $\mathcal{O}(\lambda^0)$ となり, 本来はこれらを見捨てることは出来ない. これは深刻な問題ではあるが, “non-Abelian DBI + CS” を考えも, 結果が変わらないことは示されている [23]. しかし, これ以外の高階微分項の寄与については今のところ調べられていない. ここでは, これらの寄与を見捨てて解析を続けることにしよう.

4.2.2 集団座標

$1/\lambda$ 展開の leading では $SU(2)$ pure YM 理論だった. その理論の古典解である BPST instanton にはモジュライがある. その座標は以下の通り.

- instanton の位置 : $X^M = (\mathbf{X}, Z)$
- instanton の大きさ : ρ
- $SU(2)$ orientation : $W = \mathbf{a} = a_4 + ia_a \tau^a \in SU(2)$ ($\sum_{a=1}^4 a_I^2 = 1, \mathbf{a} \sim -\mathbf{a}$)

この節では, これらの集団座標 “ $X^\alpha = (X^M, \rho), W$ ” を時間に依存する力学変数 $X^\alpha(t), W(t)$ とし, これらに対する量子力学系を考える.

ところで, $1/\lambda$ の next-leading-order まで含めると, (4.2.32) のようになり, 厳密には ρ, Z はモジュライではない. しかし, Appendix A.10 で見ると, $\lambda \gg 1$ では ρ や Z に対する質量は他のモードの質量に比べると十分小さい. 従って, 以下ではこれらも集団座標として扱う.

そこで, 集団座標を次のようにとる:

$$\begin{aligned} A_0(t, x) &= \Delta A_0(t, x) \\ A_M(t, x) &= W(t) A_M^d(x; X^\alpha(t)) W(t)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

ΔA_0 は運動方程式を満たすために導入されたものである。このとき、field strength は次のようになる。

$$\begin{cases} F_{MN} &= W F_{MN}^{\text{cl}} W^{-1}, \\ F_{0M} &= \partial_0 A_M - \partial_M \Delta A_0 + i[\Delta A_0, A_M] \\ &= -W[A_M^{\text{cl}}, W^{-1}\dot{W}]W^1 + W\partial_0 A_M W^{-1} - W D_M^{\text{cl}}(W^{-1}\Delta A_0 W)W^{-1} \\ &= W\left(\dot{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}}\Phi\right) \end{cases} \quad (4.2.38)$$

ここに、上付きドットは時間微分 ∂_0 を表し、

$$\Phi \equiv W^{-1}\Delta A_0 W - iW^{-1}\dot{W} \quad (4.2.39)$$

このとき、(4.2.37) は次のようにも表せる。

$$\mathcal{A}(t, x) = (\mathcal{A}^{\text{cl}}(x; X^\alpha(t)) + \Phi(t, x)dt)^{W(t)} \quad (4.2.40)$$

さらに、運動方程式 (4.2.21), (4.2.22) はそれぞれ以下のようになる。

$$(4.2.21) \rightarrow D_M^{\text{cl}}\left(\dot{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}}\Phi\right) = 0 \quad (4.2.41)$$

$$(4.2.22) \rightarrow D_N^{\text{cl}}F_{MN}^{\text{cl}} = 0 \quad (4.2.42)$$

また、明らかに (4.2.23), (4.2.24) は不変である。従って、 \hat{A}_0, \hat{A}_M は (4.2.31) の通り：

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{8\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2}\right), \quad \hat{A}_M = 0 \quad (4.2.43)$$

従って、非自明な方程式は (4.2.41) のみであり、この式から W と Φ との関係が求まる。Appendix A.11 によると、結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= -\dot{X}^N(t)A_N^{\text{cl}}(x) + \chi^a(t)\Phi_a(x), \quad \Phi_a = f(\xi)g_{\text{inst}}t_a g_{\text{inst}}^{-1} \\ \chi^a(t) &= -2i \text{tr}(t_a W^{-1}\dot{W}) = 2(a_4 \dot{a}_a - \dot{a}_4 a_a + \epsilon_{abc} a_b \dot{a}_c) \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

(4.2.37) と (4.2.43) を作用 (4.1.1) に代入すると、集団座標に関する lagrangian を得る：

$$L = L_X + L_Z + L_y + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (4.2.45)$$

$$L_X = -M_0 + \frac{m_X}{2} \dot{\mathbf{X}}^2, \quad (4.2.46)$$

$$L_Z = \frac{m_Z}{2} \dot{Z}^2 - \frac{m_Z \omega_Z^2}{2} Z^2, \quad (4.2.47)$$

$$L_y = \frac{m_y}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{a}_I^2) - \frac{m_y \omega_\rho^2}{2} \rho^2 - \frac{Q}{\rho^2} \quad (4.2.48)$$

ここに,

$$M_0 \equiv 8\pi^2\kappa, \quad m_X \equiv m_Z \equiv \frac{m_y}{2} \equiv 8\pi^2\kappa\lambda^{-1} \equiv 8\pi^2aN_c \quad (4.2.49)$$

$$\omega_Z^2 \equiv \frac{3}{2}, \quad \omega_\rho^2 \equiv \frac{1}{6}, \quad Q \equiv \frac{N_c^2}{5m_x} = \frac{N_c}{40\pi^2a} \quad (4.2.50)$$

rescale する前の質量を見るには, $\tilde{X}^\alpha = \lambda^{+1/2}X^\alpha$ を用いて lagrangian を書き直せばよい:

$$m_X = m_Z = \frac{m_y}{2} = 8\pi^2\kappa = M_0, \quad Q = \frac{N_c^2}{5m_x\lambda} = \frac{N_c}{40\pi^2a\lambda} \quad (4.2.51)$$

4.2.3 量子化

前節で得た系を量子化しよう. ここでは, \mathbf{X} の運動は考えないことにする. すなわち, 考える lagrangian は

$$L = -M_0 + L_Z + L_y \quad (4.2.52)$$

また, (ρ, a_I) を 4次元の極座標とみなし, 対応する直交座標 y_I を次のように定義する.

$$y_I \equiv \rho a_I, \quad \rho = \sqrt{y_I^2} \quad (4.2.53)$$

すると, L_y は次のように書ける.

$$L_y = \frac{m_y}{2}\dot{y}_I^2 - \frac{m_y\omega_\rho^2}{2}\rho^2 - \frac{Q}{\rho^2} \quad (4.2.54)$$

これらを用いて量子系の hamiltonian を書き下すと,

$$H = M_0 + H_y + H_Z \quad (4.2.55)$$

$$H_y = -\frac{1}{2m_y}\frac{\partial^2}{\partial y_I^2} + \frac{1}{2}m_y\omega_\rho^2\rho^2 + \frac{Q}{\rho^2} \quad (4.2.56)$$

$$H_Z = -\frac{1}{2m_Z}\partial_Z^2 + \frac{1}{2}m_Z\omega_Z^2 Z^2 \quad (4.2.57)$$

となる. この形から, バリオン状態の波動関数は y_I に関する部分 $\psi(y_I)$ と Z に関する部分 $\phi(Z)$ との積で書かれる. ところで, モジュライ空間上では y_I と $-y_I$ は同一視されていたから, 波動関数 $\psi(y_I)$ は

$$\psi(y_I) = \pm\psi(-y_I)$$

を満たす. 特に Skyrme model では, バリオンのようなフェルミオンの状態に対しては

$$\psi(y_I) = -\psi(-y_I) \quad (4.2.58)$$

を課すと良いことが知られている [15, 16].

Schrödinger 方程式

H_y の固有値 : E_y

(4.2.56) を極座標で書き直すと,

$$H_y = -\frac{1}{2m_y} \left(\frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla_{S^3}^2 - 2m_y Q) \right) + \frac{1}{2} m_y \omega_\rho^2 \rho^2 \quad (4.2.59)$$

ここで, 波動関数を

$$\psi(y_I) = R_l(\rho) T^{(l)}(a_I), \quad \nabla_{S^3}^2 T^{(l)}(a_I) = -l(l+2) T^{(l)}(a_I) \quad (4.2.60)$$

と書くと, $R(\rho)$ の満たすべき式は

$$\mathcal{H}_{\tilde{l}} R(\rho) = E_y R(\rho) \quad (4.2.61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\tilde{l}} &= -\frac{1}{2m_y} \left(\frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 \partial_\rho) - \frac{1}{\rho^2} (l(l+2) + 2m_y Q) \right) \\ &= -\frac{1}{2m_y} \left(\frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 \partial_\rho) - \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+2)}{\rho^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

となる. ここに,

$$\tilde{l} \equiv -1 + \sqrt{(l+1)^2 + 2m_y Q}, \quad \tilde{l}(\tilde{l}+2) = l(l+2) + 2m_y Q \quad (4.2.63)$$

である.

ここで, $R(\rho)$ を

$$R(\rho) = \exp\left(-\frac{m_y \omega_\rho}{2} \rho^2\right) \rho^{\tilde{l}} v(m_y \omega_\rho \rho^2) \quad (4.2.64)$$

と定義すると, (4.2.61) は $v(x)$ に対する合流型超幾何微分方程式となる :

$$\left(x \partial_x^2 + (\tilde{l} + 2 - x) \partial_x + \frac{1}{2} \left(\frac{E_y}{\omega_\rho} - \tilde{l} - 2 \right) \right) v(x) = 0 \quad (4.2.65)$$

規格化可能で正則な解は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{E_y}{\omega_\rho} - \tilde{l} - 2 \right) = n \in \mathbb{Z} \quad (4.2.66)$$

のときにのみ存在することが知られている.

このとき, 波動関数は合流型超幾何関数 $F(\alpha, \gamma; z)$ を用いて

$$R(\rho) = \exp\left(-\frac{m_y \omega_\rho}{2} \rho^2\right) \rho^{\tilde{l}} F(-n, \tilde{l}; m_y \omega_\rho \rho^2) \quad (4.2.67)$$

と書け, 固有値は

$$E_y = \omega_\rho(\tilde{l} + 2n + 2) \quad (4.2.68)$$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2}{6} + \frac{2}{15}N_c^2} + \frac{2n_\rho + 1}{\sqrt{6}} \quad (4.2.69)$$

となる.

H_Z の固有値 : E_Z

(4.2.57) は調和振動子の hamiltonian である. 従って,

$$E_Z = \omega_Z \left(n_Z + \frac{1}{2} \right) = \frac{2n_Z + 1}{\sqrt{6}} \quad (4.2.70)$$

バリオンの質量 : M

バリオンの質量は hamiltonian(4.2.55) の固有値である. 従って, (4.2.69) と (4.2.70) とから,

$$\begin{aligned} M &= M_0 + E_y + E_Z \\ &= M_0 + \sqrt{\frac{(l+1)^2}{6} + \frac{2}{15}N_c^2} + \frac{2(n_\rho + n_Z + 1)}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

物理的解釈

4.2.3 節に現れた量子数 l, n_ρ, n_Z に対する物理的な解釈を与え, 同一視すべきバリオンを見出そう.

spin と isospin

今, W に対する右変換

$$W \mapsto W g_J(R), \quad g_J(R) \in SU(2)_J \quad (4.2.72)$$

の下で,

$$\begin{aligned} A_M(t, x) &\mapsto W g_J(R) A_M^{\text{cl}}(x; X^\alpha(t)) g_J(R)^{-1} W^{-1} \\ &= (A_M^{\text{cl}}(Rx; RX, y_I))^W \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

と変換されるので, g_J は空間回転 'spin' とみなせる. 一方, 左変換

$$W \mapsto g_I W, \quad g_I \in SU(2)_I \quad (4.2.74)$$

の下で

$$A_M(t, x) \mapsto g_I A_M(t, x) g_I^{-1} \quad (4.2.75)$$

と変換されるので, g_I は 'isospin' とみなせる. そして, これらの変換の下で集団座標 W は次のように変換される.

$$W \mapsto g_I W g_J \quad (4.2.76)$$

つまり, W は $(SU(2)_I \times SU(2)_J)/\mathbb{Z}_2$ 表現に属している. ところで, S^3 上の球面調和関数 $T^{(l)}(a_I)$ は

$$T^{(l)}(a_I) = C_{I_1 \dots I_l} a_{I_1} \cdots a_{I_l} \quad (4.2.77)$$

と書けることが知られている. ここに, $C_{I_1 \dots I_l}$ は symmetric traceless tensor である. この $T^{(l)}(a_I)$ は $(SU(2)_I \times SU(2)_J)/\mathbb{Z}_2$ の下では spin $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ として変換する. つまり, 前節の量子数 l と spin J , isospin J との間には

$$I = J = \frac{l}{2} \quad (4.2.78)$$

という関係が成り立つことになる.

パリティ

3.3.2 節によると, パリティ変換は

$$P : x^M \mapsto -x^M \quad (4.2.79)$$

で定義されている. 一方, 調和振動子系では n_Z の偶奇性と波動関数の $Z \mapsto -Z$ に対する偶奇性が一致することが知られている. 従って,

$$n_Z \text{ の偶奇性} \leftrightarrow \text{パリティ偶奇性}$$

となる.

N_c 依存性

$N_c \gg 1$ に対しては, (4.2.71) は

$$M \simeq M_0 + \sqrt{\frac{2}{15}} N_c + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{(l+1)^2}{N_c} + \frac{2(n_\rho + n_Z + 1)}{\sqrt{6}} \quad (4.2.80)$$

N_c に比例する性質はラージ N_c から予想される振る舞いと一致している [17].

4.2.4 実験値との比較

(4.2.78) から, 例えば, $(l, n_\rho, n_Z) = (1, 0, 0)$ が核子 N に相当する. 質量公式 (4.2.71) を用いて, 核子の質量 940 MeV を再現するように M_{KK} を 500 MeV に選ぶと, バリオンの質量は以下のように決まる.

(n_ρ, n_Z)	(0, 0)	(1, 0) (0, 1)	(1, 1) (2, 0)/(0, 2)	(2, 1)/(0, 3)	(1, 2)/(3, 0)
$N (l=1)$	940 ⁺	1348 ⁺ 1348 ⁻	1756 ⁻ 1756 ⁺ , 1756 ⁺	2164 ⁻ , 2164 ⁻	2164 ⁺ , 2164 ⁺
$\Delta (l=3)$	1240 ⁺	1648 ⁺ 1648 ⁻	2056 ⁻ 2056 ⁺ , 2056 ⁺	2464 ⁻ , 2464 ⁻	2464 ⁺ , 2464 ⁺

(4.2.81)

一方, [24] より, これらに対する実験値は*³⁾

(n_ρ, n_z)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 0)/(0, 2)	(2, 1)/(0, 3)	(1, 2)/(3, 0)
$N(l=1)$	940 ⁺	1440 ⁺	1535 ⁻	1655 ⁻	1710 ⁺ , ?	2090 _* ⁻ , ?	2100 _* ⁺ , ?
$\Delta(l=3)$	1232 ⁺	1600 ⁺	1700 ⁻	1940 _* ⁻	1920 ⁺ , ?	?, ?	?, ?

(4.2.82)

*³⁾添え字*は粒子の存在が未だ不確定であることを表している.

4.3 核子の諸性質

Appendix Bにある様に, Skyrme model では, hedgehog 解の集団座標を量子化することでバリオンのスペクトルおよび電荷密度などの静的性質を計算した. ここでも, 上で得られた $N_f = 2$ の解を基に [46] に沿って核子の諸性質を解析する.

4.3.1 4次元カレント

5次元理論 (4.1.1) から4次元 QCD のカレントをいかに定義するかを議論する. 酒井・杉本模型では, パイオン場 $U(x)$ は $\mathcal{A} \rightarrow 0$ ゲージで

$$U(x) = \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathcal{A}_z(x, z) \right). \quad (4.3.1)$$

と書かれていた. そして, U に対する左右変換 $U(x) \rightarrow g_L U(x) g_R^{-1}$ はゲージ変換

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^g = g(\mathcal{A} - id)g^{-1} \quad (4.3.2)$$

で実現する. ただし, $g_{L/R}$ は $z = \pm\infty$ での $g(x, z)$ の値であり, x^μ に依らないとする. つまり, chiral 変換は5次元局所ゲージ変換に含まれている.

そこで, 局所ゲージ変換を考えよう:

$$\delta_\zeta \mathcal{A}_M = \mathcal{D}_M \zeta = \partial_M \zeta + i[\mathcal{A}_M, \zeta]. \quad (4.3.3)$$

この変換の下で作用は不変であり, これに伴う5次元カレントは

$$J_\zeta^M(x, z) = J_{\text{YM}, \zeta}^M(x, z) + J_{\text{CS}, \zeta}^M(x, z) \quad (4.3.4)$$

ここに, $J_{\text{YM}, \zeta}^M, J_{\text{CS}, \zeta}^M$ はそれぞれ $S_{\text{YM}}, S_{\text{CS}}$ からの寄与で,

$$J_{\text{YM}, \zeta}^\mu(x, z) = -2\kappa \text{tr} (h(z) \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu \zeta + k(z) \mathcal{F}^{\mu z} \mathcal{D}_z \zeta) \quad (4.3.5)$$

$$J_{\text{YM}, \zeta}^z(x, z) = -2\kappa k(z) \text{tr} (\mathcal{F}^{z\nu} \mathcal{D}_\nu \zeta) \quad (4.3.6)$$

$$J_{\text{CS}, \zeta}^M(x, z) = -\frac{N_c}{64\pi^2} \epsilon^{MNPQR} \text{tr} (\{\mathcal{F}_{NP}, \mathcal{F}_{QR}\} \zeta) \quad (4.3.7)$$

と書ける.

そこで, ここでは次のように4次元カレントを定義する:

$$j_\mu^\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} dz J_\mu^\zeta(x, z) \quad (4.3.8)$$

実際, $J^z \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \pm\infty$) なる解に対してはこのカレントは保存する:

$$\partial_\mu j_\mu^\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_\mu J_\mu^\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z J_z^\zeta = J_z^\zeta(x, z) \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0 \quad (4.3.9)$$

上の議論から, パイオン場 $U(x)$ の左右変換に対応する局所ゲージ変換は変換パラメータ $\zeta = \zeta^a t_a$ を次のように選ぶことで得られると期待できる.

$$\zeta_\pm^a(x, z = \pm\infty) = 1, \quad \zeta_\pm^a(x, z = \mp\infty) = 0 \quad (4.3.10)$$

カレントの非一意性

ここで少し上で定義したカレントの問題点について触れておく.

1つ目はカレントがゲージ不変でないことである. 保存電荷 $Q_\zeta = \int d^3x j_\zeta^0$ は無限遠での振舞いを変えない様なゲージ変換の下で不変であるが, カレントそのものは不変にはならない. つまり, どのゲージで計算するかによって結果が変わってしまう.

2つ目は (4.3.10) を満たすような ζ_\pm^a が無数にあり, 一意的に決められないことである. 当然, ζ の選び方によって結果は変わる. また, この問題は1つ目のゲージ不変性の問題と深く関係している. 今, カレント (4.3.8) が次の変換の下で不変であることに注意しよう.

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^g, \quad \zeta \rightarrow \zeta^g = g\zeta g^{-1} \quad (4.3.11)$$

従って, 異なるゲージで同じ結果 (カレント) を導くためには, 異なる ζ (具体的には, 両者をつなぐ変換パラメータ g を用いて $zeta^g$ と書けるもの) を用いなければならない.

一方, bulk-boundary 対応の流儀から4次元カレントを定義することも可能である. このときには, $z = \pm\infty$ での量を読み取ることになるので, 無限遠での場の振舞いを変えないようなゲージ変換の下で確かに不変となる. しかしながら, バリオンを表す instanton は $z = 0$ に localize した解であり, 無限遠ではこれらの持つ情報は消えてしまう. また, 次節で扱う Skyrme model の chiral current もこの定義は再現しない.

こういった理由から, ここでは4次元カレント (4.3.8) を採用することにする. そして, $\zeta(x, z)_\pm$ はゲージ場 A_μ の zero mode

$$\psi_\pm(z) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\pi} \arctan z \quad (4.3.12)$$

を用いて

$$\zeta_\pm(x, z) = \psi_\pm(z) t_a \quad (4.3.13)$$

と書くことにする.

ここで, $\zeta(x, z) = \psi(z) t_a$ に対して, 積分する前の5次元カレントは次の様に書ける.

$$J_{\zeta, a}^\mu = -2i\kappa \operatorname{tr} \left[\left(h(z) [\mathcal{F}^{\mu\nu}, \mathcal{A}_\nu] + k(z) [\mathcal{F}^{\mu z}, \mathcal{A}_z] \right) t_a \right] \psi(z) - 2\kappa k(z) \operatorname{tr}(\mathcal{F}^{\mu z} t_a) \partial_z \psi(z)$$

$$-\frac{N_c}{64\pi^2}\epsilon^{\mu NPQR}\text{tr}\left(\{\mathcal{F}_{NP}, \mathcal{F}_{QR}\}t_a\right)\psi(z) \quad (4.3.14)$$

また、上の議論から、vector current, axial current に対してはそれぞれ $\psi(z)$ として

$$\psi_V(z) = \psi_+(z) + \psi_-(z) = 1, \quad \psi_A(z) = \psi_+(z) - \psi_-(z) = \frac{2}{\pi} \arctan z \quad (4.3.15)$$

を用いればよいことが分かる.

4.3.2 Skyrme 近似

上で定義した4次元カレントが Skyrme model のカレントを再現できるどうか調べよう. 3.4.1 節では $\mathcal{A}_z = 0$ ゲージへ移り, massive モードを落とし, zero mode $\psi_{\pm}(z)$ のみを残すことで 酒井・杉本模型から Skyrme model を再現した. このように ψ_{\pm} モードのみを残す近似では,

$$\psi_{\pm}^2 \simeq \psi_{\pm}, \quad \psi_+\psi_- \simeq 0, \quad \psi_+ + \psi_- = 1 \quad (4.3.16)$$

とでき, これを ‘Skyrme 近似’ と呼ぶ.

Skyrme 近似での j_{μ}^{ζ}

Skyrme 近似では, (4.3.10) を満たす $\zeta_{\pm 0}$ は

$$\zeta_{\pm}(z) = \psi_{\pm}(z)t_a \quad (4.3.17)$$

に他ならない.

ところで, 我々のカレントは $\mathcal{A} \rightarrow 0$ ゲージで定義されていた. この小節では, $j_{\mu}^{\zeta}(x)$ を計算するため, $\mathcal{A}_z = 0$ ゲージへと移ろう. このとき, (4.3.11) での不変性から,

$$\begin{aligned} J_{\zeta}^{\mu}(x) &= -2\kappa \text{tr}\left(h(z)\mathcal{F}^{g,\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}^g\zeta^g(x,z) + k(z)\mathcal{F}^{g,\mu z}\mathcal{D}_z^g\zeta^g(x,z)\right) \\ &\quad - \frac{N_c}{64\pi^2}\epsilon^{\mu NPQR}\text{tr}\left(\{\mathcal{F}_{NP}^g, \mathcal{F}_{QR}^g\}\zeta^g\right) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

と書ける. ここに, $g(x,z)$ は

$$g(x,z)^{-1} = \text{P exp}\left(-i \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{A}_z(x,z')\right) \quad (4.3.19)$$

であり, Skyrme 近似では,

$$g(x,z)^{-1} \simeq \psi_-(z) + U(x)\psi_+(z), \quad g(x,z) \simeq \psi_-(z) + U^{-1}\psi_+(z) \quad (4.3.20)$$

と表される.

さらに, $\mathcal{A}_z = 0$ ゲージのゲージ場や field strength は

$$\mathcal{A}_\mu^g(x, z) = R_\mu(x) \times \psi_+(z) + (\text{massive modes}) \quad (4.3.21)$$

$$\mathcal{A}_z^g(x, z) = 0 \quad (4.3.22)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^g(x, z) = -i [R_\mu(x), R_\nu(x)] \times \psi_+(z)\psi_-(z) + (\text{massive modes}) \quad (4.3.23)$$

$$\mathcal{F}_{z\nu}^g(x, z) = R_\nu(x) \times \frac{\psi_+(z)}{dz} + (\text{massive modes}) \quad (4.3.24)$$

と展開される. ここに $R_\mu(x)$ は

$$R_\mu(x) = -iU(x)^{-1}\partial_\mu U(x) \quad (4.3.25)$$

で与えられる.

右・左カレントの計算

まず $\zeta_+(x, z) = \psi_+(z)t_a$ の場合を考えよう. Skyrme 近似では ζ_+^g は

$$\zeta_+^g(x, z) = (\psi_- + U^{-1}\psi_+)\psi_+t_a(\psi_- + U\psi_+) \simeq \psi_+(z)U(x)^{-1}t_aU(x) \quad (4.3.26)$$

と書ける. また,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\nu^g \zeta_+^g &= \partial_\nu \zeta_+^g + i[\mathcal{A}_\nu^g, \zeta_+^g] = \psi_+ \partial_\nu (U^{-1}t_a U) + i[R_\nu \psi_+, \psi_+ U^{-1}t_a U] \\ &= -i[R_\nu, U^{-1}t_a U] \psi_+ + i[R_\nu, U^{-1}t_a U] \psi_+^2 = -i[R_\nu, U^{-1}t_a U] \psi_+ \psi_- \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

となる.

これらを用いて,

$$\begin{aligned} j_{\zeta_+, a}^{\mu, \text{YM}}(x) &= -2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{tr} \left\{ h(z) (-i[R^\mu, R^\nu] \psi_+ \psi_-) (-i[R_\nu, U^{-1}t_a U] \psi_+ \psi_-) \right. \\ &\quad \left. - k(z) (R^\mu \hat{\phi}_0) \frac{d}{dz} \psi_+(z) U^{-1}t_a U \right\} \\ &= 2\kappa \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} L^\mu + c_S [[L^\mu, L^\nu], L_\nu] \right) t_a \right\} \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

$$\begin{aligned} j_{\zeta_+, a}^{\mu, \text{CS}}(x) &= -\frac{iN_c}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (R_\nu R_\rho R_\sigma U^{-1}t_a U) \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_+^2 (1 - \psi_+) \frac{d\psi_+}{dz} \\ &= -\frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma t_a) \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

を得る. ここに,

$$L_\mu(x) = U(x)R_\mu U(x)^{-1} = iU(x)\partial_\mu U(x)^{-1} \quad (4.3.30)$$

である.

従って, 4次元カレントは

$$j_{\zeta_+, a}^\mu = 2\kappa \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} L^\mu + c_S [[L^\mu, L^\nu], L_\nu] \right) t_a \right\} - \frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma t_a) \quad (4.3.31)$$

となり, これは Skyrme model での左変換に対応するカレントに他ならない. ただし, c_S は

$$c_S = \int_{-\infty}^{\infty} dz h(z) [\psi_+(z)\psi_-(z)]^2 = 0.15659\dots \quad (4.3.32)$$

で与えられる.

次に, $\zeta_-(z) = \psi_-(z)t_a$ の場合を考えよう. $\zeta_-^g(z)$ は

$$\zeta_-^g(x, z) = (\psi_- + U^{-1}\psi_+)\psi_-t_a(\psi_- + U\psi_+) \simeq \psi_-(z)t_a \quad (4.3.33)$$

となり, 元々のゲージでのそれと同じである.

これから,

$$\begin{aligned} j_{\zeta_-, a}^{\mu, \text{YM}}(x) &= -2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{tr} \left\{ h(z) (-i [R^\mu, R^\nu] \psi_+ \psi_-) i [R_\nu \psi_+, t_a \psi_-] - k(z) (R^\mu \widehat{\phi}_0) \frac{d}{dz} \psi_-(z) t_a \right\} \\ &= -2\kappa \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} R^\mu + c_S [[R^\mu, R^\nu], R_\nu] \right) t_a \right\} \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} j_{\zeta_-, a}^{\mu, \text{CS}} &= -\frac{iN_c}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (R_\nu R_\rho R_\sigma t_a) \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_+ \psi_-^2 \frac{d\psi_+}{dz} \\ &= -\frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (R_\nu R_\rho R_\sigma t_a) \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

となり, 結局

$$j_{\zeta_-, a}^\mu = -2\kappa \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} R^\mu + c_S [[R^\mu, R^\nu], R_\nu] \right) t_a \right\} - \frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (R_\nu R_\rho R_\sigma t_a) \quad (4.3.36)$$

を得る. これは Skyrme model での右変換に相当するカレントに等しい.

4.3.3 バリオンの静的性質

この小節では上で定義したカレントと 4.2 節で与えられた解を基にバリオンの諸性質を解析する.

Rescaling

再び (4.2.18) のように座標と場を rescale し, $1/\lambda$ 展開を行う. こうして rescale された量で表すと, leading order で J^ζ は次のように書ける^{*4)}.

$$J_\zeta^0(x, z) = -2\kappa\lambda \operatorname{tr} \left(\mathcal{F}_{0i} \mathcal{D}_i \tilde{\zeta} + \mathcal{F}_{0z} \mathcal{D}_z \tilde{\zeta} \right) - \frac{N_c}{64\pi^2} \lambda^2 \epsilon_{MNPQ} \operatorname{tr} \left(\{ \mathcal{F}_{MN}, \mathcal{F}_{PQ} \} \tilde{\zeta} \right) \quad (4.3.37)$$

$$J_\zeta^i(x, z) = -2\kappa\lambda^{\frac{3}{2}} \operatorname{tr} \left(\mathcal{F}_{ij} \mathcal{D}_j \tilde{\zeta} + \mathcal{F}_{iz} \mathcal{D}_z \tilde{\zeta} \right) + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \left(\mathcal{F}_{jk} \mathcal{F}_{0z} \tilde{\zeta} + 2\mathcal{F}_{0j} \mathcal{F}_{kz} \tilde{\zeta} \right) \quad (4.3.38)$$

$$J_\zeta^z(x, z) = -2\kappa\lambda^{\frac{3}{2}} \operatorname{tr} \left(\mathcal{F}_{zi} \mathcal{D}_i \tilde{\zeta} \right) - \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{\zeta}) \quad (4.3.39)$$

ここに, $\tilde{\zeta}(t, x) = \zeta(t, \lambda^{-\frac{1}{2}}x)$. 特に, $\zeta(z) = \psi(z)t^a$ に対しては,

$$J_a^0(x, z) = -2\kappa\lambda \left\{ i \operatorname{tr} \left[\left([\mathcal{F}_{0i}, \mathcal{A}_i] + [\mathcal{F}_{0z}, \mathcal{A}_z] \right) t_a \right] \tilde{\psi}(z) + \operatorname{tr} (\mathcal{F}_{0z} t_a) \frac{d\tilde{\psi}(z)}{dz} \right\} \\ - \frac{N_c}{64\pi^2} \lambda^2 \epsilon_{MNPQ} \operatorname{tr} \left(\{ \mathcal{F}_{MN}, \mathcal{F}_{PQ} \} t_a \right) \tilde{\psi} \quad (4.3.40)$$

$$J_a^i(x, z) = -2\kappa\lambda^{\frac{3}{2}} \left\{ i \operatorname{tr} \left[\left([\mathcal{F}_{ij}, \mathcal{A}_j] + [\mathcal{F}_{iz}, \mathcal{A}_z] \right) t_a \right] \tilde{\psi} + \operatorname{tr} (\mathcal{F}_{iz} t_a) \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right\} \\ + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \left[\left(\mathcal{F}_{jk} \mathcal{F}_{0z} + 2\mathcal{F}_{0j} \mathcal{F}_{kz} \right) t_a \right] \tilde{\psi} \quad (4.3.41)$$

$$J_a^z(x, z) = -2\kappa\lambda^{\frac{3}{2}} \operatorname{tr} \left([\mathcal{F}_{zi}, \mathcal{A}_i] t_a \right) \tilde{\psi}(z) - \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma} t_a) \tilde{\psi} \quad (4.3.42)$$

ここに

$$\tilde{\psi}(z) = \psi(\lambda^{-\frac{1}{2}}z) \quad (4.3.43)$$

である.

singular ゲージの導入

ここで, 後に有用となる singular ゲージを導入しておく. singular ゲージでのバリオン解 \bar{A}^{cl} は A^{cl} を通して次のように書ける.

$$\bar{A}^{\text{cl}} = (A^{\text{cl}})^{g^{-1}} = g^{-1} (A^{\text{cl}} - id) g \quad (4.3.44)$$

つまり,

$$\bar{A}_{M=i,z}^{\text{cl}}(\mathbf{x}, z) = -i\bar{f}(\xi)g(x)^{-1}\partial_M g(x), \quad \bar{A}_0^{\text{cl}}(\mathbf{x}, z) = 0 \quad (4.3.45)$$

^{*4)} $\kappa = \mathcal{O}(\lambda)$ であるから, J_M^ζ の第2項は subleading のように見える. しかし, $U(1)$ カレントに対しては YM part からの寄与はなく, これらの項が leading となる.

である。ここに,

$$\bar{f}(\xi) = 1 - f(\xi) = \frac{\rho^2}{\xi^2 + \rho^2} \quad (4.3.46)$$

であり, $g(x)$ は (4.2.14) で定義されている. 頭わに書くと, \bar{A}^{cl} は

$$\bar{A}_i^{\text{cl}}(\mathbf{x}, z) = \frac{2}{\xi^2} \bar{f}(\xi) (z t_i - \epsilon_{ija} x^j t_a), \quad \bar{A}_z^{\text{cl}}(\mathbf{x}, z) = -\frac{2}{\xi^2} \bar{f}(\xi) x^a t_a \quad (4.3.47)$$

と書け, field strength は

$$\bar{F}_{ij}^{\text{cl}} = \frac{4\rho^2}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \epsilon_{ijk} g^{-1} t_k g, \quad \bar{F}_{iz}^{\text{cl}} = \frac{4\rho^2}{(\xi^2 + \rho^2)^2} g^{-1} t_i g \quad (4.3.48)$$

と書ける.

singular ゲージでは集団座標 $W(t), \rho(t)$ は次のように導入される :

$$\bar{A}(x, z) = (\bar{A}^{\text{cl}} + \bar{\Phi} dt)^{W(t)} = W(t) (\bar{A}^{\text{cl}} + \bar{\Phi} dt - id) W(t)^{-1} \quad (4.3.49)$$

ここに, $\bar{\Phi}$ は次のように書ける.

$$\bar{\Phi} = g^{-1} \Phi g = \sum_{a=1}^3 \chi^a(t) \bar{\Phi}_a, \quad \bar{\Phi}_a = f(\xi) t_a \quad (4.3.50)$$

ここで, \bar{A} は regular ゲージ A (4.2.40) に $W g^{-1} W^{-1}$ でゲージ変換することで得られる :

$$\bar{A} = A^{W g^{-1} W^{-1}} = \left((A^{W^{-1}})^{g^{-1}} \right)^W \quad (4.3.51)$$

singular ゲージでは, \bar{F}_{0M} は

$$\bar{F}_{0M} = (F^{W g^{-1} W^{-1}})_{0M} = W g^{-1} W^{-1} F_{0M} W g W^{-1} = W(t) \left(\dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{A}_M^{\text{cl}} - \chi^a \bar{D}_M^{\text{cl}} \bar{\Phi}_a \right) W(t)^{-1} \quad (4.3.52)$$

と書ける.

核子の charge density

カレント (4.3.40)-(4.3.42) を用いて核子の charge density を求めよう. 核子の電荷は isospin I_3 とバリオン数の半分 $B/2$ との和でかけていた. そこで, isospin charge density とバリオン数密度を求めよう. また, ここでの解析は singular ゲージで行う*5).

まずは isospin charge density を計算しよう. isospin 回転は $SU(2)_V$ 回転であり, $z = \infty$ と $z = -\infty$ と同じ変換を施すことで得られる. これに相当する 5 次元カレントを \mathcal{V} と呼ぶこ

*5) regular ゲージでの計算では (4.3.59) が再現されない.

とにする。原理的には $\psi(z)$ は $z = \pm\infty$ で 1 となるような関数であればなんでもよく、特定の関数を用いるべきだという議論は今のところない。ここでは、試行的に $\psi(z)$ に Skyrme 近似を採用することにする。例えば今の場合なら、

$$\psi(z) = \psi_+ + \psi_- = 1 \quad (4.3.53)$$

と書ける。

この式や (4.3.49), (4.3.52) を (4.3.41) に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}_a^0(x, z) &= 2\kappa\lambda i \operatorname{tr} \left\{ \left([\bar{F}_{0i}, \bar{A}_i] + [\bar{F}_{0z}, \bar{A}_z] \right) t_a \right\} \\ &= -2\kappa\lambda \operatorname{tr} \left\{ W(t) \left(i[\bar{D}_i^{\text{cl}} \bar{\Phi}_b, \bar{A}_i] + i[\bar{D}_z^{\text{cl}} \bar{\Phi}_b, \bar{A}_z] \right) W(t)^{-1} t_a \right\} \chi^b(t) \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

これを (4.3.54) に代入することで、

$$\mathcal{V}_a^0(t, \mathbf{x}, z) = -2\kappa\lambda \times \frac{8\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^3} \times \operatorname{tr}(-i\dot{W}W^{-1}t_a) \quad (4.3.55)$$

を得る。ここで、

$$\sum_{b=1}^3 (t_b)_{ij} (t_b)_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{4} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.3.56)$$

から得られる表式

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^3 \operatorname{tr} \left[W(t) t_b W(t)^{-1} t_a \right] \chi^b(t) &= -2i \sum_b \operatorname{tr} (t_b W^{-1} t_a W) \operatorname{tr} (t_b W^{-1} \dot{W}) \\ &= -i \operatorname{tr} (W^{-1} t_a W W^{-1} \dot{W}) = -i \operatorname{tr} (t_a \dot{W} W^{-1}) \end{aligned} \quad (4.3.57)$$

を用いた。

isospin charge density $\rho_a^V(t, \mathbf{x})$ は $\bar{\mathcal{V}}_a^0$ を (rescale する前の) z で積分することで得られる：

$$\rho_a^V(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\lambda^{-1/2} z) \bar{\mathcal{V}}_a^0(t, \mathbf{x}, z) = -2\kappa\lambda^{1/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{8\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^3} \times \operatorname{tr}(-i\dot{W}W^{-1}t_a) \quad (4.3.58)$$

これを空間積分したものは確かに (4.2.48) から導かれる isospin I_a と一致する：

$$\int d^3(\lambda^{-1/2} x) \rho_a^V(t, \mathbf{x}) = -\frac{8\pi^2 \kappa \rho^2}{\lambda} \operatorname{tr}(-i\dot{W}W^{-1}t_a) = I_a \quad (4.3.59)$$

rescale する前の量を用いて ρ_a^V を表すと、

$$\rho_a^V(\mathbf{x}) = \frac{3\lambda^{3/2}}{4\pi} \frac{\rho^2}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} I_a = \frac{3}{4\pi} \frac{\rho_{\text{org}}^2}{(r_{\text{org}}^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{5/2}} I_a \quad (4.3.60)$$

と書ける. ここに, r_{org} と ρ_{org} は rescale する前の量で,

$$r_{\text{org}} = \lambda^{-1/2} r, \quad \rho_{\text{org}} = \lambda^{-1/2} \rho \quad (4.3.61)$$

次に, バリオン数密度を求めよう. バリオン数は instanton 数であった. そこで, バリオン数カレント $j j_B^\mu$ を instanton 数カレント

$$J_B^\mu = -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu MNPQ} \text{tr}(\mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}_{PQ}) \quad (4.3.62)$$

の z -積分で定義する.

このとき, バリオン数密度は

$$j_B^0(\mathbf{x}) = -\frac{4}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d(\lambda^{-1/2} z) \lambda^2 \epsilon_{ijk} \text{tr}(F_{ij}^{\text{cl}} F_{kz}^{\text{cl}}) = \frac{15\lambda^{3/2}}{8\pi} \frac{\rho^4}{(r^2 + \rho^2)^{7/2}} \quad (4.3.63)$$

となる. これを rescale する前の量 (4.3.61) で表すと,

$$j_B^0(\mathbf{x}) = \frac{15}{8\pi} \frac{\rho_{\text{org}}^4}{(r_{\text{org}}^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{7/2}} \quad (4.3.64)$$

以上の結果から, 核子の単位 r_{org} 当たりの electric charge density は

$$\begin{aligned} \rho_{\text{em}}(r_{\text{org}}) &= 4\pi r_{\text{org}}^2 \left(\rho_{a=3}^V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} j_B^0(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{3\rho_{\text{org}}^2 r_{\text{org}}^2}{(r_{\text{org}}^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{5/2}} I_3 + \frac{15\rho_{\text{org}}^4}{4} \frac{r_{\text{org}}^2}{(r_{\text{org}}^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{7/2}} B \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

となる. ここに, バリオン数 B は核子に対しては $B = 1$ である.

Mean square charge radius

Skyrme model の場合 [38] と同じようにして, isovector mean square charge radius を計算すると,

$$\langle r^2 \rangle_{I=1} = \frac{\int d^3x r^2 \rho_{a=3}^V(\mathbf{x})}{\int d^3x \rho_{a=3}^V(\mathbf{x})} \quad (4.3.66)$$

となり, log 発散する. この結果は [37] の予想と同じである.

一方, isoscalar mean square charge radius は

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = \frac{\int d^3x r^2 j_B^0(\mathbf{x})}{\int d^3x j_B^0(\mathbf{x})} = \frac{\int_0^\infty dr \frac{r^4}{(r^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{7/2}}}{\int_0^\infty dr \frac{r^2}{(r^2 + \rho_{\text{org}}^2)^{7/2}}} = \frac{3}{2} \rho_{\text{org}}^2 \quad (4.3.67)$$

と表される.

ここで, ρ^2 は前節で得た波動関数 $R(\rho)$ (4.2.67) を用いて得られる期待値:

$$\langle \rho^2 \rangle_\rho = \frac{\int d\rho \rho^3 \rho^2 R(\rho)^2}{\int d\rho \rho^3 R(\rho)^2} \quad (4.3.68)$$

で評価する. 核子に対しては, $n = 0, l = 1$ であるから,

$$R(\rho) = \rho^{\tilde{l}_N} \exp\left(-\frac{1}{2}m_y\omega_\rho\rho^2\right), \quad (\tilde{l}_N = -1 + 2\sqrt{1 + N_c^2/5}) \quad (4.3.69)$$

となる. 従って,

$$\langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho = \frac{2 + \tilde{l}_N}{m_y\omega_\rho} = \frac{\sqrt{6}}{8\pi^2\kappa} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{N_c^2}{5}} \right) \quad (4.3.70)$$

を得る.

また, このときのバリオンの質量は (4.2.34) で与えられ, leading では $8\pi^2\kappa$ である. これを核子の質量 M_N とみなすと,

$$M_N = 8\pi^2\kappa \quad (4.3.71)$$

ここで, N と Δ との質量の差を再現するように $M_{\text{KK}} = 488\text{MeV}$ と選ぶと,

$$M_N = 939\text{MeV} = 1.92M_{\text{KK}} \quad (4.3.72)$$

となる.

このとき,

$$\sqrt{\langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho} = 0.672 \text{ fm} \quad (4.3.73)$$

となる. そして, これを (4.3.67) へ代入すると, isoscalar mean square charge radius は

$$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times 0.672 \text{ fm} = 0.82 \text{ fm}, \quad (\text{ANW: } 0.59 \text{ fm}, \text{ Exp: } 0.80 \text{ fm}) \quad (4.3.74)$$

と決まる. 括弧中の ANW は Skyrme model での計算結果 [38] を, EXP は実験値を表している. [38] と比較すると驚くほど実験値に近い値である.

Magnetic moment

まず, 核子の magnetic moment を求めるために必要な量を求めよう. magnetic moment は

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{I=1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{I=0} \quad (4.3.75)$$

と書けている. ここに, \mathbf{j}_{em} は electro-magnetic カレントであり, vector current $\mathbf{j}_{V,a=3}$ とバリオン数カレント \mathbf{j}_B との和で表される:

$$\mathbf{j}_{\text{em}} = \mathbf{j}_{V,a=3} + \frac{1}{2}\mathbf{j}_B \quad (4.3.76)$$

ここで, $\mathbf{j}_{V,a}$ は $\bar{\mathcal{V}}_a^i$ を z -積分することで得られる:

$$\begin{aligned} j_{V,a}^i(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\lambda^{-\frac{1}{2}}z) \bar{\mathcal{V}}_a^i(x, z) \\ &= 2i\kappa\lambda^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \text{tr} [([\bar{\mathcal{F}}_{ij}, \bar{\mathcal{A}}_j] + [\bar{\mathcal{F}}_{iz}, \bar{\mathcal{A}}_z])t_a] \end{aligned} \quad (4.3.77)$$

そして, \mathbf{j}_B はバリオン数カレントで,

$$j_B^i = \int_{-\infty}^{\infty} d(\lambda^{-\frac{1}{2}}z) \bar{\mathcal{J}}_B^i = \frac{\lambda}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \int_{-\infty}^{\infty} dz \text{tr} (\bar{\mathcal{F}}_{jk} \bar{\mathcal{F}}_{0z} + 2\bar{\mathcal{F}}_{0j} \bar{\mathcal{F}}_{kz}) \quad (4.3.78)$$

と書ける. これらのカレントを用いて, isovector magnetic moment や isoscalar magnetic moment はそれぞれ次のように表される.

$$\boldsymbol{\mu}_{I=1} = \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}_{a=3}^V(\mathbf{x}), \quad (4.3.79)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}^B(\mathbf{x}) \quad (4.3.80)$$

さらに, それぞれに対する g -因子は次のように定義される.

$$\boldsymbol{\mu}_{I=1} = \frac{g_{I=1}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tau_3, \quad (4.3.81)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{g_{I=0}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad (4.3.82)$$

ここに, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ はそれぞれ spin, isospin に対するパウリ行列である.

これらの g -因子を用いて, 陽子および中性子の magnetic moment は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_p &= \frac{g_p}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{g_{I=1} + g_{I=0}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ \boldsymbol{\mu}_n &= \frac{g_n}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{-g_{I=1} + g_{I=0}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{aligned} \quad (4.3.83)$$

と書け, 従って,

$$g_{I=0} = g_p + g_n, \quad g_{I=1} = g_p - g_n \quad (4.3.84)$$

となる.

そこで、まずは isovector magnetic moment を求めよう。 (4.3.49) や (4.3.52) を (4.3.77) に代入すると、

$$j_{V,a}^i(x) = -2\kappa\lambda \times \frac{2\pi}{\rho^2} \left(\frac{8}{r} - \frac{8r^4 + 20\rho^2 r^2 + 15\rho^4}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} \right) \epsilon_{ijk} x^j \text{tr} \left[t_k W(t)^{-1} t_a W(t) \right] \quad (4.3.85)$$

を得る。 rescale する前の座標で積分することで、 isovector magnetic moment は次のように求まる：

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}_{I=1})_i &= \epsilon_{ijk} \int d^3(\lambda^{-1/2}x) (\lambda^{-1/2}x^j) j_{V,3}^k(x) = \frac{1}{\lambda^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} x^j j_{V,3}^k(x) \\ &= -\frac{2\kappa\lambda}{\lambda^2} \times \frac{2\pi}{\rho^2} \int d^3x \left(\frac{8}{r} - \frac{8r^4 + 20\rho^2 r^2 + 15\rho^4}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} \right) \epsilon_{ijk} x^j \epsilon_{klm} x^l \text{tr} \left[t_m W(t)^{-1} t_3 W(t) \right] \\ &= \frac{8\pi^2 \kappa \rho^2}{\lambda} \text{tr} \left[t_i W(t)^{-1} t_3 W(t) \right] = 8\pi^2 a N_c \rho^2 \times \text{tr} \left[t_i W(t)^{-1} t_3 W(t) \right] \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

さらに、核子の状態ベクトル $|N\rangle$ に対して成り立つ公式 [38]：

$$\langle N' | \text{tr} \left[t_i W^{-1} t_a W \right] | N \rangle = -\frac{1}{6} \langle N' | \sigma_i \tau_a | N \rangle \quad (4.3.87)$$

を用いることで、 (4.3.81) との比較から、

$$\frac{g_{I=1}}{4M_N} = 8\pi^2 a N_c \rho^2 \times \left(-\frac{1}{6} \right) \quad (4.3.88)$$

を得る。 従って、 g_I は次のように求まる。

$$g_{I=1} = \frac{16\pi^2 \kappa}{3} \langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho M_N \quad (4.3.89)$$

$g_{I=1}$ の数値を求めるため、再び $\langle \rho^2 \rangle_\rho$ に (4.3.70) を代入し、 $M_N = 1.92M_{\text{KK}}$ を用いると、

$$g_{I=1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{N_c^2}{5}} \right) \times 1.92 = 6.83 \quad (\text{ANW: 6.38, Exp: 9.4}) \quad (4.3.90)$$

この値は Skyrme model の結果 [38] よりも実験値に近くなっている。

次に、 isocalar magnetic moment (4.3.80) を計算しよう。 (4.3.78) より、

$$\begin{aligned} j_B^i(x) &= \frac{3\lambda}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^4} \left[(\delta_{ia} z - \epsilon_{ija} x^j) \chi^a(t) + 2x^i \frac{d}{dt} \ln \rho(t) \right] \\ &= \frac{15\lambda}{16\pi} \frac{\rho^4}{(r^2 + \rho^2)^{7/2}} \left(-\epsilon_{ija} x^j \chi^a(t) + 2x^i \frac{d}{dt} \ln \rho(t) \right) \end{aligned} \quad (4.3.91)$$

を得る。 そこで、 (4.3.91) や (4.3.80) を代入すると、

$$(\boldsymbol{\mu}_{I=0})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3(\lambda^{-1/2}x) (\lambda^{-1/2}x^j) j_B^k(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{15}{16\pi\lambda} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (-\epsilon_{kla}) \int d^3x x^j x^k \frac{\rho^4}{(r^2 + \rho^2)^{7/2}} \chi^a(t) \\
&= \frac{5}{4\lambda} \int_0^\infty dr \frac{\rho^4 r^4}{(r^2 + \rho^2)^{7/2}} = \frac{\rho^2}{4\lambda} \chi^i(t) = \frac{1}{16\pi^2\kappa} J_i
\end{aligned} \tag{4.3.92}$$

を得る. ここに J_i は角運動量演算子であり,

$$J_i = \frac{8\pi^2\kappa\rho^2}{\lambda} \text{tr} \left(-iW^{-1}\dot{W}t_i \right) = \frac{4\pi^2\kappa\rho^2}{\lambda} \chi^i(t) \tag{4.3.93}$$

で与えられる.

(4.3.92) を (4.3.82) と比較し, $J_i = (1/2)\sigma_i$ を用いると,

$$g_{I=0} = \frac{M_N}{8\pi^2\kappa} = 1 \quad (\text{ANW: 1.11, Exp: 1.76}) \tag{4.3.94}$$

ここに, (4.3.71) を用いた. この値は Skyrme model での値 [38] や実験値よりも小さい.

以上で求めた値 $g_{I=1} = 6.83$ (4.3.90) と $g_{I=0} = 1$ (4.3.94) を (4.3.84) に代入すれば, 核子の g -因子が求まる:

$$g_p = \frac{1}{2}(g_{I=0} + g_{I=1}) = 3.92, \quad g_n = \frac{1}{2}(g_{I=0} - g_{I=1}) = -2.915 \tag{4.3.95}$$

核子の magnetic moment を Bohr magneton $e\hbar/(2M_N)$ 単位で表すと,

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{1}{2} g_p = 1.96, \quad (\text{ANW: 1.87, Exp: 2.79}) \\
\mu_n &= \frac{1}{2} g_n = -0.845, \quad (\text{ANW: -1.46, Exp: -1.91})
\end{aligned} \tag{4.3.96}$$

これらの値は Skyrme model と比べより実験値に近い.

また, その比は

$$\left| \frac{\mu_p}{\mu_n} \right| = 1.59, \quad (\text{ANW: 1.43, Exp: 1.46}) \tag{4.3.97}$$

となる. これは実験値から遠ざかっている.

Axial vector coupling

次に, axial vector coupling g_A を考える. axial vector current は $SU(N_f)_A$ 変換に伴うカレントであった. 対応する 5次元カレント $J_a^A(x, z)$ は $\psi(z)$ を次のように選ぶことで得られる.

$$\psi_A(z) = \psi_+(z) - \psi_-(z) = \frac{2}{\pi} \arctan z \tag{4.3.98}$$

従って、 $\tilde{\psi}_A(z)$ は $1/\lambda$ 展開で

$$\tilde{\psi}_A(z) = \frac{2}{\pi} \arctan(\lambda^{-\frac{1}{2}} z) \simeq \frac{2}{\pi} \lambda^{-\frac{1}{2}} z \quad (4.3.99)$$

と近似できる. この $\tilde{\psi}_A$ を (4.3.41) に代入すると, 5次元 axial vector current の空間成分は

$$J_{A,a}^i = \frac{4}{\pi} \kappa \lambda \left\{ iz \operatorname{tr} \left[([F_{ij}, A_j] + [F_{iz}, A_z]) t_a \right] + \operatorname{tr}(F_{iz} t_a) \right\} \quad (4.3.100)$$

と書ける.

バリオン解に対しては, (4.3.49) を代入することで,

$$\bar{J}_{A,a}^i(x, z) = \frac{4}{\pi} \kappa \lambda \left\{ \frac{16\rho^4 z^2}{\xi^2(\xi^2 + \rho^2)^3} + \frac{4\rho^2}{\xi^2(\xi^2 + \rho^2)^2} \left(z^2 - \frac{\mathbf{x}^2}{3} \right) \right\} \operatorname{tr} (t_i W(t)^{-1} t_a W(t)) \quad (4.3.101)$$

を得る. これを z -積分することで, axial vector current $j_{A,a}^i$ は次のように求まる.

$$\begin{aligned} j_{A,a}^i(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\lambda^{-\frac{1}{2}} z) \bar{J}_{A,a}^i(x, z) \\ &= 2\kappa \lambda^{1/2} \times \frac{16}{3\rho} \left(\frac{8r^4/\rho^4 + 12r^2/\rho^2 + 3}{(1 + r^2/\rho^2)^{3/2}} - \frac{8r}{\rho} \right) \times \operatorname{tr} (t_i W(t)^{-1} t_a W(t)) \end{aligned} \quad (4.3.102)$$

さらに, axial vector coupling g_A を求めるため, \mathbf{x} についても積分すると,

$$\int d^3(\lambda^{-1/2} x) j_{A,a}^i(x) = 4\pi \lambda^{-3/2} \int_0^\infty dr r^2 j_{A,a}^i(x) = \frac{8\pi\kappa\rho^2}{3\lambda} \operatorname{tr} (\tau_i W(t)^{-1} \tau_a W(t)) \quad (4.3.103)$$

を得る. 従って, 公式 (4.3.87) を用いることで,

$$g_A = \frac{16\pi\kappa\rho^2}{3\lambda} = \frac{16\pi\kappa}{3} \langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho \quad (4.3.104)$$

を得る. そして, $\langle \rho_{\text{org}}^2 \rangle_\rho$ に (4.2.33) を代入することで,

$$g_A = \frac{\sqrt{6}}{3\pi} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{N_c^2}{5}} \right) = 1.13, \quad (\text{ANW: } 0.61, \text{ Exp: } 1.27) \quad (4.3.105)$$

を得る. この結果は Skyrme model よりもはるかに実験値に近い.

4.3.4 問題点

もう一度, 我々のカレントの持つ問題点について解説しておく. 上の計算では, $\zeta_\pm^a(z)$ として試行的に $\psi_\pm(z)$ を用いた. ここでは $\zeta_\pm^a(z)$ をいかにして決めるべきかを考えてみよう. 今仮

に何らかの原理で $\zeta_{\pm}^a(z)$ を特定できたとしよう. そしてこれを用いてカレントを計算したとする. ところが, x^M で張られる 4次元空間の境界での振舞いを変えないようなゲージ変換を施し, そのゲージで同じ $\zeta_{\pm}^a(z)$ を用いてカレントを計算すると, 一般にはカレントの non-abelian 部分の値は変わる. ($U(1)$ 部分は不変となっている.) つまり, カレントがゲージの取り方に依存してしまう.

実際に, 我々の計算したカレントがどのようにゲージに依存するか見てみよう. 部分積分をして EOM を用いると, (4.3.14) より

$$j_{\zeta}^{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} dz J J_{\zeta}^{\mu}(x, z) = 2\kappa k(z) \text{tr} [\mathcal{F}^{\mu z}(x, z) \zeta(x, z)] \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \partial^{\nu} \chi_{\mu\nu} \quad (4.3.106)$$

と書ける. ここに,

$$\chi_{\mu\nu}(x) = -\chi_{\nu\mu} = 2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dz h(z) \text{tr} [\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, z) \zeta(x, z)] \quad (4.3.107)$$

である. 今, バリオン解に対しては (4.3.106) の第 1 項は消える. 第 2 項は表面項だから, カレントを積分したものはゲージ不変となる. つまり, axial vector coupling g_A はゲージ不変となる. 一方, カレントそのものでなく \mathbf{x} との直積を計算した isovector magnetic moment $\boldsymbol{\mu}_{I=1}$ はゲージ不変にならない. また, 空間積分してないカレントそのものである isospin charge density もやはりゲージ不変ではない.

これに対して, $U(1)$ 部分はゲージ不変とるため, バリオン数密度 j_0^B や isoscalar magnetic moment $\boldsymbol{\mu}_{I=0}$ はゲージ不変となる.

上で計算した物理量をゲージ不変にするためには, 4次元カレントをゲージ不変な形で定義する必要があると考えられる.

4.3.5 カレントのもう 1 つの定義

そこで, 4次元カレントを別の流儀で定義してみよう. $U(N_f)_{L/R}$ に対応するカレントを外場 $\mathcal{A}_{L/R}$ との coupling から定義しよう. 外場を含む場合のモード展開:

$$\mathcal{A}_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu L} \phi_{+}(z) + \mathcal{A}_{\mu R} \phi_{-}(z) \quad (4.3.108)$$

を作用に代入して $\mathcal{A}_{L/R}$ との coupling を見ると, カレントは次のように表される.

$$j_{L/R,a}^{\mu} = -2\kappa k(z) \text{tr} (\mathcal{F}^{\mu z}(x, z) t_a) \Big|_{z=\pm\infty} + \frac{N_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [(\mathcal{F}_{\nu\rho} \mathcal{A}_{\sigma} - \mathcal{A}_{\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma} - i \mathcal{A}_{\nu} \mathcal{A}_{\rho} \mathcal{A}_{\sigma}) t_a] \Big|_{z=\pm\infty} \quad (4.3.109)$$

ただし, 導く過程において EOM を用い, 4次元時空の表面項を落とした. また, $\phi_{\pm}(z)$ は次の条件を満たす任意の関数である:

$$\phi_{\pm}(z = \pm\infty) = 1, \quad \phi_{\pm}(z = \mp\infty) = 0 \quad (4.3.110)$$

この定義 (4.3.109) は確かにゲージ不変なのだが, 以下の2つの問題がある. 1つ目は, Skyrme model のカレントを再現できない点である. 実際, (4.3.21)-(4.3.24) を代入すると, Skyrme model のカレント (4.3.31),(4.3.36) を再現しないことが分かる. もう1点は, この定義ではバリオン解に対してカレントが消えてしまうことである.

このように, 酒井・杉本模型からバリオンの静的性質を調べる試みにはまだ解決しなければのらない問題がある. この問題が生じた背景には, この模型においてカイラル対称性がゲージ対称性 (の一部) として実現されていることが考えられる. いかにしてゲージ不変で, しかも Skyrme model のカレントを再現するような4次元カレントを定義するか, これからの課題である.

4.4 $N_f = 3$ の場合

$N_f = 3$ にするとき、実験と比較するには次の2つの問題を解決したい。

quark の質量 s quark による効果などを見るためには、quark に質量を持たせる必要がある。
酒井・杉本模型では quark は零質量であるため、これを見ることは期待できない。

拘束条件 集団座標 $SU(3)$ を空間回転 $SU(2)$ と同一視するためには、余分な対称性に対して拘束条件が必要となる。

これまでに酒井・杉本模型を改良して quark の質量を再現するような模型がいくつか提案されてきた [39, 40, 41, 42]。現象論的には quark の質量を導入してバリオンの mass splitting をみるのは興味深いですが、それ以前の問題として、拘束条件が正しく働いて、バリオンの量子数を再現できるかどうかを確かめる必要がある。そこで、ここでは [21] に倣い拘束条件の問題について議論していく。

4.4.1 作用

(4.1.5) と全く同様にして $U(3)$ ゲージ場を $SU(3)$ 部分と $U(1)$ 部分に分ける：

$$A = A + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} \hat{A} = A^a t_a + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} \hat{A}, \quad \text{tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (4.4.1)$$

ただし、 $a = 1, 2, \dots, 8$ 。このとき、作用は

$$S = S_{YM} + S_{CS} \quad (4.4.2)$$

$$S_{YM} = -\kappa \int d^4 x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right) - \frac{1}{2} \kappa \int d^4 x dz \left(\frac{1}{2} h(z) \hat{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \hat{F}_{\mu z}^2 \right) \quad (4.4.3)$$

$$S_{CS} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \left[\omega_5(A) + \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{A} \text{tr} F^2 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \hat{A} \hat{F}^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} d \left(\hat{A} \left(2FA - \frac{i}{2} A^3 \right) \right) \right] = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(A) + \frac{N_c}{24\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int d^4 x dz \left[\frac{\sqrt{6}}{8} \hat{A}_0 \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{A}_M \text{tr}(\partial_0 A_N F_{PQ}) + \frac{\sqrt{6}}{4} \hat{F}_{MN} \text{tr}(A_0 F_{PQ}) + \frac{1}{12\sqrt{6}} \hat{A}_0 \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} - \frac{1}{3\sqrt{6}} \hat{A}_M \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} \right] + \frac{N_c}{24\sqrt{6}\pi^2} \int d \left(\hat{A} \text{tr} \left(2FA - \frac{i}{2} A^3 \right) \right) \quad (4.4.4)$$

と書ける。

4.4.2 古典解

$N_f = 2$ のときと同様に (4.2.18) で rescale して $1/\lambda$ 展開をし, その next leading までを考える. すると, やはり S_{CS} は不変で, (4.4.4) となる. 一方, S_{YM} は,

$$S_{YM} = -aN_c \int d^4x dz \operatorname{tr} \left[\frac{\lambda}{2} F_{MN}^2 + \left(-\frac{z^2}{6} F_{ij}^2 + z^2 F_{iz}^2 - F_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right] \\ - \frac{aN_c}{2} \int d^4x dz \left[\frac{\lambda}{2} \widehat{F}_{MN}^2 + \left(-\frac{z^2}{6} \widehat{F}_{ij}^2 + z^2 \widehat{F}_{iz}^2 - \widehat{F}_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right] \quad (4.4.5)$$

となる.

従って, EOM は

$$A_0; \quad D_M F_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a} \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_{MNPQ} \widehat{F}_{MN} F_{PQ} \\ + \frac{1}{32\sqrt{3}\pi^2 a} \epsilon_{MNPQ} \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) t_8 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.4.6)$$

$$A_M; \quad D_N F_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.4.7)$$

$$\widehat{A}_0; \quad \partial_M \widehat{F}_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a} \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_{MNPQ} \left(\operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) + \frac{1}{2} \widehat{F}_{MN} \widehat{F}_{PQ} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.4.8)$$

$$\widehat{A}_M; \quad \partial_N \widehat{F}_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.4.9)$$

となる. ここでは, 解として $SU(2)$ BPST instanton 解の $SU(3)$ への埋め込みを考える:

$$F_{MN}(x, z) = \begin{pmatrix} F_{MN}^{SU(2)BPST}(x, z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

確かにこれは (4.4.7) を満たす. また, (4.4.9) から

$$\widehat{A}_M = 0 \quad (4.4.11)$$

を得る. さらにこれを (4.4.6) に代入すると,

$$D_M^2 A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}\pi^2 a} \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} t_8 = 0 \quad (4.4.12)$$

$$\rightarrow A_0 = \frac{1}{8\sqrt{3}\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) t_8 \quad (4.4.13)$$

となる. 同様に (4.4.8) から

$$\partial_M^2 \widehat{A}_0 + \frac{\sqrt{3/2}}{\pi^2 a} \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} = 0 \quad (4.4.14)$$

$$\rightarrow \widehat{A}_0 = \frac{\sqrt{2/3}}{8\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) \quad (4.4.15)$$

を得る.

まとめると, $N_B = 1$ の BPST instanton 解は

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{8\sqrt{3}\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) t_8 \\ A_M &= \begin{pmatrix} A_M^{BPST} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{A}_0 &= \frac{\sqrt{2/3}}{8\pi^2 a} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \frac{\rho^4}{(\xi^2 + \rho^2)^2} \right) \\ \widehat{A}_M &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

と書ける. この解から instanton の質量を計算すると, 結果は $N_f = 2$ の場合 (4.2.32) と同じで,

$$M = 8\pi^2 \kappa \left[1 + \lambda^{-1} \left(\frac{\rho^2}{6} + \frac{1}{32\pi^4 a^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{Z^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \right] \quad (4.4.17)$$

となり, 大きさも (4.2.33) と同じ

$$\rho^2 = \frac{1}{8\pi^2 a} \sqrt{\frac{6}{5}} \quad (4.4.18)$$

で同じ質量

$$M_{\min} = 8\pi^2 \kappa + \sqrt{\frac{2}{15}} N_c \quad (4.4.19)$$

となることが分かる. さらにこの結果は N_f に依らないことが示されている [20, 21].

4.4.3 集団座標

モジュライ空間は以下の通りである.

- instanton の位置 : X^M
- instanton の大きさ : ρ
- $SU(3)$ orientation : $W = e^{i\xi_a t_a} \in SU(3)$

集団座標を次のようにとる.

$$\begin{aligned} A_0(t, x) &= W(t) A_0^{\text{cl}}(x; X^\alpha(t)) W(t)^{-1} + \Delta A_0(x, t) \\ A_M(t, x) &= W(t) A_M^{\text{cl}}(x, X^\alpha(t)) W(t)^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

ここに、 $\Delta A_0(t, x)$ は A が元々の運動方程式 (4.4.6)-(4.4.9) を満たすように導入されている。このとき、パイオン場 $U(t, x)$ は

$$U(t, x) = W U_0(x) W^{-1} \quad (4.4.21)$$

$$U_0(x) \equiv \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z^{\text{cl}}(x) \right)$$

と表される。

またこのとき、field strength は次のようになる。

$$F_{MN} = W F_{MN} W^{-1} \quad (4.4.22)$$

$$F_{0M} = \partial_0 A_M - \partial_M A_0 + i[A_0, A_M]$$

$$= W \left(\dot{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} \Phi - D_M^{\text{cl}} A_0^{\text{cl}} \right) W^{-1} \quad (4.4.23)$$

ここに、

$$\Phi \equiv W^{-1} \Delta A_0 W - i W^{-1} \dot{W} \quad (4.4.24)$$

であり、これを用いれば

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\text{cl}} + \Phi dt)^W \quad (4.4.25)$$

と書ける。

このとき、運動方程式 (4.4.6)-(4.4.9) のうち、(4.4.8) と 4.4.9 は不変なので、 \hat{A}_0, \hat{A}_M は (4.4.16) の通り。そして、(4.4.6), (4.4.7) は

$$(4.4.6) \rightarrow D_M^{\text{cl}} \left(\dot{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} \Phi \right) = 0 \quad (4.4.26)$$

$$(4.4.7) \rightarrow D_N^{\text{cl}} F_{MN}^{\text{cl}} = 0 \quad (4.4.27)$$

となる。従って、 $SU(2)$ のときと同様、非自明な方程式は A_0 の EOM (4.4.26) 唯一つであり、この式から W と Φ との関係が決まる。結果は、Appendix A.12 より、

$$\Phi(t, x) = -\dot{X}^N(t) A_N^{\text{cl}}(x; X^\alpha(t)) + \chi^a(t) \Phi_a(x; X^\alpha(t))$$

$$\chi^a(t) = -2i \text{tr}(t_a W^{-1} \dot{W}) \quad (4.4.28)$$

となる。ただし、 Φ_a は (A.12.10) で与えられる。

拘束項の消滅

さて、 $N_f = 2$ のときと同じように集団座標 (4.4.20) を作用 (4.4.2) に代入して $X^\alpha(t), W(t)$ に対する lagrangian :

$$L = -M + L_{\text{YM}} + L_{\text{CS}} \quad (4.4.29)$$

を計算しよう。ここに,

$$\int dt L_{\text{YM}} = S_{\text{YM}}[\mathcal{A}] - S_{\text{YM}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}] \quad (4.4.30)$$

$$\int dt L_{\text{CS}} = S_{\text{CS}}[\mathcal{A}] - S_{\text{CS}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}] \quad (4.4.31)$$

Skyrme model の時には, (B.3.10) の最後の項 (以下これを ‘拘束項’ と呼ぶ) :

$$-\frac{i}{\sqrt{3}} N_c \text{tr}(t_8 W^{-1} \dot{W}) \quad (4.4.32)$$

がバリオンの spin を正しく導くのに欠かせなかった。もしこの項が出なければ, soliton をバリオンとみなすことはもはや不可能となってしまふ。そこで, 今の場合にも果たしてこれに相当する拘束項 :

$$-\frac{i}{\sqrt{3}} N_c \text{tr}(t_8 W^{-1} \dot{W}) \quad (4.4.33)$$

が現れるかどうかを注意深く見てみる必要がある。これがこの節の冒頭で挙げた 2 つの問題のうちの一つであり, この節のテーマである。

L_{YM}

集団座標 (4.4.20) を S_{YM} (4.4.5) に代入すると, 古典解からの変更を受けるのは $\text{tr} F_{0M}^2$ ただ一つで,

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} - S_{\text{YM}}^{\text{cl}} &= a N_c \int d^4 x dz \left(\underbrace{\text{tr} F_{0M}^2}_{(4.4.23)} - \text{tr}(F_{0M}^{\text{cl}})^2 \right) \\ &= a N_c \int d^4 x dz \left\{ \text{tr} \left(\dot{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} A_0^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} \Phi \right)^2 + -\text{tr}(f_{0M}^{\text{cl}})^2 \right\} \\ &= a N_c \int d^4 x dz \text{tr} \left(\underbrace{\dot{X}^N \frac{\partial}{\partial X^N} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} \Phi_X}_{\dot{X}^N F_{MN}^{\text{cl}}} + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A_M^{\text{cl}} - D_M^{\text{cl}} \Phi_{SU(3)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

となる。古典解を代入して x^M -積分すると,

$$L_{\text{YM}} = \frac{m_X}{2} (\dot{X}^i)^2 + L_Z + L_\rho + L_{\rho W} \quad (4.4.35)$$

を得る。ここに,

$$L_Z = \frac{m_Z}{2} \left(\dot{Z}^2 - \omega_Z^2 Z^2 \right), \quad (4.4.36)$$

$$L_\rho = \frac{m_\rho}{2} \left(\dot{\rho}^2 - \omega_\rho^2 \rho^2 \right) - \frac{K}{m_\rho \rho^2}, \quad (4.4.37)$$

$$L_{\rho W} = m_\rho \rho^2 \left(\frac{1}{8} \sum_{a=1}^3 (\chi^a)^2 + \frac{1}{16} \sum_{a=4}^7 (\chi^a)^2 \right),$$

$$= 2\mathcal{I}_1(\rho) \sum_{a=1}^3 \left[\text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) \right]^2 + 2\mathcal{I}_2(\rho) \sum_{a=4}^7 \left[\text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) \right]^2, \quad (4.4.38)$$

であり、各量は次のように定義されている。

$$M_0 = 8\pi^2\kappa, \quad (4.4.39)$$

$$m_X = m_Z = \frac{m_\rho}{2} = 8\pi^2\kappa\lambda^{-1} = 8\pi^2aN_c, \quad (4.4.40)$$

$$\omega_Z^2 = \frac{2}{3}, \quad \omega_\rho^2 = \frac{1}{6}, \quad (4.4.41)$$

$$K = \frac{N_cm_\rho}{40\pi^2a} = \frac{2}{5}N_c^2, \quad (4.4.42)$$

$$\mathcal{I}_1(\rho) = \frac{1}{4}m_\rho\rho^2, \quad \mathcal{I}_2(\rho) = \frac{1}{8}m_\rho\rho^2. \quad (4.4.43)$$

このように、 L_{YM} からは拘束項は出てこない。

$\underline{L}_{\text{CS}}$

次に集団座標 (4.4.20) を S_{CS} に代入する。今、

$$\begin{aligned} \omega_5(\mathcal{A}) &= \omega_5((\mathcal{A}^{\text{cl}} + \Phi dt)^W) \\ &= \omega_5(\mathcal{A}^{\text{cl}} + \Phi dt) + \frac{1}{10} \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}dt)^5 + d\alpha_4(-iW^{-1}\dot{W}dt, \mathcal{A}^{\text{cl}} + \Phi dt) \\ &= \omega_5(\mathcal{A}^{\text{cl}}) + 3 \text{tr}(\Phi dt (\mathcal{F}^{\text{cl}})^2) + d\beta(\Phi dt, \mathcal{A}^{\text{cl}}) + d\alpha_4(-iW^{-1}\dot{W}dt, \mathcal{A}^{\text{cl}}) \\ &= \omega_5(\mathcal{A}^{\text{cl}}) + 3 \text{tr}(\Phi dt (F^{\text{cl}})^2) + d\beta(\Phi dt, A^{\text{cl}}) + d\alpha_4(-iW^{-1}\dot{W}dt, A^{\text{cl}}), \end{aligned} \quad (4.4.44)$$

となる。ここに、 α_4 や β はそれぞれ (A.13.2), (A.13.4) で定義されている。また、4つ目の等式では $\widehat{A}_M^{\text{cl}} = \widehat{F}_{MN}^{\text{cl}} = 0$ を用いた。第2項～第4項からそれぞれ W を含んだ項が現れる。

そこで、まず第2項 $3 \text{tr}(\Phi dt (F^{\text{cl}})^2)$ を考えよう。この項においては field strength F^{cl} は第0成分を持たないから、解の表式を用いて

$$(F^{\text{cl}})^2 = \frac{1}{2}\mathcal{P}_2 \text{tr}(F^{\text{cl}})^2 \quad (4.4.45)$$

とできる。ただし、

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}t_8 + \frac{2}{3}\mathbf{1}_3, \quad t_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.46)$$

である。従って、 $\text{tr}(\Phi\mathcal{P}_2) = \chi^8(t)/\sqrt{3}$ に注意して、

$$\frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_5} 3 \text{tr}(\Phi dt (F^{\text{cl}})^2) = \frac{N_c}{24\pi^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \int dt \chi^8(t) \int_{M_4} \text{tr}(F^{\text{cl}})^2 = -\frac{N_c}{2\sqrt{3}} \int dt \chi^8(t), \quad (4.4.47)$$

を得る．ただし，最後の等式では instanton 数が 1 であること：

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} \text{tr}(F^{\text{cl}})^2 = 1 \quad (4.4.48)$$

を用いた．

次に，第 3 項 $d\beta$ ，第 4 項 $d\alpha_4$ について考えよう． $\xi \rightarrow \infty$ での振る舞いを考えると， $(A^{\text{cl}})^3 \rightarrow (-ig_{\text{inst}} dg_{\text{inst}}^{-1})^3 \propto \mathcal{P}_2$ ， $F^{\text{cl}} \sim 1/\xi^4$ となるから，境界では F^{cl} を含む項は落ちて，

$$\begin{aligned} \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_5} d\beta(\Phi dt, A^{\text{cl}}) &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_5} d\alpha_4(-iW^{-1}\dot{W}dt, A^{\text{cl}}) \\ &= \frac{N_c}{24\pi^2} \frac{i}{4\sqrt{3}} \int dt \chi^8(t) \int_{\partial M_4} \text{tr}(-ig_{\text{inst}} dg_{\text{inst}}^{-1})^3 = \frac{N_c}{4\sqrt{3}} \int dt \chi^8(t), \end{aligned} \quad (4.4.49)$$

を得る．ここで，(4.4.48) の別の表式：

$$\frac{i}{24\pi^2} \int_{S^3} (-ig dg^{-1})^3 = \frac{1}{2} \mathcal{P}_2. \quad (4.4.50)$$

を用いた．

よって，(4.4.47) と (4.4.49) とから，

$$S_{\text{CS}}[\mathcal{A}] = S_{\text{CS}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}]. \quad (4.4.51)$$

すなわち，

$$L_{\text{CS}} = 0. \quad (4.4.52)$$

となり，確かに L_{CS} から拘束項は出てこない．

4.4.4 WZW 項の検証

[2] によれば，酒井・杉本模型から有効理論として Skyrme model が導かれる．そして，Skyrme model は soliton 解としてバリオンを記述しているのであった．にもかかわらず，上の解析ではバリオンを記述することに失敗した．原因の 1 つとして考えられるのが，集団座標のとり方の違いである．実は，我々のとった集団座標は，通常 Skyrme model でとられるものと異なる．この事実を見ておこう．

酒井・杉本模型では $\mathcal{A} \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \pm\infty$) ゲージと $\mathcal{A}_z = 0$ ゲージとの差として WZW 項が現れる：

$$\omega_5(A) = \omega_5(A^g) - \underbrace{\text{tr}(ig dg^{-1})^5}_{\text{WZW 項}} + d\alpha_4 \quad (4.4.53)$$

$$g(t, x)^{-1} \equiv \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^z dz' A_z(\mathbf{x}, z', t) \right) \quad (4.4.54)$$

この $g(t, x)^{-1}$ が WZW 項におけるパイオン場 $U(\mathbf{x}, t, s)$ に対応するとみなしていた。また、5次元目の座標は z と解釈されている。しかし、(4.4.20)における g^{-1} の振る舞いは

$$g(t, x)^{-1} = W(t)g_{\text{cl}}(x)^{-1}W(t)^{-1}, \quad (4.4.55)$$

$$g_{\text{cl}}(x)^{-1} \equiv \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^z dz' A_z^{\text{cl}}(\mathbf{x}, z') \right) \quad (4.4.56)$$

となる。 $W(t)$ は時間のみの関数であるから、 Skyrme model におけるパイオン場の振る舞い (B.3.8) とは異なっている。実際、この $g(t, x)$ を WZW 項に代入しても拘束項は出てこない。それを確認しておこう。今、

$$g_{\text{cl}}(x) = \exp \left(iH(r, z) \hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau} \right), \quad (4.4.57)$$

$$H(r, z) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \left(\arctan \frac{z}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} + \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.4.58)$$

と書ける。このとき、

$$\begin{aligned} -ig\partial_0 g^{-1} &= W \left[g_{\text{cl}}(-iW^{-1}\dot{W})g_{\text{cl}}^{-1} + iW^{-1}\dot{W} \right] W^{-1}, \\ -ig\partial_M g^{-1} &= WL_M^{\text{cl}}W^{-1}, \end{aligned} \quad (4.4.59)$$

となるから、

$$\text{tr}(-igdg^{-1})^5 = 5 \text{tr} \left(-iW^{-1}\dot{W} \left[(-ig_{\text{cl}}\partial_M g_{\text{cl}}^{-1}dx^M)^4 - (-ig_{\text{cl}}^{-1}\partial_M g_{\text{cl}}dx^M)^4 \right] \right) \quad (4.4.60)$$

を得る。実際に g_{cl} (4.4.57) を代入すると

$$(-ig_{\text{cl}}\partial_M g_{\text{cl}}^{-1}dx^M)^4 = (-ig_{\text{cl}}^{-1}\partial_M g_{\text{cl}}dx^M)^4 = 0 \quad (4.4.61)$$

となることが分かる。従って、確かに WZW 項からも拘束項は現れない。

4.4.5 CS 項の見直し

前節では、我々の用いた集団座標が Skyrme model のそれに対応していないことをみた。特に、 $SU(3)$ 回転を表す $W(t)$ が ‘5次元目の座標’ z に依存していないところが大きな違いだといえよう。しかし、単に W に z 依存性を持たせるだけでは解決しない。こうしたところで、パイオン場 $g(x)$ は (B.3.8) の様には振舞わない

New CS action

ここでは、この問題を解決するため、新たに‘6次元目の座標’ s を導入し、これをWZW項の‘5次元目の座標’となるようにする。具体的には、ゲージ場に‘第6成分’ A_s を導入し、

$$\mathcal{A}(t, x, s) = \mathcal{A}_0(t, x, s)dt + \mathcal{A}_M(t, x, s)dx^M + \mathcal{A}_s(t, x, s)ds, \quad (4.4.62)$$

と書く。さらに、5次元のCS項 $\int_{M_5} \omega_5(\mathcal{A})$ も6次元の作用：

$$S_{\text{CS}}^{\text{new}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} \text{tr} \mathcal{F}^3, \quad (4.4.63)$$

で置き換える。6次元のトポロジー M_6 を $D_2 \times M_4$ とする。図 4.1 のように D_2 は s, t で表され、 $s \in [1, 0]$ はその半径で、 t は角度を表し周期的であるとする。また、 $s = 1$ は D_2 の中心とし、図 4.2 のように $s = 0$ は元々の M_5 となるようにする。つまり、 \mathcal{A}_s 以外の成分に関して、

$$\mathcal{A}(t, x, s = 0) = \mathcal{A}(t, x), \quad (4.4.64)$$

という条件を課す。また、 M_4 の座標は x^M である。こういった構成は [18] での WZW 項の構成に倣っている。

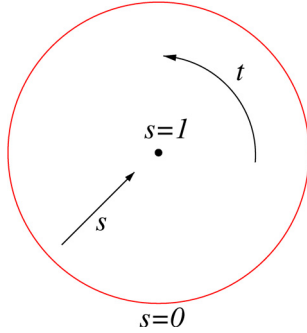


図 4.1: D_2

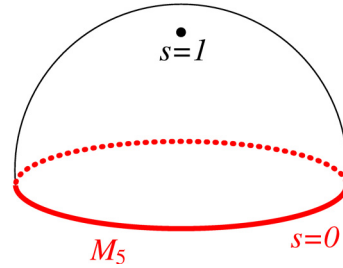


図 4.2: M_6

このとき、作用は次のように書ける。

$$S = S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}}^{\text{new}} \quad (4.4.65)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} = & -\kappa \int d^4x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} \kappa \int d^4x dz \left(\frac{1}{2} h(z) \widehat{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \widehat{F}_{\mu z}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.4.66)$$

$$S_{\text{CS}}^{\text{new}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} \text{tr} \mathcal{F}^3 \quad (4.4.67)$$

古典解

今,

$$\text{tr } \mathcal{F}^3 = d\omega_5(\mathcal{A}) \quad (4.4.68)$$

となるから, EOMは前と変わらず(4.4.6)-(4.4.9)で与えられる. 従って, BPST instanton 解(4.4.16)もこの作用の古典解である. ところが, $s \neq 0$ については, EOMからは何も決まらない. そこで, 古典解の s 依存性を次のように仮定しよう.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{\text{cl}} &= W(s)\mathcal{A}_0^{\text{cl}}(x, s; X^\alpha(s))W(s)^{-1}, \\ \mathcal{A}_M^{\text{cl}} &= W(s)\mathcal{A}_M^{\text{cl}}(x; X^\alpha(s))W(s)^{-1}, \\ \mathcal{A}_s^{\text{cl}} &= -iW(s)\partial_s W(s)^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.69)$$

$$\mathcal{A}_0^{\text{cl}}|_{s=0} = \mathcal{A}_0^{\text{cl}}(x; X^\alpha), \quad \mathcal{A}_M^{\text{cl}}|_{s=0} = \mathcal{A}_M^{\text{cl}}(x; X^\alpha) \quad (4.4.70)$$

$$\mathcal{A}_0^{\text{cl}}(x, s=1) = 0, \quad [\mathcal{A}_0^{\text{cl}}(x, s), g(x)] = 0 \quad (4.4.71)$$

ここに, $\mathcal{A}^{\text{cl}}(x; X^\alpha)$ は(4.4.16)で与えられる. こうすることで,

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}^{\text{new}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}(x, s; X^\alpha(s))] &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} \text{tr}(\mathcal{F}^{\text{cl}})^3 = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} d\omega_5(\mathcal{A}^{\text{cl}}) \\ &= \frac{N_c}{24\pi^2} \left(\int_{s=0} - \int_{s=1} \right) \omega_5(\mathcal{A}^{\text{cl}}) \\ &= S_{\text{CS}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}(x; X^\alpha)] \end{aligned} \quad (4.4.72)$$

となり, 元の作用の値, つまりバリオンの質量を再現する.

4.4.6 6次元での集団座標

前小節の古典解からの揺らぎとして, 次のように集団座標を取る^{*6)}.

$$\mathcal{A}(t, x, s) = (\mathcal{A}^{\text{cl}}(x, s; X^\alpha(t, s)) + \Phi(t, x, s)dt + \Psi(t, x, s)ds)^{W(t, s)}. \quad (4.4.73)$$

ただし, $s=0$ では M_5 での集団座標になるとする:

$$W(t, s=0) = W(t), \quad X^\alpha(t, s=0) = X^\alpha(t), \quad \Phi(t, x^M, s=0) = \Phi(t, x) \quad (4.4.74)$$

今, $\delta\mathcal{A} = \Phi dt + \Psi ds$ とおくと,

$$\mathcal{F}(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A}) + D\delta\mathcal{A} + i(\delta\mathcal{A})^2, \quad (4.4.75)$$

である. ここに, $D\delta\mathcal{A} = d\delta\mathcal{A} + i(\mathcal{A}\delta\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\mathcal{A})$.

^{*6)} Ψ は singular ゲージのゲージ場を $\xi \rightarrow \infty$ で regular とするために導入した.

ここで, $(\delta\mathcal{A})^3 = (D\delta\mathcal{A})(\delta\mathcal{A})^2 = D\mathcal{F} = 0$ と $D^2\delta\mathcal{A} = i[\mathcal{F}, \delta\mathcal{A}]$ を用いれば,

$$\text{tr } \mathcal{F}(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})^3 = \text{tr } \mathcal{F}(\mathcal{A})^3 + 3 d \text{tr} \left(\delta\mathcal{A} \mathcal{F}(\mathcal{A})^2 + \delta\mathcal{A} (D\delta\mathcal{A}) \mathcal{F}(\mathcal{A}) \right), \quad (4.4.76)$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}^{\text{new}}[\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\text{cl}} + \Phi dt + \Psi ds)^W] - S_{\text{CS}}^{\text{new}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}] &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} 3 d \text{tr} \left(\delta\mathcal{A} (\mathcal{F}^{\text{cl}})^2 + \delta\mathcal{A} (D^{\text{cl}}\delta\mathcal{A}) \mathcal{F}^{\text{cl}} \right) \\ &= \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{M_5} \text{tr}(\Phi dt (F^{\text{cl}})^2) = -\frac{N_c}{2\sqrt{3}} \int dt \chi^8(t), \end{aligned} \quad (4.4.77)$$

すなわち,

$$L_{\text{CS}} = -\frac{N_c}{2\sqrt{3}} \chi^8(t) = -\frac{N_c}{\sqrt{3}} \text{tr}(-iW(t)^{-1}\dot{W}(t)t_8). \quad (4.4.78)$$

を得る. これはまさにバリオンを記述するために必要な拘束項に他ならない. 結局, 得られた lagrangian は,

$$L = -M_0 + L_{\text{YM}} - \frac{N_c}{\sqrt{3}} \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_8) \quad (4.4.79)$$

ここに, L_{YM} は (4.4.35) で与えられる.

4.4.7 量子化

前節で得た lagrangian をもとに集団座標の量子化を行う. ただし, 重心座標 \mathbf{X} については考えないことにする. lagrangian から hamiltonian を導くと,

$$H = M_0 + H_Z + H_\rho + H_{\rho W}, \quad (4.4.80)$$

となる. ここに,

$$H_Z = -\frac{1}{2m_Z} \partial_Z^2 + \frac{1}{2} m_Z \omega_Z^2 Z^2, \quad (4.4.81)$$

$$H_\rho = -\frac{1}{2m_\rho} \frac{1}{\rho^\eta} \partial_\rho (\rho^\eta \partial_\rho) + \frac{1}{2} m_\rho \omega_\rho^2 \rho^2 + \frac{K}{m_\rho \rho^2}, \quad (4.4.82)$$

$$H_{\rho W} = \frac{1}{2\mathcal{I}_1(\rho)} \sum_{a=1}^3 (J_a)^2 + \frac{1}{2\mathcal{I}_2(\rho)} \sum_{a=4}^7 (J_a)^2. \quad (4.4.83)$$

である. $N_f = 2$ の場合には $\eta = 3$ としていたが, これは $SU(2)$ の座標 \mathbf{a} と ρ とで S^4 を表すとみなしたためである. 今の $N_f = 3$ の場合では $\eta = 8$ とするのが自然と思われるが, ひとまずは特に η を限定せずに解析を行う.

J_a は W の右変換に対する Neother charge で,

$$J_a = 2\mathcal{I}_1(\rho) \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) = \mathcal{I}_1(\rho) \chi^a(t) \quad (4.4.84)$$

と表される. Appendix A.15 より,

$$[J_a, W] = W t_a, \quad [J_a, J_b] = i f_{abc} J_c. \quad (4.4.85)$$

を満たすことが分かる. ただし, 系は (J_1, J_2, J_3) からなる $SU(2)$ 部分群と J_8 の下でのみ不変であることに注意しよう. この $SU(2)$ 部分群は空間回転に他ならない.

また, W の左変換 $SU(3)_I$ に対しては不変であり, Noether charge I_a は

$$I_a = -2\mathcal{I}_1(\rho) \operatorname{tr}(-i\dot{W}W^{-1}t_a) \quad (4.4.86)$$

と書け,

$$[I_a, W] = -t_a W, \quad [I_a, I_b] = i f_{abc} I_c, \quad [I_a, J_b] = 0. \quad (4.4.87)$$

を満たす.

そして, $I = I_a t_a$ と $J = J_a t_a$ とに対して $I = -W J W^{-1}$ が成り立つから, $\operatorname{tr} I^2 = \operatorname{tr} J^2$, $\operatorname{tr} I^3 = -\operatorname{tr} J^3$ となる. 従って, 得られる量子状態は $SU(3)_I$ と $SU(3)_J$ との互いに複素共役な表現に属している. また, L_{CS} にあった拘束項により第1類拘束条件:

$$J_8 = -\frac{N_c}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.4.88)$$

が量子状態には課されている.

バリオンスペクトル

まず, $H_{\rho\text{tot}} = H_\rho + H_{\rho W}$ を考えよう. $SU(3)_I$ の (p, q) 表現に対しては,

$$\sum_{a=1}^8 (J_a)^2 = \frac{1}{3} (p^2 + q^2 + pq + 3(p+q)), \quad (4.4.89)$$

$$\sum_{a=1}^3 (J_a)^2 = j(j+1), \quad (4.4.90)$$

となる. このとき,

$$H_{\rho\text{tot}}^{(p,q)} = H_\rho + H_{\rho W}^{(p,q)} = -\frac{1}{2m_\rho} \frac{1}{\rho^\eta} \partial_\rho (\rho^\eta \partial_\rho) + \frac{1}{2} m_\rho \omega_\rho^2 \rho^2 + \frac{K'}{m_\rho \rho^2}, \quad (4.4.91)$$

ここに,

$$K' = \frac{N_c^2}{15} + \frac{4}{3} (p^2 + q^2 + pq + 3(p+q)) - 2j(j+1). \quad (4.4.92)$$

である.

つまり、問題は

$$H_{\rho\text{tot}}^{(p,q)}\psi(\rho) = E_{\rho W}^{(p,q)}\psi(\rho). \quad (4.4.93)$$

なる Schrödinger 方程式を解くことに帰着された。この方程式は

$$\psi(\rho) = e^{-z/2}z^\beta v(z), \quad (4.4.94)$$

$$z = m_\rho\omega_\rho\rho^2, \quad \beta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{(\eta-1)^2 + 8K'} - (\eta-1)\right), \quad (4.4.95)$$

を用いることで合流型超幾何微分方程式：

$$\left\{ z\frac{d^2}{dz^2} + \left(2\beta + \frac{\eta+1}{2} - z\right)\frac{d}{dz} + \left(\frac{E_{\rho W}^{(p,q)}}{2\omega_\rho} - \beta - \frac{\eta+1}{4}\right) \right\} v(z) = 0. \quad (4.4.96)$$

となる。正則で規格化可能な解は $E_{\rho W}^{(p,q)}/(2\omega_\rho) - \beta - (\eta+1)/4 = n_\rho = 0, 1, 2, 3, \dots$ が成り立つときにのみ存在する。すなわち、 $H_{\rho\text{tot}}$ の固有値は

$$E_{\rho W}^{(p,q)} = \omega_\rho \left(2n_\rho + \frac{1}{2}\sqrt{(\eta-1)^2 + 8K'} + 1 \right). \quad (4.4.97)$$

で与えられる。

次に、 H_Z の固有値 E_Z を求めよう。 H_Z は調和振動子の hamiltonian に他ならないから、その固有値は

$$E_Z = \omega_Z \left(n_Z + \frac{1}{2} \right), \quad (n_Z = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.4.98)$$

となる。

従って、バリオンの質量は次式で与えられる。

$$M_{(p,q)} = M_0 + \sqrt{\frac{(\eta-1)^2}{24} + \frac{K'}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}(n_\rho + n_Z + 1). \quad (4.4.99)$$

(p, q) の組を指定すれば K' が決まり、

$$\begin{aligned} (p, q) = (1, 1), \quad j = \frac{1}{2}, \quad K' = \frac{111}{10}, \quad (\text{octet}) \\ (p, q) = (3, 0), \quad j = \frac{3}{2}, \quad K' = \frac{171}{10}, \quad (\text{decuplet}) \\ (p, q) = (0, 3), \quad j = \frac{1}{2}, \quad K' = \frac{231}{10}, \quad (\text{anti-decuplet}). \end{aligned} \quad (4.4.100)$$

これらを (4.4.99) に代入すればバリオンの質量が求まる。

4.4.8 実験値との比較

この節では $\eta = 8$ として, 前節で得られた質量公式を実験値と比較する. 同じ (n_ρ, n_Z) を持つバリオンに対しては,

$$M_{10} - M_8 = 0.386208, \quad (4.4.101)$$

$$M_{10^*} - M_8 = 0.724987. \quad (4.4.102)$$

となる.

今, このモデルでは quark に質量が入っていないことを考えると, 比較すべきバリオンはストレンジ quark を含まないものにとるべきであろう. そこで, 実験値 $M_{10}^{\text{exp}} - M_8^{\text{exp}} = (1232 - 940) \text{ MeV} = 292 \text{ MeV}$ に合わせるためには,

$$M_{\text{KK}} = 756 \text{ MeV}. \quad (4.4.103)$$

ととるのが良いことが分かる. 一方, ρ メソンの質量を再現するようにすると $M_{\text{KK}} = 949 \text{ MeV}$ となり, 今の値はそれよりも小さくなった. しかし, $N_f = 2$ の $M_{\text{KK}} \simeq 500 \text{ MeV}$ と比べると大きい.

第5章 まとめと展望

本修士論文では、ホログラフィック QCD の1つである酒井・杉本模型から導かれるメソン (3章) やバリオン (4章) について紹介した。上で挙げた以外にも様々な試みがあるので、ここで簡単に紹介しておく。

5.1 Glueball

フレーバーの足を持たないことから、graviton や dilaton などの閉弦が glueball に対応すると考えられる。ところが、本論文で用いたプローブ近似という手法では、D8 ブレインによる back reaction を考慮していないため、glueball のスペクトルは D4 background によって決まる。従って、この手法では quark を入れるというこの模型の利点は全く反映されず、pure YM 理論ですでに得られた結果 [43] と同じである。一方、glueball とメソンとの相互作用は D8 ブレインの作用で計量や dilaton の fluctuation を考えることで記述できる [44]。

5.2 Quark mass

4章でも述べたように、quark に質量を与えることができれば、パイオンの質量やバリオンの mass splitting をみることができると期待される。酒井・杉本模型を deform することでこの目的を果たそうという研究がいくつかある。[39] では S^4 上に instanton があるような真空を考え、その上でモード展開を行うと確かにパイオンが massive になること (massless モードが存在しないこと) を示した。ところが、パイオン場の作用を chiral perturbation theory と比較してみると、カイラル対称性を破ったのは quark の4点相互作用などで、mass term ではないことが分かった。また、[41, 42] では $8\bar{8}$ string の非自明な配位を真空として選ぶことで、quark に質量を与えられたと報告がなされている。

5.3 問題と展望

3.2.1 節で述べたように、SUGRA 近似が有効であるための二つの条件 $R \gg l_s^{-2}$, $U_{\text{crit}} \gg U_{\text{KK}} (\Leftrightarrow g_s \ll 1)$ がそれぞれ $\lambda \gg 1$, $N_c \gg 1$ に対応していた。しかし、もちろん QCD におい

てはこれらの量は有限である。 $1/\lambda$, $1/N_c$ の補正を見たければそれぞれ g_s , α' の補正を見ていくことが必要となるが、現在のところこういった補正を評価するのは一般には技術的に大変困難であるとされる。

3.1 節にあるように、QCD が再現されるのは M_{KK} 以下の scale である。これより大きな scale では KK モードを含んだ別の理論になっていると考えられる。従って、我々の得たメソンやバリオンの質量も M_{KK} 以下のものしか本来信頼できないものである。これを解決するには、 M_{KK} を QCD の scale よりも十分大きくとる必要がある。ところが、我々の行った解析では $1/\lambda$ 展開の leading しか考慮しておらず、例えば ρ メソンの質量 m_ρ などは M_{KK} の定数倍であった。どうしても M_{KK} を大きくしたければ、まず $1/\lambda$ 展開の高次の項を評価していき、 m_ρ を λ と M_{KK} の関数で表した上で $m_\rho = 776\text{MeV}$ を再現するように λ を調節しながら M_{KK} を大きくしていかなければならない。

プローブ近似についても、この近似が成り立つためには $N_f \ll N_c$ が必要であったが、我々が扱ってきた $N_f = 2, 3$ などはこの近似が有効であるかどうか分からない。しかし、この近似は格子 QCD で行われるクエンチ近似に対応しており、経験的観点からある程度上手くいくのでは、と期待することも出来る。 N_f/N_c の補正を見るには D8 ブレインからの back reaction を評価すればよいが、そもそも N_f/N_c という比較的大きな量を‘補正’として扱うことがどれ程有効か、著者には良く分からない。理想としては、D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ system に対応した SUGRA の解を見つけ、そこでの閉弦の物理を解析できれば良いのだが、肝心の解を見つけることはそれ程容易とは思えない。

この他にも、化学ポテンシャルの定義 (3.7 節) やバリオン解における高階微分項の寄与 (4.2 節)、4次元カレントの定義 (4.3 節) など、様々な課題が残されている。

以上色々と述べてきたが、QCD の非摂動的性質が、本文中にあるような初等的な手計算で求まることは、この模型の最大の魅力だと言えよう。また、ゲージ/重力対応のほとんど全般に対して言えることだが、低次元の場の理論が高次元の重力理論と対応しているという点は、次元に対する我々の考えに新しい知見を与えてくれる。今後技術面の発展によりここで挙げた様々な問題が解決され、ハドロン物理をより正確に記述できるようになることが期待されており、著者もそれに貢献したいと思っている。

第6章 謝辞

修論関係の書類は全て九後先生に目を通していただき、感謝しております。特にアブストの英文では1語1語にまで徹底して指導していただいたので、大変勉強になりました。研究にあたっては、共同研究者の畑氏による激しい叱咤激励に大変刺激を受けました。同じく共同研究者の山戸氏との議論や計算レースも、貴重な経験となりました。研究会やメールなどでは江口先生や杉本氏、酒井氏と議論させていただき、たくさんのお話を教わりました。議論を通して研究がそれ以前よりは洗練されたものになったと感じており、とてもうれしく思います。

ゼミでは場の理論を静谷先生、佐々木(隆)先生、青山先生に、超対称性理論については高柳先生、小林先生に、弦理論に関しては植松先生、杉山先生による指導の下、同回生達と活発に議論を交わすことができました。国友先生や川合先生、福間先生、笹倉先生、畑先生による場の理論の講義では、素粒子の世界を語る上で重要な‘言葉’を教えてくださいました。大野木先生の講義では、LHCで期待が高まる素粒子の現象論の話をお聞かせいただきました。井澤先生による指導の下、基研の小川君やM1の学生と宇宙論についても勉強させていただきました。菅沼先生や国広先生による原子核理論の講義では、ホログラフィックQCDで調べるべきQCDの物理について丁寧に教えてくださいました。また、Dブレーンについては高柳先生や寺島先生に熱心に指導していただきました。こういった方々の指導の下で充実した2年間を過ごすことが出来たことを幸せに思います。

平素の研究生活においては、寺島先生やポストドクの木村さん、倉知さん、藤さん、森田さん、セシリアさんなどと談話室でよく議論や談笑をさせていただきました。太田さん、西岡さん、笹井さん、徳永さん、平田さんを初めとする先輩方は僕の執拗な質問にいつも答えてくださいました。ゼミで議論してくれた同回生、質問に来てくれた後輩達のお陰で、自分の理解を深めることが出来ました。東さんには、談話室の掃除中であるにも関わらず、嫌な顔もせず僕の長話に付き合ってくださいました。麗しき秘書のお姉さまたちには、お茶会の企画をしていただいたり、イベントのある度にお手伝いをさせていただき、その際にはいつも楽しく会話させていただきました。図書室の笑顔が素敵な美人司書3姉妹とは、本を借りる度に小一時間世間話に付き合ってくださいました。皆様のお陰でこの1年を乗り切り、艱難辛苦を乗り越え、修論を書くことができたことを、心から感謝しております。

付録 A 本文に載せなかった詳細

A.1 (2.2.7) の導出

一般の場合として、 d 次元時空中の p ブレインを考える。ここで、途中で用いる便利な公式をここで挙げておく。

$\bar{g}_{MN} = e^A g_{MN}$ に対して、

$$e^A \bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(\nabla A)^2 - (d-1)\nabla^2 A \quad (\text{A.1.1})$$

$$e^A \bar{\nabla}^2 \phi = \nabla^2 \phi + \frac{1}{2}(d-2)\nabla_M A \nabla^M \phi \quad (\text{A.1.2})$$

ここに ϕ は scalar 場。

今、 A, B, ϕ を ρ, σ を用いて以下のように表す。

$$\begin{aligned} A &= a_\rho \rho + a_\sigma \sigma \\ B &= b_\rho \rho + b_\sigma \sigma \\ \phi &= c_\rho \rho + c_\sigma \sigma \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

ρ, σ に以下のような性質を求める。

1. Einstein-Hilbert 作用が ρ, σ を含まない。 → 2
2. ρ, σ の運動項が規格化されている。 → 3
3. $|F|^2$ にかかるのは ρ だけ。 → 1

右の数字は各条件から得られる条件式の数を表している。6つの係数に対して6つの条件があるので、全て一意的に決まる。そこで、作用 (2.2.2) を ρ, σ を用いて表してみよう。まず、metric (2.2.6) を

$$ds^2 = e^B d\hat{s}^2 = e^B (e^{A-B} d\hat{s}^2 + dx_i^2) \quad (\text{A.1.4})$$

と表す。ただし、本文中と同じく x^i 方向の一様等方性を仮定する。このとき、公式 (A.1.1), (A.1.2) から

$$e^B \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)e^{B-A}(\hat{\nabla} B)^2 - (d-1)e^{B-A}\hat{\nabla}^2 B$$

$$-\frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)e^{B-A}\hat{\nabla}_\mu(A-B)\hat{\nabla}^\mu B \quad (\text{A.1.5})$$

$$e^{A-B}\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)\left(\hat{\nabla}(A-B)\right)^2 - (d-p-1)\hat{\nabla}^2(A-B) \quad (\text{A.1.6})$$

従って,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}e^{-2\phi}\mathcal{R} &= \sqrt{-\hat{g}}e^{(-2\phi+\frac{1}{2}(d-p-2)A+\frac{p}{2}B)} \left[\hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)\left(\hat{\nabla}(A-B)\right)^2 \right. \\ &\quad - (d-p-1)\hat{\nabla}^2(A-B) - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(\hat{\nabla}B)^2 - (d-1)\hat{\nabla}^2B \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)\hat{\nabla}_\mu(A-B)\hat{\nabla}^\mu B \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

これから, 条件1は次のように書かれる.

$$-2\phi + \frac{1}{2}(d-p-2)A + \frac{p}{2}B = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

また, この式を用いれば,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}e^{-2\phi}\mathcal{R} &= \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)\left(\hat{\nabla}(A-B)\right)^2 - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(\hat{\nabla}B)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)\hat{\nabla}_\mu(A-B)\hat{\nabla}^\mu B \right] + \text{全微分項} \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

従って, 全微分項を除くと

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}e^{-2\phi}(\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2) &= \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{\mathcal{R}} + 4(\hat{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)\left(\hat{\nabla}(A-B)\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(\hat{\nabla}B)^2 - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)\hat{\nabla}_\mu(A-B)\hat{\nabla}^\mu B \right] \\ &= \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{\mathcal{R}} + C_{\rho\rho}(\hat{\nabla}\rho)^2 + C_{\rho\sigma}\hat{\nabla}_\mu\rho\hat{\nabla}^\mu\sigma + C_{\sigma\sigma}(\hat{\nabla}\sigma)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

ここに,

$$\begin{aligned} C_{\rho\rho} &= 4c_\rho^2 - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)(a_\rho - b_\rho)^2 - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)b_\rho^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)(a_\rho - b_\rho)b_\rho \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

$$\begin{aligned} C_{\rho\sigma} &= 8c_\rho c_\sigma - \frac{1}{2}(d-p-1)(d-p-2)(a_\rho - b_\rho)(a_\sigma - b_\sigma) - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)b_\rho b_\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)((a_\rho - b_\rho)b_\sigma + (a_\sigma - b_\sigma)b_\rho) \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

$$C_{\sigma\sigma} = 4c_\sigma^2 - \frac{1}{4}(d-p-1)(d-p-2)(a_\sigma - b_\sigma)^2 - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)b_\sigma^2 - \frac{1}{2}(d-1)(d-p-2)(a_\sigma - b_\sigma)b_\sigma \quad (\text{A.1.13})$$

ここで、条件2は、

$$C_{\rho\rho} = C_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2}, \quad C_{\rho\sigma} = 0 \quad (\text{A.1.14})$$

と書ける。

最後に、条件3を考える。

$$\sqrt{-g}|F_{d-p-2}|^2 = \sqrt{-\hat{g}}e^{((-\frac{d-p}{2}+2)A+\frac{p}{2}B)}|F_{d-p-2}|^2 \quad (\text{A.1.15})$$

ここで、RHS と LHS の $|F|^2$ では縮約をとるときの metric が異なることに注意されたい。従って、条件3は次のように書ける。

$$pb_\sigma = (d-p-4)a_\sigma \quad (\text{A.1.16})$$

後は(A.1.8), (A.1.14), (A.1.16)を解けば良い。なお、これ以降は10次元、すなわち $d=10$ の場合を考える。まず、(A.1.8)から、

$$c_i = \frac{(8-p)}{4}a_i + \frac{p}{4}b_i \quad (\text{A.1.17})$$

ここに $i = \rho, \sigma$ 。これに(A.1.16)を代入すると、

$$c_\sigma = \frac{(7-p)}{2}a_\sigma \quad (\text{A.1.18})$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= C_{\sigma\sigma} = -\frac{9-p}{p}a_\sigma^2 \\ \therefore a_\sigma &= \sqrt{\frac{p}{2(9-p)}}, \quad b_\sigma = \frac{6-p}{\sqrt{2p(9-p)}}, \quad c_\sigma = \frac{7-p}{2}\sqrt{\frac{p}{2(9-p)}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

次に、 $C_{\rho\sigma}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= C_{\rho\sigma}/a_\sigma \\ &= (7-p)((8-p)a_\rho + pb_\rho) + (9-p)(8-p)\frac{3-p}{p}(a_\rho - b_\rho) - 36\frac{6-p}{p}b_\rho \\ &\quad - \frac{9}{2}(8-p)\left(\frac{6-p}{p}(a_\rho - b_\rho) - \frac{6-2p}{p}b_\rho\right) \\ \therefore b_\rho &= -\frac{8-p}{6-p}a_\rho, \quad c_\rho = \frac{(8-p)(3-p)}{2(6-p)}a_\rho \end{aligned}$$

そして最後に,

$$-\frac{1}{2} = C_{\rho\rho} = -a_\rho^2 \frac{(8-p)(9-p)}{(6-p)^2}$$

$$\therefore a_\rho = \frac{6-p}{\sqrt{2(8-p)(9-p)}}, \quad b_\rho = -\sqrt{\frac{8-p}{2(9-p)}}, \quad c_\rho = \frac{3-p}{2} \sqrt{\frac{8-p}{2(9-p)}} \quad (\text{A.1.20})$$

(A.1.19) と (A.1.20) から (2.2.7) が再現される.

A.2 Ricci scalar の導出

ここでは Dp ブレイン解の Ricci scalar を導出する. (A.1.7) から Ricci scalar を導出する. これによると, Ricci scalar は

$$\mathcal{R} = e^{-A} \left[\hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{4}(9-p)(8-p) \left(\hat{\nabla}(A-B) \right)^2 - (9-p) \hat{\nabla}^2(A-B) - 18(\hat{\nabla}B)^2 \right. \\ \left. - 9\hat{\nabla}^2B - \frac{9}{2}(8-p) \hat{\nabla}_\mu(A-B) \hat{\nabla}^\mu B \right] \quad (\text{A.2.1})$$

と書ける. ここで, (A.1.10) と (A.1.14) から導ける関係

$$\frac{1}{4}(9-p)(8-p) \left(\hat{\nabla}(A-B) \right)^2 - 18(\hat{\nabla}B)^2 - \frac{9}{2}(8-p) \hat{\nabla}_\mu(A-B) \hat{\nabla}^\mu B \\ = -4(\hat{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\rho)^2 \quad (\text{A.2.2})$$

を用いると, Ricci scalar は

$$\mathcal{R} = e^{-A} \left[\hat{\mathcal{R}} - 4(\hat{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\rho)^2 - (9-p) \hat{\nabla}^2(A-B) - 9\hat{\nabla}^2B \right] \quad (\text{A.2.3})$$

と表される.

そこで, まず \hat{R} を計算しよう. 本文中に求めた解を用いれば, 次の式が導かれる.

$$e^{\beta\rho} R^{-2(8-p)} = U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}} \quad (\text{A.2.4})$$

これを (2.2.19)-(2.2.21) に代入すると,

$$\hat{\mathcal{R}}_t^t = -\frac{7-p}{2(8-p)} Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\hat{r}}^{\hat{r}} = -\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\rho)^2 - \frac{7-p}{2(8-p)} (g_s^{-1}Q)^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}}$$

$$\hat{\mathcal{R}}^a = \frac{1}{2(8-p)} (g_s^{-1}Q)^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}}$$

従って,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} = & -\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\rho)^2 + \frac{p-6}{2(8-p)} (g_s^{-1}Q)^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}} \\ & + \frac{(9-p)(7-p)^2}{4(8-p)} R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} U^{-2(8-p)} f(U) H(U)^{\frac{2p-17}{8-p}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

これを見ると, 第1項の $(\hat{\nabla}\rho)^2/2$ は (A.2.3) 第3項と相殺することが分かる.

次に, 第2項 $-4(\hat{\nabla}\phi)^2$ を計算しよう. $\phi = ((p-3)/2\beta)\rho$ から,

$$-4(\hat{\nabla}\phi)^2 = -4\hat{g}^{\hat{r}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{r}} \frac{p-3}{2\beta} \rho \right)^2 = -\frac{(p-3)^2(7-p)^2}{4} R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} U^{-2(8-p)} f(U) H(U)^{\frac{2p-17}{8-p}} \quad (\text{A.2.6})$$

を得る.

先述のように第3項 $-(\hat{\nabla}\rho)^2/2$ は \mathcal{R} の一部と相殺するので, あえて計算しない.

最後に, 第4項+第5項:

$$(9-p)\hat{\nabla}^2(A-B) + 9\hat{\nabla}^2B$$

を計算しよう.

$$\hat{\nabla}^2(A-B) = -\frac{7-p}{8-p} Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}} \quad (\text{A.2.7})$$

$$\hat{\nabla}^2B = \frac{1}{2} Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}} \quad (\text{A.2.8})$$

従って,

$$(9-p)\hat{\nabla}^2(A-B) + 9\hat{\nabla}^2B = \left(-\frac{(9-p)(7-p)}{8-p} + \frac{9}{2} \right) Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{2p-17}{8-p}} \quad (\text{A.2.9})$$

以上の計算結果を (A.2.3) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \left[(3-p)(R_{\text{Dp}}U_{\text{KK}})^{7-p} + \frac{(3-p)(p+1)}{4} R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} \right. \\ & \left. + \frac{(3-p)^2}{4} R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} U_{\text{KK}}^{7-p} U^{-(7-p)} \right] (7-p)^2 U^{-2(8-p)} H^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

A.3 作用の評価

有限温度・有限密度において相転移などを扱う折には作用の値を比較することがしばしばある。そこでこの Appendix では D ブレイン解の作用を評価する。考える作用は, (2.2.2) ;

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2} |F_{8-p}|^2 \right] \quad (\text{A.3.1})$$

である*¹⁾。各項を順次評価していこう。

まず \mathcal{R} だが, これはすでに Appendix A.2 で求めてある。

次に, $4(\nabla\phi)^2$ を考えよう。計量 (2.2.6) から,

$$4(\nabla\phi)^2 = \frac{(p-3)^2(7-p)^2}{4} R_{\text{Dp}}^{2(7-p)} U^{-2(8-p)} f H^{-\frac{5}{2}} \quad (\text{A.3.2})$$

ここに, 2つ目の等号では (A.2.6) をそれぞれ用いた。ここで, (A.2.10) の2つ目の表式から直ちに,

$$e^{-2\phi} (\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2) = (3-p)^2 g_s^{-2} Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{p-8}{2}} \quad (\text{A.3.3})$$

ここに, 2つ目の等号では (2.2.43) を用いた。

最後に, $|F_{8-p}|^2$ は

$$|F_{8-p}|^2 = g_s^{-2} Q^2 U^{-2(8-p)} H^{\frac{p-8}{2}} \quad (\text{A.3.4})$$

さらに, $-g = U^{2(8-p)}$ を用いれば, 作用は

$$S = V_9 \left((3-p)^2 - \frac{1}{2} \right) g_s^{-2} Q^2 \int_{U_0}^{\infty} dU U^{-(8-p)} H^{\frac{p-8}{2}} \quad (\text{A.3.5})$$

ここに, V_9 は U に垂直な方向の体積である。

*¹⁾相転移などを考えるときに我々が最終的に知りたいのは作用の差であって作用の値そのものではない。それゆえ, 作用全体にかかる係数は無視した。

A.4 (3.2.4) の導出

一般に、2次元の計量が定数 A, B を用いて

$$ds_{(r,t)}^2 = \frac{dr^2}{B(r-r_+)} + A(r-r_+)dt^2 \quad (\text{A.4.1})$$

表されていると、 $r = r_+$ で計量が発散するため、singularity があるように見える。しかし、ここで

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\sqrt{B(r-r_+)}} , \quad \rho = \frac{2}{\sqrt{B}} \sqrt{r-r_+} \quad (\text{A.4.2})$$

なる ρ を用いて計量を表すと、

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{AB}{4} \rho^2 dt^2 \quad (\text{A.4.3})$$

従って、もし t が周期的で、その周期が β が

$$\frac{\sqrt{AB}}{2} \beta = 2\pi, \quad \therefore \beta = \frac{4\pi}{\sqrt{AB}} \quad (\text{A.4.4})$$

と表されるなら、この計量は単に disk のそれと同じになり、singularity はない。

今、 (U, x^4) 平面に着目すると、

$$ds_{(U,x^4)}^2 = (UR_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} f(U) (dx^4)^2 + (UR_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}} f(U)^{-1} dU^2 \quad (\text{A.4.5})$$

から、やはり $U = U_{KK}$ に singularity があるように見える。それ以外では明らかに regular なので、 $U \sim U_{KK}$ の領域にクローズアップしよう。この領域では

$$f(U) \simeq \frac{3}{U_{KK}} (U - U_{KK}) \quad (\text{A.4.6})$$

と近似できるから、

$$ds_{(U,x^4)}^2 \simeq (U_{KK} R_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} \frac{3}{U_{KK}} (U - U_{KK}) (dx^4)^2 + (U_{KK} R_{D4}^{-1})^{-\frac{3}{2}} \frac{U_{KK}}{3(U - U_{KK})} dU^2 \quad (\text{A.4.7})$$

となる。これは上の $ds_{(r,t)}^2$ で定数 A, B を

$$A = B = \frac{3}{U_{KK}} (U_{KK} R_{D4}^{-1})^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.4.8})$$

と選んだものに等しい。従って、conical singularity を避けるために選ばれるべき周期 δx^4 は

$$\delta x^4 \equiv 2\pi M_{KK}^{-1} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{D4}^{\frac{3}{2}}}{U_{KK}^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.4.9})$$

これから直ちに (3.2.4) が導かれる。

A.5 $x^4(U)$ の性質

零温度での D8 ブレイン解 $x^4(U)$ の性質についてまとめておく。まず、 $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合を考える。ここでは、極限の取り方に注意を要する。まず、次のような座標を考える。

$$U_0 = (1 + \epsilon)U_{\text{KK}} \quad (\text{A.5.1})$$

$$U = U_{\text{KK}}x, \quad (1 + \epsilon \leq x < x_0 < \infty) \quad (\text{A.5.2})$$

$$x = 1 + \epsilon y, \quad 1 \leq y < \frac{x_0 - 1}{\epsilon} \quad (\text{A.5.3})$$

ここに、 x_0 は cut off として導入した。このとき、

$$f(U) = 1 - x^{-3}, \quad f(U_0) = 1 - (1 + \epsilon)^{-3} = 3\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.5.4})$$

を用いて計算すると、

$$x^4(U)|_{U_0=U_{\text{KK}}(1+\epsilon)} = \frac{\delta x^4}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.5.5})$$

となり、

$$x^4(U)|_{U_0=U_{\text{KK}}} = \frac{\delta x^4}{4} \quad (\text{A.5.6})$$

を得る。

次に、 $U_0 = \infty$ の場合を考えよう。 $U = U_0x$ とおいて計算すると、

$$\lim_{U_0 \rightarrow \infty} x^4_\infty(U_0) = \lim_{U_0 \rightarrow \infty} \mathcal{O}(U_0^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow 0 \quad (\text{A.5.7})$$

となることが直ちに分かる。

A.6 X^4 に対する別の表示

$U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合には、 (U, x^4) よりも次の (r, θ) や (y, z) が有用となる。

$$U^3 = U_{\text{KK}}^3 + U_{\text{KK}}r^2, \quad \theta = \frac{2\pi}{\delta x^4}x^4 \quad (\text{A.6.1})$$

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \quad (\text{A.6.2})$$

$U_0 = U_{\text{KK}}$ となる解は $y = 0$ で表される。そこで、D8 ブレインの集団座標として y を考えよう。上の関係から、 y や x^4 の 1 次で

$$y = \mp z \frac{2\pi}{\delta x^4} X^4 = \mp \frac{3}{2} \left(\frac{U_{\text{KK}}}{R_{\text{D4}}^3} \right)^{\frac{1}{2}} z X^4, \quad X^4 = \mp \frac{2}{3} \left(\frac{R_{\text{D4}}^3}{U_{\text{KK}}} \right)^{\frac{1}{2}} z^{-1} y \quad (\text{A.6.3})$$

$$U = (U_z^3 + U_{\text{KK}}y^2)^{\frac{1}{3}} = U_z + \frac{1}{3}U_{\text{KK}}U_z^{-2}y^2, \quad U_z \equiv U_{\text{KK}}^3 + U_{\text{KK}}z^2 = U_{\text{KK}}^3(1 + Z^2) \quad (\text{A.6.4})$$

これから,

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{2}{3}U_{\text{KK}}U_z^{-2}z, \quad \frac{du_z}{dZ} = \frac{2}{3}u_z^{-2}Z, \quad (\text{A.6.5})$$

$$\partial_U = \frac{dz}{dU_z}\partial_z = \frac{3}{2}U_{\text{KK}}^{-1}U_z^2z^{-1}\partial_z, \quad \partial_u = \frac{3}{2}u_z^2Z^{-1}\partial_Z \quad (\text{A.6.6})$$

$$f_z \equiv f(U_z) = U_z^{-3}U_{\text{KK}}z^2 = u_z^{-3}Z^2 \quad (\text{A.6.7})$$

を得る. y についてのモード展開を $y = \sum_n Y(x)\rho_n(z)$ と書くと, (A.6.3) から

$$\eta_n = \mp \frac{2}{3} \left(\frac{R_{\text{D4}}^3}{U_{\text{KK}}^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_n}{Z} \quad (\text{A.6.8})$$

となる. η_n の規格化条件に代入すると,

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= 2T_8V_4g_s^{-1}R_{\text{D4}}^{\frac{3}{2}}U_{\text{KK}}^{\frac{7}{2}} \int dZ \left(\frac{1}{3}u_z^{-2}Z \right) u_z^{\frac{5}{2}}(u_z^{-3}Z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9}R_{\text{D4}}^3U_{\text{KK}}^{-3}Z^{-2}\rho_n\rho_m \\ &= \frac{8}{27}T_8V_4g_s^{-1}R_{\text{D4}}^{\frac{9}{2}}U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} \int dZ u_z \rho_n \rho_m \\ \alpha_n \rho_n &= -\frac{4}{9}Zu_z^{-\frac{5}{2}}(u_z^{-3}Z^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}u_z^2Z^{-1}\partial_Z \right) \left((u_z^{-3}Z^2)^{\frac{3}{2}}u_z^{\frac{11}{2}} \left(\frac{3}{2}u_z^2Z^{-1}\partial_Z \right) \frac{\rho_n}{Z} \right) \\ &= -u_zZ^{-1}\partial_Z (u_z^3(-\rho_n + Z\partial_Z\rho_n)) \\ &= -u_z(-2\rho_n + \partial_Z(u_z^3\partial_Z\rho_n)) \end{aligned}$$

ここに, 1行目の式で dZ の後の括弧内の係数が $2/3$ でなく $1/3$ となっているのは, U が Z に関して2価であることに起因する. ちなみに, 今まで出てきた関係を用いて S_X を y の作用に書き直すことも出来る.

$$\partial_U X^4 = \frac{3}{2}U_{\text{KK}}^{-1}U_z^2z^{-1}\partial_z \left(\mp \frac{\delta x^4}{2\pi} z^{-1}y \right) = \mp \left(\frac{R_{\text{D4}}^3}{U_{\text{KK}}^3} \right)^{\frac{1}{2}} U_{\text{KK}}^{-1}U_z^2(-z^{-3}y + z^{-2}\dot{y}) \quad (\text{A.6.9})$$

$$(\partial_U X^4)^2 = R_{\text{D4}}^3U_{\text{KK}}^{-3}U_z^4(z^{-6}y^2 - z^{-5}\partial_z(y^2) + z^{-4}\dot{y}^2) \quad (\text{A.6.10})$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int dU R_{\text{D4}}^{-3}U^{\frac{11}{2}} f^{\frac{3}{2}} (\partial_U X^4)^2 \\ &= \frac{1}{2}U_{\text{KK}}^{-3} \int dz \left(\frac{1}{3}U_{\text{KK}}U_z^{-2}z \right) U_z^{\frac{11}{2}} (U_z^{-\frac{9}{2}}U_{\text{KK}}^{\frac{3}{2}}z^3)U_z^4(z^{-6}y^2 - z^{-5}\partial_z(y^2) + z^{-4}\dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{6}U_{\text{KK}}^{-\frac{1}{2}} \int dz U_z^3(z^{-2}y^2 - z^{-1}\partial_z(y^2) + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{6}U_{\text{KK}}^{-\frac{1}{2}} \int dz (U_z^3z^{-2}y^2 + (2U_{\text{KK}} - U_z^3z^{-2})y^2 + U_z^3\dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{3}U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} \int dz \left(y^2 + \frac{U_z^3}{2U_{\text{KK}}} \dot{y}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int dU U^{\frac{5}{2}} f^{\frac{1}{2}} (\partial_\mu X^4)^2 &= \frac{1}{2} \int dz \left(\frac{1}{3} U_{\text{KK}} U_z^{-2} z \right) U_z^{\frac{5}{2}} (U_z^{-\frac{3}{2}} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} z)^{\frac{4}{9}} R_{\text{D4}}^3 U_{\text{KK}}^{-1} z^{-2} (\partial_\mu y)^2 \\ &= \frac{2}{27} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} R_{\text{D4}}^3 \int dz U_z^{-1} (\partial_\mu y)^2\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}S_X &= -2T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{3}{2}} \int d^4 x dz \left[\frac{2}{27} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} R_{\text{D4}}^3 U_z^{-1} (\partial_\mu y)^2 + \frac{1}{3} U_{\text{KK}}^{\frac{1}{2}} \left(y^2 + \frac{U_z^3}{2U_{\text{KK}}} \dot{y}^2 \right) \right] \\ &= -\frac{2}{3} T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{3}{2}} \int d^4 x dz \left[\frac{2}{9} \frac{R_{\text{D4}}^3}{U_z} (\partial_\mu y)^2 + y^2 + \frac{U_z^3}{2U_{\text{KK}}} \dot{y}^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{A.6.11})$$

あるいは, $Z = U_{\text{KK}}^{-1} z$ を用いて

$$\begin{aligned}S_X &= -\frac{8}{27} T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{9}{2}} U_{\text{KK}}^{-1} \int d^4 x dZ \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu y)^2 + \frac{9}{8} \frac{U_{\text{KK}}}{R_{\text{D4}}^3} (2y^2 + u_Z^3 (\partial_Z y)^2) \right] \\ &= -\frac{8}{27} T_8 V_4 g_s^{-1} R_{\text{D4}}^{\frac{9}{2}} U_{\text{KK}}^{-1} \int d^4 x dZ \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu y)^2 + \frac{1}{2} M_{\text{KK}}^2 (u_Z^3 (\partial_Z y)^2 + 2y^2) \right]\end{aligned}\quad (\text{A.6.12})$$

とも書ける.

A.7 (3.4.33) の導出

モード展開を次のように表す.

$$\tilde{A}^g = A_e + A_o \psi_0 \quad (\text{A.7.1})$$

ここに,

$$A_e \equiv \frac{1}{2} (A_+^{U^{-1}} + A_-), \quad A_o \equiv \frac{1}{2} (A_+^{U^{-1}} - A_-) \quad \psi_0 \equiv \psi_+ - \psi_- \quad (\text{A.7.2})$$

$\tilde{A}_Z = 0$ ゲージでは

$$\text{tr}(\tilde{A}^g (\tilde{F}^g)^2) = \text{tr}(\tilde{A}^g (d\tilde{A}^g)^2 + 2(\tilde{A}^g)^3 d\tilde{A}^g) \quad (\text{A.7.3})$$

$$\text{tr}((\tilde{A}^g)^3 \tilde{F}^g) = \text{tr}((\tilde{A}^g)^3 d\tilde{A}^g) \quad (\text{A.7.4})$$

だから,

$$\omega_5(\tilde{A}^g) = \text{tr} \left(\tilde{A}^g (d\tilde{A}^g)^2 + \frac{3}{2} (\tilde{A}^g)^3 d\tilde{A}^g \right) \quad (\text{A.7.5})$$

そこで, 各項の寄与を計算すると,

$$\int_{M_5} \text{tr}(\tilde{A}^g (d\tilde{A}^g)^2) = \int_{M_5} \text{tr}(A_o A_e dA_e - A_e A_o dA_e) \partial_Z \psi_0 dZ$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{M_4} \text{tr}(A_o A_e dA_e - A_e A_o dA_e) \\
&= \frac{1}{2} \int_{M_4} \text{tr} \left((A_+^{U^{-1}} A_- - A_- A_+^{U^{-1}}) d(A_+^{U^{-1}} + A_-) \right) \tag{A.7.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_{M_5} \text{tr}((\tilde{A}^g)^3 d\tilde{A}^g) &= \frac{3}{2} \int_{M_5} \text{tr} \left(A_o A_e^3 \partial_Z \psi_0 dZ + \frac{1}{3} A_o^3 A_e \partial_Z (\psi_0^3) \right) \\
&= \int_{M_5} \text{tr}(3A_o A_e^3 + A_o^3 A_e) \\
&= \frac{1}{2} \int_{M_4} \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_+^{U^{-1}} A_- A_+^{U^{-1}} A_- + (A_+^{U^{-1}})^3 A_- - A_-^3 A_+^{U^{-1}} \right) \tag{A.7.7}
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
\int_{M_5} \omega_5(\tilde{A}^g) &= \frac{1}{2} \int_{M_4} \text{tr} \left[(A_+^{U^{-1}} A_- - A_- A_+^{U^{-1}}) d(A_+^{U^{-1}} + A_-) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} A_+^{U^{-1}} A_- A_+^{U^{-1}} A_- + (A_+^{U^{-1}})^3 A_- - A_-^3 A_+^{U^{-1}} \right] \tag{A.7.8}
\end{aligned}$$

A.8 (3.4.55) の導出

本文中に挙げた定義などを用いて計算していく.

$$\begin{aligned}
\sum_n m_{B^n}^{-2} g_{B^n}^2 \pi\pi &= \left(\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \right)^2 \sum_{n \geq 1} m_{B^n}^{-2} \int dZ dZ' u^{-3} \psi_n u'^{-3} \psi'_n \\
&= \sum_{n \geq 1} m_{B^n}^{-2} \int dZ dZ' (\partial_Z \psi_+) \psi_n (\partial_{Z'} \psi'_+) \psi'_n \\
&= \sum_{n \geq 1} m_{B^n}^{-2} \int dZ dZ' \psi_+ (\partial_Z \psi_n) \psi'_+ (\partial_{Z'} \psi'_n) \\
&= \sum_{n \geq 1} \int dZ dZ' \psi_+ \phi_n \psi'_+ \phi'_n \\
&= \int dZ dZ' \psi_+ \psi'_+ (3(T_F M_{\text{KK}}^2)^{-1} u^{-3} \delta(Z - Z') - \phi_0 \phi'_0) \\
&= 3(T_F M_{\text{KK}}^2)^{-1} \left(\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C^2 \right)^{-1} \int dZ \psi_+^2 \partial_Z \psi_+ \\
&\quad - \left(\frac{1}{3} T_F M_{\text{KK}}^2 C \right)^{-2} \left(\int dZ \psi_+ \partial_Z \psi_+ \right)^2 \\
&= (T_F M_{\text{KK}}^2)^{-1} \int dZ u^{-3} - \frac{3}{4} (T_F M_{\text{KK}}^2)^{-1} \int dZ u^{-3} \\
&= \frac{1}{4} (T_F M_{\text{KK}}^2)^{-1} \int dZ u^{-3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3f_\pi^2} \tag{A.8.1}$$

これから直ちに (3.4.55) が導かれる.

A.9 RR 場の normalization

2章と3章ではRR場の normalization が異なる. 具体的には, 3章のRR場(この Appendix では tilde をつけて \tilde{C}_p と書く.) は1章の C_p と

$$\tilde{C}_{p+1} = \frac{\pi}{\kappa_{10}^2 \mu_{6-p}} C_{p+1} \tag{A.9.1}$$

という関係にある. このとき, Hodge dual : $*dC_{p+1} = dC_{7-p}$ は

$$*d\tilde{C}_{p+1} = \frac{\mu_p}{\mu_{6-p}} d\tilde{C}_{7-p} = (2\pi l_s)^{2(3-p)} dC_{7-p} \tag{A.9.2}$$

と書ける. また, (2.2.1) は

$$\int d\tilde{C}_{7-p} = \frac{\pi}{\kappa_{10}^2 \mu_p} (2\pi l_s)^{7-p} N = 2\pi N \tag{A.9.3}$$

と書ける. そして, RR 場の運動項は

$$\begin{aligned} S_{\text{RR}}^{\text{kin}} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int F_{p+2} \wedge *F_{p+2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \left(\frac{\kappa_{10}^2 \mu_{6-p}}{\pi} \right)^2 \int \tilde{F}_{p+2} \wedge *\tilde{F}_{p+2} \\ &= -\frac{1}{4\pi} (2\pi l_s)^{2(p-3)} \int \tilde{F}_{p+2} \wedge *\tilde{F}_{p+2} \end{aligned} \tag{A.9.4}$$

となる.

A.10 ρ, Z はモジュライ?

前述のように, ρ, Z は質量を持つ. しかしながら, (4.2.51) にあるように, その質量は $\mathcal{O}(\lambda^0)$ である. 一方, その他の massive な揺らぎ (ϕ と書く) は

$$\frac{\delta^2 S_{YM}}{\delta \phi^2} \neq 0 \quad (\text{A.10.1})$$

となるため, 質量は $\mathcal{O}(\lambda^{+1/2})$ となる. この点において ρ, Z は他の massive モードとは一線を画しており, $\lambda \gg 1$ においては零質量モード, すなわちモジュライとみなすことができる.

A.11 (4.2.44) の導出

$\Phi(t, x)$ の導出を行う. (4.2.41) より, Φ を次のように分割できる.

$$\Phi = \Phi_X + \Phi_\rho + \Phi_{SU(2)} \quad (\text{A.11.1})$$

$$D_M^{cl} \left(\dot{X}^N \frac{\partial}{\partial X^N} A_M^{cl} - D_M^{cl} \Phi_X \right) = 0 \quad (\text{A.11.2})$$

$$D_M^{cl} \left(\dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A_M^{cl} - D_M^{cl} \Phi_\rho \right) = 0 \quad (\text{A.11.3})$$

$$D_M^{cl} D_M^{cl} \Phi_{SU(2)} = 0 \quad (\text{A.11.4})$$

A.11.1 Φ_X

解は次式で与えられる.

$$\Phi_X = -\dot{X}^N A_N^{cl} \quad (\text{A.11.5})$$

実際, $(\partial/\partial X^N) A_M^{cl} = -\partial_N A_M^{cl}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \dot{X}^N \frac{\partial}{\partial X^N} A_M^{cl} - D_M^{cl} \Phi_X &= -\dot{X}^N \partial_N A_M^{cl} + \dot{X}^N \partial_M A_N^{cl} + i \dot{X}^N [A_M^{cl}, A_N^{cl}] \\ &= \dot{X}^N F_{MN}^{cl} \end{aligned} \quad (\text{A.11.6})$$

となり, 確かに (A.11.2) を満たす.

A.11.2 Φ_ρ

(4.2.31)にあるように A_M^{cl} の ρ 依存性は $f(\xi)$ のみに入っている。従って,

$$\partial_\rho A_M^{cl} = -\frac{2\rho}{\xi^2 + \rho^2} A_M^{cl} \quad (\text{A.11.7})$$

そして,

$$g\partial_M g^{-1} = \begin{cases} \frac{i}{\xi^2} ((z - Z)\tau^i - \epsilon_{ija}(x^j - X^j)\tau^a) \\ -\frac{i}{\xi^2} (x^a - X^a)\tau^a \end{cases} \quad (\text{A.11.8})$$

$$\partial_M(g\partial_M g^{-1}) \propto (x^M - X^M)g\partial_M g^{-1} = 0 \quad (\text{A.11.9})$$

これらを用いると,

$$D_M^{cl} \dot{\rho} \partial_\rho A_M^{cl} = \partial_M \left(-\frac{2\dot{\rho}\rho}{\xi^2 + \rho^2} A_M^{cl} \right) - \frac{2i\dot{\rho}\rho}{\xi^2 + \rho^2} [A_M^{cl}, A_M^{cl}] = 0 \quad (\text{A.11.10})$$

従って,

$$\Phi_\rho = 0 \quad (\text{A.11.11})$$

としておけば, (A.11.3) は満たされる。

A.11.3 $\Phi_{SU(2)}$

計算を簡単にするため, 次の singular ゲージへ移ろう。

$$\bar{\Phi}_{SU(2)} \equiv g^{-1} \Phi_{SU(2)} g \quad (\text{A.11.12})$$

$$\bar{A}_M \equiv g^{-1} A_M^{cl} g - ig^{-1} \partial_M g = -i(1 - f(\xi))g^{-1} \partial_M g \quad (\text{A.11.13})$$

すると, (A.11.4) は次のようになる。

$$\bar{D}_M^2 \bar{\Phi}_{SU(2)} = 0 \quad (\text{A.11.14})$$

これに対し,

$$\bar{\Phi}_{SU(2)} = \sum_{a=1}^3 \chi^a(t) u^a(\xi) \frac{\tau^a}{2} \quad (\text{A.11.15})$$

という ansatz をおくと, $u(\xi)$ に対する方程式は

$$\frac{1}{\xi^3} \partial_\xi (\xi^3 \partial_\xi u^a(\xi)) = 8 \frac{(1 - f(\xi))^2}{\xi^2} u^a(\xi) \quad (\text{A.11.16})$$

となり, 正則な解は

$$u^a(\xi) = C^a f(\xi) \quad (\text{A.11.17})$$

となる。ただし C^a は任意定数。よって、元のゲージに戻すと、

$$\Phi_{SU(2)} = g\bar{\Phi}_{SU(2)}g^{-1} = \chi^a(t)\Phi_a(x), \quad \Phi_a(x) \equiv f(\xi)g\frac{\tau^a}{2}g^{-1} \quad (\text{A.11.18})$$

従って、

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= \Phi_X + \Phi_\rho + \Phi_{SU(2)} \\ &= -\dot{X}^N A_N^{cl} + 0 + \chi^a(t)\Phi_a(x) \\ &= -\dot{X}^N A_N^{cl} + \chi^a(t)\Phi_a(x) \end{aligned} \quad (\text{A.11.19})$$

となる。今、singular ゲージでのゲージ場は

$$\bar{\mathcal{A}}(t, x^M) = \left(\bar{\mathcal{A}}^{cl}(x^M; X^\alpha(t)) + \bar{\Phi}(t, x^M)dt \right)^{W(t)} \quad (\text{A.11.20})$$

$$\bar{\Phi}(t, x^M) = g(x^M; X^\alpha(t)) (\Phi(t, x^M) - i\partial_0) g(x^M; X^\alpha(t))^{-1} \quad (\text{A.11.21})$$

と表さる。このゲージは無限遠では regular であるべきである。つまり、

$$\bar{\mathcal{A}}_0 = W\bar{\Phi}W^{-1} - iW\partial_0W^{-1} \rightarrow 0 \quad (\text{A.11.22})$$

が必要となる。(A.11.19)を見れば、この条件は

$$\begin{aligned} W\chi^a t_a W^{-1} - iW\partial_0W^{-1} &= 0 \\ \therefore \chi^a &= -2i \text{tr}(t_a W^{-1}\dot{W}) \end{aligned} \quad (\text{A.11.23})$$

となる。こうして、(4.2.44)の導出が出来た。

A.12 (4.4.28)の導出

Φ を

$$\Phi = +\Phi_X + \Phi_\rho + \Phi_{SU(3)} \quad (\text{A.12.1})$$

と書くと、Appendix A.11と同様にして、

$$\Phi_X = -\dot{X}^N A_N^{cl} \quad (\text{A.12.2})$$

$$\Phi_\rho = 0 \quad (\text{A.12.3})$$

また、 $\Phi_{SU(3)}$ に対する方程式は、singular ゲージで

$$\bar{D}_M^2 \bar{\Phi}_{SU(3)} = 0 \quad (\text{A.12.4})$$

これに対し、

$$\bar{\Phi}_{SU(3)} = \sum_{a=1}^8 \chi^a(t) u^a(\xi) t_a \quad (\text{A.12.5})$$

という ansatz をおくと, $u^a(\xi)$ に対する方程式は

$$\frac{1}{\xi^3} \partial_\xi (\xi^3 \partial_\xi u^a(\xi)) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{(1-f(\xi))^2}{\xi^2} u^a(\xi) \quad \left(\begin{array}{l} a = 1, 2, 3 \\ \text{for } 4, 5, 6, 7 \\ 8 \end{array} \right) \quad (\text{A.12.6})$$

となり, 解は

$$u^a(\xi) = \begin{cases} c^a f(\xi) & (\text{for } a = 1, 2, 3), \\ c^a f(\xi)^{\frac{1}{2}} & (\text{for } a = 4, 5, 6, 7), \\ c^a & (\text{for } a = 8). \end{cases} \quad (\text{A.12.7})$$

従って,

$$\bar{\Phi}_{SU(3)} = \sum_{a=1}^3 \chi^a(t) f(\xi) t_a + \sum_{a=4}^7 \chi^a(t) f(\xi)^{\frac{1}{2}} t_a + \chi^8(t) t_8 \quad (\text{A.12.8})$$

よって,

$$\Phi_{SU(3)} = g \bar{\Phi}_{SU(3)} g^{-1} = \chi^a(t) \Phi_a(x) \quad (\text{A.12.9})$$

ここに,

$$\Phi_a(x) \equiv \begin{cases} f(\xi) g t_a g^{-1} & a = 1, 2, 3 \\ f(\xi)^{\frac{1}{2}} g t_a g^{-1} & a = 4, 5, 6, 7 \\ t_8 & \end{cases} \quad (\text{A.12.10})$$

以上の結果から,

$$\begin{aligned} \Phi(t, x^M) &= \Phi_X + \Phi_\rho + \Phi_{SU(3)} \\ &= -\dot{X}^N A_N^d + \chi^a(t) \Phi_a(x) \end{aligned} \quad (\text{A.12.11})$$

ただし, Φ_a は (A.12.10) で与えられる.

A.13 ω_5 に関する公式

ゲージ変換 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^V = V(\mathcal{A} - id)V^{-1}$ の下で, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^V = V(\mathcal{A} - id)V^{-1}$, we have

$$\omega_5(\mathcal{A}^V) = \omega_5(\mathcal{A}) + \frac{1}{10} \text{tr} L^5 + d\alpha_4(L, \mathcal{A}), \quad (\text{A.13.1})$$

ここに, $L = -iV^{-1}dV$ で, $\alpha_4(L, \mathcal{A})$ は次のように定義される.

$$\alpha_4(L, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[L (\mathcal{A}\mathcal{F} + \mathcal{F}\mathcal{A} - i\mathcal{A}^3) + \frac{i}{2} L\mathcal{A}L\mathcal{A} - iL^3\mathcal{A} \right], \quad (L = -iV^{-1}dV). \quad (\text{A.13.2})$$

また、微小変化 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + \delta\mathcal{A}$ の下では、

$$\omega_5(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}) = \omega_5(\mathcal{A}) + 3 \operatorname{tr}(\delta\mathcal{A} \mathcal{F}^2) + d\beta(\delta\mathcal{A}, \mathcal{A}) + O((\delta\mathcal{A})^2), \quad (\text{A.13.3})$$

と変換する。ここに、 $\beta(\delta\mathcal{A}, \mathcal{A})$ は

$$\beta(\delta\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \operatorname{tr} \left[\delta\mathcal{A} \left(\mathcal{F}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{F} - \frac{i}{2}\mathcal{A}^3 \right) \right]. \quad (\text{A.13.4})$$

である。

A.14 New action から導かれる WZW 項

次に、新しく導入した 6 次元の作用 S_{CSnew} から WZW 項を導こう。refsec:pion 節と同じように $A \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \pm\infty$) ゲージから $A_z = 0$ ゲージに移ることを考える。このときゲージ場は A^g であり、これを z 方向でモード展開すると、

$$A^g = -iU(\vec{x}, t, s)^{-1} dU(\vec{x}, t, s) \psi_+(z) + \text{massive modes} \quad (\text{A.14.1})$$

ここに、

$$U(x^\mu, s) \equiv \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z(x^\mu, z, s) \right) \quad (\text{A.14.2})$$

このとき、

$$F_{\alpha\beta} = i[-iU^{-1}\partial_\alpha U, -iU^{-1}\partial_\beta U](\psi_+^2 - \psi_+) \quad (\text{A.14.3})$$

$$F_{z\alpha} = \partial_z A_\alpha = -iU^{-1}\partial_\alpha U \partial_z \psi_+ \quad (\text{A.14.4})$$

これから、

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} F^3 &= \frac{1}{2^3} 6\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\kappa} \operatorname{tr}(F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F_{z\kappa}) d^6 x \\ &= \frac{1}{2^3} 6(-i)^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\kappa} \operatorname{tr}([U^{-1}\partial_\alpha U, U^{-1}\partial_\beta U][U^{-1}\partial_\gamma U, U^{-1}\partial_\delta U]U^{-1}\partial_\kappa U) \\ &\quad \times (\psi_+(\psi_+ - 1))^2 \partial_z \psi_+ d^6 x \\ &= -\frac{6}{2^3} 2^2 \operatorname{tr}(-iU dU^{-1})^5 (\psi_+(\psi_+ - 1))^2 \partial_z \psi_+ dz \end{aligned} \quad (\text{A.14.5})$$

これを作用に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M_6} \operatorname{tr} F^3 &= -\frac{N_c}{24\pi^2} 3 \int \operatorname{tr}(-iU dU^{-1})^5 \psi_+^2 (\psi_+ - 1)^2 \partial_z \psi_+ dz \\ &= \frac{N_c}{24\pi^2} 3 \int \operatorname{tr}(-iU dU^{-1})^5 \underbrace{d\psi_+ \psi_+^2 (\psi_+ - 1)^2}_{1/30} \end{aligned}$$

$$= \frac{N_c}{240\pi^2} \int \text{tr}(-iUdU^{-1})^5 \quad (\text{A.14.6})$$

を得る. これが新しい作用から導かれる WZW 項である. 5次元目の座標が, 我々が新しく導入した 6次元目の座標 s になっていることに注意されたい. z の定義域が $-\infty < z < \infty$ であったのに対し, s の定義域は $[0, 1]$ となっており, こちらの方が WZW 項 (B.3.4) と良く対応している..

A.15 Noether charge

ここでは場の理論や量子力学において Noether charge をどう定義するか, notation の統一も兼ねて復習しておく. また, Ward identity を用いることで Noether charge の場に対する作用を導く.

$D=d+1$ 次元時空において一般の場 $\varphi_i(x)$ を考える. ここに添え字 i は内部対称性やローレンツ対称性の表現を表す. 作用は $S[\varphi]$ で与えられるとし, 分配関数は

$$Z = \int [d\varphi_i] e^{iS[\varphi]} \quad (\text{A.15.1})$$

で与えられる. そして, 相関関数は

$$\langle \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) e^{iS[\varphi]} \quad (\text{A.15.2})$$

と書ける.

今, 作用は

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \epsilon^a \delta^a \varphi_i(x) \quad (\text{A.15.3})$$

なる変換の下で (古典的な意味で) 不変とする. ここに定数 ϵ^a は変換パラメータであり, 添え字 a は変換の種類を表す. ここで, 相関関数の積分変数である $\varphi_i(x)$ として

$$\varphi'_i(x) = \varphi_i(x) + \epsilon^a(x) \delta^a \varphi_i(x) \quad (\text{A.15.4})$$

を用いても当然結果は変わらない. 今, アノマリーがないとすると, この新しい積分変数 $\varphi'_i(x)$ に対して,

$$[d\varphi'] = [d\varphi]$$

$$S[\varphi'] = S[\varphi] - \int d^D x \epsilon^a(x) \partial_\mu J^{a\mu}(x) \quad (\text{A.15.5})$$

$$\varphi'(y) = \varphi_i(y) + \int d^D x \epsilon^a(x) \delta^D(x-y) \delta^a \varphi_i(y) \quad (\text{A.15.6})$$

となる。ここに、 $J^{a\mu}(x)$ は Noether current である。 $\varphi'_i(x)$ を積分変数として評価すると、相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \rangle &= \int [d\varphi] \left(\varphi_{i_1}(y_1) + \int d^D x \epsilon^a(x) \delta^D(x - y_1) \delta^a \varphi_{i_1}(y_1) \right) \times \\ &\quad \dots \times \left(\varphi_{i_n}(y_n) + \int d^D x \epsilon^a(x) \delta^D(x - y_n) \delta^a \varphi_{i_n}(y_n) \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - i \int d^D x \epsilon^a(x) \partial_\mu J^{a\mu}(x) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15.7})$$

となる。これを (A.15.2) と比較すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z} \int d^D x \epsilon^a(x) \int [d\varphi] \left(\sum_{r=1}^n \delta^D(x - y_r) \varphi_{i_1}(y_1) \dots \delta^a \varphi_{i_r}(y_r) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \right. \\ &\quad \left. - i \partial_\mu J^{a\mu}(x) \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \right) e^{iS[\varphi]} \end{aligned} \quad (\text{A.15.8})$$

従って、次の式：Ward-Takahashi identity を得る。

$$i \langle \partial_\mu J^{a\mu}(x) \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \rangle = \sum_{r=1}^n \delta^D(x - y_r) \langle \varphi_{i_1}(y_1) \dots \delta^a \varphi_{i_r}(y_r) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \rangle \quad (\text{A.15.9})$$

特に $n = 1$ の場合、左辺は

$$i \partial_\mu \langle J^{a\mu}(x) \varphi_i(y) \rangle = i \sum_{r=1}^n \delta(x^0 - y^0) \langle [J^{a0}(x), \varphi_i(y)] \rangle + \dots \quad (\text{A.15.10})$$

となる。ここに、 \dots は $x^0 \rightarrow y^0$ で有限な項である。両辺を x で積分して Ward identity (A.15.9) を用いると、形式的に

$$i[Q^a, \varphi_i(x)] = \delta^a \varphi_i(x) \quad (\text{A.15.11})$$

と書ける。ここに、

$$Q^a \equiv \int d^3 x J^{a0}(x) \quad (\text{A.15.12})$$

は保存電荷を表す。

なお、量子力学では 0+1 次元の場の理論だとみなして上の議論を繰り返せばよい。

付録B Skyrme model

この Appendix では、Skyrme model から soliton 解としてバリオンが導かれることを復習しておく。ここでのプロセスは本文での解析を理解するための助けとなることが期待される。なお、より詳細な議論については [45] などを参照して頂きたい。

ここではまず Skyrme model を与えておく。QCD の lagrangian :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi} \not{D}\Psi, \quad \Psi^T = (\psi_1, \dots, \psi_{N_f}) \quad (\text{B.0.1})$$

$$F = dA + iA^2, \quad D = d + igA \quad (\text{B.0.2})$$

には $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 大域的対称性 :

$$\Psi_{L/R} \mapsto V_{L/R} \Psi_{L/R}, \quad \Psi_{L/R} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \Psi, \quad V_{L/R} \in SU(N_f)_{L/R} \quad (\text{B.0.3})$$

がある。しかし、低エネルギーではこの対称性は自発的に破れて、 $SU(N_f)_V$ 対称性が残る。このときに現れる NG ボソンが π, K, \dots である。低エネルギー有効理論は NG ボソン場の有効理論となり、それは chiral lagrangian と呼ばれる。その chiral lagrangian に Skyrme 項と呼ばれる項を加えたものが ‘Skyrme model’ である :

$$S_0[U(x)] = \int d^4x \mathcal{L}_0(U, dU) = \int d^4x \left(-\frac{f_\pi^2}{16} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu]) \right) \quad (\text{B.0.4})$$

$$\begin{cases} U(x) \equiv \exp\left(\frac{4}{f_\pi} i t_a \pi_a\right) \in SU(N_f), \\ L_\mu(x) \equiv \frac{1}{i} U(x)^{-1} \partial_\mu U(x), \\ f_\pi: \text{パイオン崩壊率 (186 MeV)}, \quad e: \text{定数}, \\ t_a^\dagger = t_a, \quad [t_a, t_b] = i f_{abc} t_c, \quad \text{tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \\ t_a = \frac{1}{2} \tau_a \quad \text{for } SU(2), \quad t_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad \text{for } SU(3) \end{cases} \quad (\text{B.0.5})$$

ここに、 τ^a, λ^a はそれぞれ Pauli 行列、Gell-Mann 行列である。 t_a は $SU(N_f)$ の生成子で、

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N_f} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{B.0.6})$$

を満たす。

そして、作用 $S_0[U]$ は QCD の chiral 対称性に対応する対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ を持つ :

$$U(x) \mapsto V_L^{-1} U(x) V_R, \quad S_0[U] \mapsto S_0[U] \quad (\text{B.0.7})$$

B.1 $N_f = 2$ の場合

$N_f = 2$ の場合を考える.

B.1.1 Soliton 解

バリオンに相当する静的な解を探そう. (B.0.4) より, EOM は

$$\partial^\mu \left(L_\mu - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} [L^\nu, [L_\mu, L_\nu]] \right) = 0 \quad (\text{B.1.1})$$

と書ける. また, この理論にはトポロジカルカレント:

$$j_B^\mu \equiv \frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(L_\nu L_\lambda L_\rho) \quad (\text{B.1.2})$$

がある. ここに, $\epsilon^{0123} = 1$ である. 実際, このカレントは EOM を用いなくても自明に保存する;

$$\partial_\mu j_B^\mu = 0$$

ここではこれを‘バリオンカレント’と解釈し, これに付随する保存電荷を‘バリオン数’とみなす: *1)

$$B \equiv \int d^3x j_B^0 = \frac{i}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \text{tr}(L_i L_j L_k) \quad (\text{B.1.3})$$

つまり, バリオン数は写像 $S^3(\mathbf{x}) \rightarrow SU(2)(U(x))$ の巻きつき数である.

Hedgehog ansatz

上の議論から, バリオンに相当する soliton は非自明な topological number B を持つことになる.

まず解の対称性について考察しよう. Skyrme lagrangian には二つの大域的対称性があった:

- $SU(2)_L \times SU(2)_R : U(x) \mapsto V_L^\dagger U(x) V_R, \quad V_{L/R} \in SU(2)_{L/R}$
- $SO(3) ; U(\mathbf{x}, t) \mapsto U(R\mathbf{x}, t), \quad R \in SO(3)$

しかし, 作用が有限であるためには, 古典解は $U(\mathbf{x} \rightarrow \infty, t) = \text{const.}$ でなければならない. 特にここではこれを

$$U(\mathbf{x} \rightarrow \infty, t) = 1 \quad (\text{B.1.4})$$

と規格化しておく. これによって, 古典解の持ち得る対称性は

*1) この定義は一般に広く用いられているもの ([45] など) と符号が異なる. しかし, 以下で議論するように拘束条件を正しく出すにはこの定義を用いるべきであると筆者は考える.

- $SU(2)_V : SU(2) \mapsto V^\dagger U(x) V, \quad V \in SU(2)_V$
- $SO(3) : U(\mathbf{x}, t) \mapsto U(R\mathbf{x}, t), \quad R \in SO(3)$

に限定される. 加えて, 「 $SO(3)$ 不変あるいは $SU(2)_V$ 不変な解は非自明なバリオン数を持ち得ない」ことが分かっている [45].

そこで, 解として $SO(3)$ と $SU(2)_V$ の同時回転:

$$U(\mathbf{x}) \mapsto V(R)^\dagger U(R\mathbf{x}) V(R), \quad V(R)^\dagger (\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau}) V(R) = (R\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.1.5})$$

で不変なもの $U_0(\mathbf{x})$ を探そう. この ‘hedgehog ansatz’ の下で, $U_0(\mathbf{x})$ は一般に

$$U_0(\mathbf{x}) = \exp(i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau} F(r)) = \cos F(r) + i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin F(r), \quad (\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r) \quad (\text{B.1.6})$$

と書ける [45]. ただし, $r = 0$ での正則性と (B.1.4) により, $F(r)$ は次の性質を持たなければならない:

$$F(r = 0) = 0, \quad F(r \rightarrow \infty) = n\pi \quad (\text{B.1.7})$$

この2つの条件から, この hedgehog 解の持つバリオン数は ([45] 参照)

$$\begin{aligned} B &= \int d^3x j_B^0 = \frac{i}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \text{tr}(L_i L_j L_k) \\ &= \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{2\pi^2 r^2} \sin^2 F \frac{dF}{dr} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{F(r=0)}^{F(r=\infty)} dF \sin^2 F \\ &= n \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

と分かり, 確かに非自明なバリオン数を持つ ansatz が求まったことになる. ちなみに, この ansatz の下での EOM の解は数値的には求められている [45].

B.1.2 集団座標とその量子化

上の soliton が持つ粒子的な自由度は, 例えば

- 重心座標 $\vec{a}(t) ; U_0(\mathbf{x} - \vec{a}(t))$
- スピン $SO(3) R(t) ; U_0(R\mathbf{x})$
- アイソスピン $SU(2)_V V_L = V_R ; V U_0(\mathbf{x}) V^{-1}$

などがある. ただし, (B.1.5)にある様に, $U_0(\boldsymbol{x})$ に対してはスピン $SO(3)$ とアイソスピン $SU(2)$ とは独立でないことに注意されたい.

ここでは重心運動は考えず, ‘スピン=アイソスピン’を集団座標として量子化する:

$$U(t, \boldsymbol{x}) \equiv W(t)U_0(\boldsymbol{x})W(t)^{-1}, \quad W(t) \in SU(2) \quad (\text{B.1.9})$$

この $U(t, \boldsymbol{x})$ を Skyrme lagrangian に代入し, 空間積分を実行すれば, 集団座標 $W(t)$ に関する lagrangian を得る:

$$L_W \equiv \int d^3x \mathcal{L}_0(U = WU_0W^{-1}) = -M_0 + \mathcal{I}_0 \text{tr}[(-iW^{-1}\dot{W})^2] \quad (\text{B.1.10})$$

$$= -M_0 + 2\mathcal{I}_0 \left[\text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) \right]^2 \quad (\text{B.1.11})$$

ただし, M_0, \mathcal{I}_0 は定数であり, $F(r)$ を用いた表式や数値などは [45] を参照されたい.

ここで, $W(t)$ を次のように表す.

$$W(t) \equiv \exp(it_a \xi_a(t)) \quad (\text{B.1.12})$$

さらに, H_{ab}, K_{ab} を以下のように定義しておく.

$$\begin{aligned} W^{-1}\partial_a W &= iH_{ab}(\xi)t_b, \quad \text{or} \quad \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) = \frac{1}{2}H_{ba}\dot{\xi}^b \\ W\partial_a W^{-1} &= iK_{ab}(\xi)t_b, \quad \text{or} \quad \text{tr}(-iW\dot{W}^{-1}t_a) = \frac{1}{2}K_{ba}\dot{\xi}^b \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

ここに, $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_a}$ である. この定義から,

$$iH_{ab}Wt_bW^{-1} = W(W^{-1}\partial_a W)W^{-1} = -W\partial_a W^{-1} = -iK_{ab}t_b \quad (\text{B.1.14})$$

$$K_{ab} = -2H_{ac} \text{tr}(t_b W t_c W^{-1}) \quad (\text{B.1.15})$$

$$H_{ab} = -2K_{ac} \text{tr}(t_b W^{-1} t_c W) \quad (\text{B.1.16})$$

$$K_{ab}^{-1} H_{bc} H_{dc} = -2 \text{tr}(t_c W^{-1} t_a W) H_{dc} = K_{da} \quad (\text{B.1.17})$$

を得る.

これらを用いて, lagrangian L_W と共役運動量 π_a は次のように表される:

$$L_W = -M_0 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \dot{\xi}_a H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} \quad (\text{B.1.18})$$

$$\pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_a} = \mathcal{I}_0 H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} \quad (\text{B.1.19})$$

そして, この系に対して通常の同時刻正準交換関係を課す:

$$[\xi_a(t), \pi_b(t)] = i\delta_{ab} \quad (\text{B.1.20})$$

アイソスピン演算子 I とスピン演算子 J

$W(t)$ に対する $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 変換を考える；

$$W(t) \mapsto V_L^{-1} W(t) V_R \quad (\text{B.1.21})$$

この変換の下で、

$$\begin{aligned} U(t, \mathbf{x}) &= W(t) U_0(\mathbf{x}) W(t)^{-1} \\ &\mapsto V_L^{-1} W(t) V_R U_0(\mathbf{x}) V_R^{-1} W(t) V_L \\ &= V_L^{-1} U(t, R\mathbf{x}) V_L \end{aligned} \quad (\text{B.1.22})$$

となるから、 V_L, V_R はそれぞれアイソスピン回転、空間回転と解釈できる。

そこで、これらの変換に対する Noether charge を求めよう。 $W \rightarrow -i\epsilon_L^a(t)t_a W$ の下で

$$\begin{aligned} \delta_L L_W &= 2\mathcal{I}_0 \left[(-iW^{-1}(-i\dot{\epsilon}_L^a t_a)W) (-iW^{-1}\dot{W}) \right] = \int dt 2\mathcal{I}_0 \dot{\epsilon}_L^a \text{tr}(-iW\dot{W}^{-1}t_a) \\ &= (\mathcal{I}_0 K_{ba} \dot{\xi}^b) \dot{\epsilon}_L^a \end{aligned} \quad (\text{B.1.23})$$

と振舞うから、アイソスピンは

$$I_a = \mathcal{I}_0 K_{ba} \dot{\xi}^b \quad (\text{B.1.24})$$

と表される。また、(B.1.17) と (B.1.19) を用いることで、

$$I_a = K_{ab}^{-1} \pi_b \quad (\text{B.1.25})$$

とも書ける。同様にして、 $W \rightarrow Wi\epsilon_R^a t_a$ では、

$$\delta_R L_W = 4\mathcal{I}_0 \text{tr}(\dot{\epsilon}_L^b t_b t_a) \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a) = \mathcal{I}_0 H_{ba} \dot{\xi}^b \dot{\epsilon}^a \quad (\text{B.1.26})$$

となり、スピンは

$$J_a = \mathcal{I}_0 H_{ba} \dot{\xi}^b \quad (\text{B.1.27})$$

と書ける。また、共役運動量 π_a (B.1.19) を用いて

$$J_a = H_{ab}^{-1} \pi_b \quad (\text{B.1.28})$$

とも書ける。

このとき、(B.1.14) から、スピンとアイソスピンには

$$\mathbf{I} = I_a t_a = \mathcal{I}_0 K_{ba} t_a \dot{\xi}^b = -\mathcal{I}_0 H_{ba} W t_a W^{-1} \dot{\xi}^b = -W J_a t_a W^{-1} = -W \mathbf{J} W^{-1} \quad (\text{B.1.29})$$

なる関係があることが分かる。

さらに, Appendix A.15 の議論から, 量子化するとこれらの演算子は以下の交換関係を満たすことが分かる.

$$\begin{aligned} [I_a, I_b] &= i\epsilon_{abc}I_c \\ [J_a, J_b] &= i\epsilon_{abc}J_c \\ [I_a, J_b] &= 0 \end{aligned} \tag{B.1.30}$$

ちなみに, この交換関係は正準交換関係 (B.1.20) から直接示すことも可能である. (詳しくは [45] 参照.)

また, (B.1.29) から J_a と I_a のカシミアが等しいことが分かる.

$$\text{tr}(\mathbf{I}^2) = \text{tr}(\mathbf{J}^2), \tag{B.1.31}$$

$SU(2)$ においては, 「二次のカシミアが等しい表現は同じ表現である」ことが言えるので, 上の関係は「 I_a と J_a の表現 (= スピン) が等しい」ことを表している. また, 系の hamiltonian は次のように書かれる.

$$\begin{aligned} H_W &\equiv \pi_a \dot{\xi}_a - L_W = M_0 + \frac{1}{2\mathcal{I}_0} H_{ba}^{-1} \pi_a H_{bc}^{-1} \pi_c \\ &= M_0 + \frac{1}{2\mathcal{I}_0} (I_a)^2 \\ &= M_0 + \frac{1}{2\mathcal{I}_0} (J_a)^2 \end{aligned} \tag{B.1.32}$$

B.1.3 バリオン

量子状態をスピンとアイソスピンとで分類する. 従って, 状態は $|I = J, I_3, J_3\rangle$ で表される. この量子数から同一視すべきバリオンが分かり, その質量は hamiltonian (B.1.32) の固有値として与えられる. その結果は次のようになる.

$$\begin{aligned} M_{I=J} &= M_0 + \frac{1}{2\mathcal{I}_0} I(I+1) \\ M_{1/2} &= M_0 + \frac{3}{8\mathcal{I}_0} : \begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle = |p, \pm\rangle, \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle = |n, \pm\rangle \end{cases} \\ M_{3/2} &= M_0 + \frac{15}{8\mathcal{I}_0} : \begin{cases} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, J_3\rangle = |\Delta^{++}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, J_3\rangle = |\Delta^+\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, J_3\rangle = |\Delta^0\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, J_3\rangle = |\Delta^-\rangle \end{cases} \end{aligned} \tag{B.1.33}$$

B.2 核子の静的性質 (in the Skyrme model)

上で与えられた解を基に核子の電荷密度, g-因子, axial vector coupling g_A などを求める [38].

B.2.1 諸量の定義

そこで, これらの量がどの様に定義されているか, 簡単におさらいしておく.

核子の電荷 Q_{em} はアイソスピン I_3 とバリオン数の半分 $B/2$ の和で書ける. 従って, 電荷密度 j_{em}^0 はアイソスピン密度 j_V^0 とバリオン数密度 j_B^0 を用いて

$$j_{\text{em}}^0 = j_V^0 + \frac{1}{2}j_B^0 \quad (\text{B.2.1})$$

と書ける.

g-因子は magnetic moment $\boldsymbol{\mu}_N$ と Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}$ との比例係数で,

$$\boldsymbol{\mu}_N = \frac{g_N}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (\text{B.2.2})$$

で定義される. ここに, 添え字 N は核子を表しており, M_N は核子の質量である. また, magnetic moment は電磁カレントを用いて

$$\boldsymbol{\mu}_N = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}_{\text{em}} \quad (\text{B.2.3})$$

と書ける. (B.2.1) と同様に, 電磁カレントは isovector current j_V^μ と isoscalar current j_B^μ との線形結合で書ける:

$$j_{\text{em}}^\mu = j_V^\mu + \frac{1}{2}j_B^\mu \quad (\text{B.2.4})$$

そこで, magnetic moment も isoscalar からの寄与 $\boldsymbol{\mu}_{I=0}$ と isovector からの寄与 $\boldsymbol{\mu}_{I=1}$ とに分けて

$$\boldsymbol{\mu}_{I=1} = \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}_{V,a=3} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}_B \quad (\text{B.2.6})$$

$$\boldsymbol{\mu}_N = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{I=1} + \boldsymbol{\mu}_{I=0} \quad (\text{B.2.7})$$

と書く. そして, それぞれに対する g-因子を

$$\boldsymbol{\mu}_{I=1} = \frac{g_{I=1}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tau_3 \quad (\text{B.2.8})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{g_{I=0}}{2M_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (\text{B.2.9})$$

で定義する. 定義から, これらは核子の g-因子と

$$g_{I=0} = g_p + g_n, \quad g_{I=1} = g_p - g_n \quad (\text{B.2.10})$$

なる関係があることが分かる.

最後に, axial vector coupling は axial current $j_{A,a}^\mu$ を用いて

$$\langle N'(q) | \boldsymbol{j}_{A,a}(0) | N(0) \rangle \xrightarrow{q \rightarrow 0} g_A \langle N' | \boldsymbol{\sigma} \tau_a | N \rangle \quad (\text{B.2.11})$$

で定義される.

B.2.2 Currents

上の議論から分かるように, 電荷密度 j_{em}^0 , g-因子 g_N , axial vector coupling g_A はバリオン数カレント j_B^μ , vector current $j_{V,a}^\mu$, axial current $j_{A,a}^\mu$ を用いて定義される. そこで, カレントの表式を導こう.

Skyrme model において右・左変換はそれぞれ

$$W \rightarrow V_L^{-1} W, \quad W \rightarrow W V_R \quad (\text{B.2.12})$$

で与えられていた. これに伴う Noether current は

$$j_{L,a}^\mu = \text{tr} \left\{ \left(\frac{f_\pi^2}{8} L^\mu + \frac{1}{8e^2} [[L^\mu, L^\nu], L_\nu] \right) t_a \right\} - \frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \text{tr}(L_\nu L_\rho L_\lambda t_a) \quad (\text{B.2.13})$$

$$j_{R,a}^\mu = -\text{tr} \left\{ \left(\frac{f_\pi^2}{8} R^\mu + \frac{1}{8e^2} [[R^\mu, R^\nu], R_\nu] \right) t_a \right\} - \frac{iN_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \text{tr}(R_\nu R_\rho R_\lambda t_a) \quad (\text{B.2.14})$$

となる. ここに,

$$L_\mu = iU \partial_\mu U^{-1}, \quad R_\mu = U^{-1} L_\mu U = -iU^{-1} \partial_\mu U \quad (\text{B.2.15})$$

である. また, 第2項は $U \in SU(2)$ の場合には存在せず, $U \in U(2)$ の場合に WZW 項からくる.

そして, $j_{V,a}^\mu, j_{A,a}^\mu$ はこれらを用いて

$$j_{V,a}^\mu = j_{L,a}^\mu + j_{R,a}^\mu, \quad j_{A,a}^\mu = j_{L,a}^\mu - j_{R,a}^\mu \quad (\text{B.2.16})$$

と書ける.

また, バリオン数カレント j_B^0 は (B.1.2) で与えられており,

$$j_B^\mu \equiv \frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(L_\nu L_\lambda L_\rho) \quad (\text{B.2.17})$$

と書けている.

以上で vector current $j_{V,a}^\mu$, axial current $j_{A,a}^\mu$, バリオン数カレント j_B^μ の表式が求まった. 核子に対するこれらの量を求めるには, hedgehog 解の集団座標 (B.1.9) をこれらの表式に代入すればよい. 数値的に求められた hedgehog 解を用いて, これらの量も数値的に求められている.

後は (B.2.5)-(B.2.9), (B.2.11) のその数値結果を代入すれば諸量が求まる. その結果は本文 4.3 節中に載せてある. ここでは, こうして得た Skyrme model の結果と酒井・杉本模型での結果を比較した. また, Skyrme model についてのより詳細な議論は [38] を参照されたい.

B.3 $N_f = 3$ の場合

次に, $N_f = 3$ の場合を考える. このときには集団座標が $SU(3)$ となるので, これを空間回転とみなすには拘束条件が必要となる.

B.3.1 WZW 項

$SU(3)$ の場合には $SU(2)$ にはなかった WZW 項という項が存在する. この項が上の拘束条件を生み出すことが後に分かる.

Skyrme lagrangian に WZW 項を加えるのは以下の 2 つの必然性による.

対称性 QCD のパリティ変換はパイオン場 $U(\mathbf{x}, t) = \exp\left(\frac{4i}{f_\pi} t_a \pi_a\right)$ に対して

$$\pi_a(\mathbf{x}, t) \mapsto -\pi(-\mathbf{x}, t), \quad U(\mathbf{x}, t) \mapsto U(-\mathbf{x}, t)^{-1} \quad (\text{B.3.1})$$

と作用する.

一方, Skyrme 作用 S_0 には次の二つの対称性がある:

$$U(\mathbf{x}, t) \mapsto U(-\mathbf{x}, t), \quad \pi_a(\mathbf{x}, t) \mapsto \pi_a(-\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.3.2})$$

$$U(\mathbf{x}, t) \mapsto U(\mathbf{x}, t)^{-1}, \quad \pi_a(\mathbf{x}, t) \mapsto -\pi_a(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.3.3})$$

WZW-term を加えることで, この二つの対称性のうち QCD のパリティに相当する部分だけが残る.

QCD のアノマリー構造 WZW 項を加えることで QCD の $U(N_f)_A$ アノマリーや $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ などを再現することが知られている.

上の 2 つの条件を満たす ‘WZW 項’ とは, 次の項のことを言う:

$$\Gamma_{WZW}[U] \equiv \frac{N_c}{240\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int_{S^3 \times D_2} d^5x \operatorname{tr}(L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma) \quad (\text{B.3.4})$$

ここで, $U(\mathbf{x} \rightarrow \infty, t) = 1$ だから, 空間を S^3 としている. また, 時間方向にも周期的 (S^1) であると仮定している. また, 新たに 5 次元目の座標 $s \in [0, 1]$ を導入し, (s, t) で disk をなし, その境界 $s = 0$ が我々の世界とみなされる (図 4.1 参照). ちなみに $N_f = 2$ ではこの項は恒等的に 0 である.

WZW 項を加えた後の作用は次のように書かれる.

$$\begin{aligned} S[U] &= S_0[U] + \Gamma_{WZW}[U] \\ &= \int d^4x \left(-\frac{f_\pi^2}{16} \operatorname{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32e^2} \operatorname{tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu]) \right) \\ &\quad + \frac{N_c}{240\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int_{S^3 \times D_2} d^5x \operatorname{tr}(L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma) \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

B.3.2 集団座標とその量子化

$SU(2)$ hedgehog 解の $SU(3)$ への埋め込み ;

$$U_0(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} \exp(i\hat{x} \cdot \boldsymbol{\tau} F(r)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.6})$$

は上の作用の古典解である。そこで、集団座標として S_0 に対しては

$$U(\mathbf{x}, t) = W(t)U_0(\mathbf{x})W(t)^{-1}, \quad W(t) \in SU(3) \quad (\text{B.3.7})$$

を、WZW 項 Γ_{WZW} に対しては

$$U(\mathbf{x}, t, s) = W(t, s)U_0(\mathbf{x})W(t, s)^{-1}, \quad W(t, s) \in SU(3) \quad (\text{B.3.8})$$

を用いる。ただし、

$$\begin{aligned} W(t, 0) &= W(t) \\ W(t, 1) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.3.9})$$

である。

少し長い計算の後、集団座標に対する lagrangian L_W は次のようになることが分かる。

$$\begin{aligned} L_W &= -M_0 + 2\mathcal{I}_0 \sum_{a=1}^3 \{\text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a)\}^2 + 2\mathcal{I}'_0 \sum_{a=4}^7 \{\text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_a)\}^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}}BN_c \text{tr}(-iW^{-1}\dot{W}t_8) \end{aligned} \quad (\text{B.3.10})$$

ここに、 $M_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{I}'_0$ は数値的には求まる定数で、[45]などで与えられている。また、 B (B.1.8) はバリオン数である。今後は特に $B = 1$ の場合を考える。

アイソスピン (I_a) とスピン (J_a)

$W(t)$ に対する右 $SU(3)$ 変換 :

$$W(t) \mapsto W(t)V_R, \quad V_R \in SU(3) \quad (\text{B.3.11})$$

に対する Noether charge を J_a と定義する。このうち、保存するのは $a = 1, 2, 3, 8$ のみである。特に $SU(2)$ 部分に着目すると、

$$W(t) \mapsto W(t)V_R, \quad V_R = \begin{pmatrix} V(R) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(R) \in SU(2) \quad (\text{B.3.12})$$

の下で,

$$\begin{aligned} U(t, \mathbf{x}) &\mapsto U(t, R\mathbf{x}) \\ U(t, \mathbf{x}, s) &\mapsto U(t, R\mathbf{x}, s) \end{aligned} \quad (\text{B.3.13})$$

と変換されるから, これは‘スピン’とみなせる.

同様に左 $SU(3)$ 変換:

$$W(t) \mapsto V_L^{-1}W(t) \quad (\text{B.3.14})$$

の下で,

$$\begin{aligned} U(t, \mathbf{x}) &\mapsto V_L^{-1}U(t, \mathbf{x})V_L \\ U(t, \mathbf{x}, s) &\mapsto V_L^{-1}U(t, \mathbf{x}, s)V_L \end{aligned} \quad (\text{B.3.15})$$

と変換されるから, これは‘フレーバー $SU(3)$ 回転’とみなせる. これに対応する Noether charge を I_a と表す. この I_a は全ての a について保存する.

スピン J_a やアイソスピン I_a に対する表式は $N_f = 2$ の場合と同様で, (B.1.13) と同じ定義の下で,

$$J_a = H_{ab}^{-1}\pi_b, \quad I_a = K_{ab}^{-1}\pi_b \quad (\text{B.3.16})$$

と書ける. ここに $\pi_a \equiv \partial L_W / \partial \dot{\xi}_a$ は共役運動量であり, ξ_a を

$$W(t, s) = \exp \left(\sum_{a=1}^7 it_a \xi_a(t, s) \right) e^{its \xi_8(t, s)} \quad (\text{B.3.17})$$

で定義した. $N_f = 2$ の場合と同様, Ward identity から出発して, スピン J_a とアイソスピン I_a の交換関係を導くことが出来る:

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= if_{abc}J_c \\ [I_a, I_b] &= if_{abc}I_c \\ [J_a, I_b] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.18})$$

ここに f_{abc} は $SU(3)$ の構造定数である. また, この交換関係は正準交換関係

$$[\xi_a, \pi_b] = i\delta_{ab} \quad (\text{B.3.19})$$

から導くことも出来る. さらに, (B.1.29) は $N_f = 3$ でも同様に成り立つから,

$$\text{tr}(\mathbf{I}^2) = \text{tr}(\mathbf{J}^2), \quad \text{tr}(\mathbf{I}^3) = -\text{tr}(\mathbf{J}^3), \quad \mathbf{I} \equiv \sum_{a=1}^8 I_a t_a, \quad \mathbf{J} \equiv \sum_{a=1}^8 J_a t_a \quad (\text{B.3.20})$$

が言える. すなわち, スピン J とアイソスピン I は互いに複素共役な表現になることが分かる.

今, $\xi, \dot{\xi}$ を用いて lagrangian (B.3.10) を書き直すと,

$$L_W = -M_0 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_0 \sum_{b=1}^3 \dot{\xi}_a H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} + \frac{1}{2}\mathcal{I}'_0 \sum_{b=4}^7 \dot{\xi}_a H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} - \frac{N_c}{2\sqrt{3}} \dot{\xi}_a H_{a8} \quad (\text{B.3.21})$$

となり, 共役運動量 π_a は

$$\pi_a \equiv \frac{\partial L_W}{\partial \dot{\xi}_a} = \mathcal{I}_0 \sum_{b=1}^3 H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} + \mathcal{I}'_0 \sum_{b=4}^7 H_{ab} \dot{\xi}_c H_{cb} - \frac{N_c}{2\sqrt{3}} H_{a8} \quad (\text{B.3.22})$$

と書ける. 従って, (B.3.16) より,

$$J_8 = H_{8a}^{-1} \pi_a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{B.3.23})$$

を得る. ここで, $N_c = 3$ を用いた.

B.3.3 バリオン

これまでに得た条件は以下のようになる.

- I と J は互いに複素共役表現.
- $J_8 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

この条件はバリオンのスピンを正しく導く.

関連図書

- [1] E. Witten “Baryons and branes in anti de Sitter space,” JHEP **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].
- [2] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].
- [3] T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2006) [arXiv:hep-th/0507073].
- [4] O. Aharony “The NonAdS / nonCFT correspondence, or three different paths to QCD,” [arXiv:hep-th/0212193].
- [5] A. Karch, E. Katz “Adding flavor to AdS/CFT,” J. High Energy Phys. **0206** 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205236].
- [6] O. Aharony, J. Sonnenschein, S. Yankielowicz “A Holographic Model of Deconfinement and Chiral Symmetry Restoration” Annals Phys. **322** 1420 (2007) [arXiv:hep-th/060416].
- [7] J. Polchinski “String theory” Vol. 1 Vol. 2 (Cambridge, UK:Univ. Pr., 1998)
- [8] G. T. Horowitz and A. Strominger “BLACK STRINGS AND p -BRANES” Nucl. Phys. **B360**, 197-209 (1991)
- [9] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz “Large N Field Theories, String Theory and Gravity” Phys. Rept. **323**, 183-386 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [10] K. S. Stelle, “BPS branes in supergravity,” [arXiv:hep-th/9803116].
- [11] J. Lyng. Petersen “Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT,” Int. J. Mod. Phys. **A14**, 3597-3672 (1999) [arXiv:hep-th/9902131].
- [12] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz “Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges,” Phys. Rev. **D58**, 046004 (1998) [arXiv:hep-th/9802042].

- [13] K. Kawarabayashi and M. Suzuki “Partially conserved axial vector current and the decays of vector mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **16**, 255 (1966).
- [14] Riazuddin and Fayyazuddin “Algebra of current components and decay widths of rho and K^* mesons” *Phys. Rev.* **147**, 1071 (1966).
- [15] D. Finkelstein and J. Rubinstein “Connection between spin, statistics, and kinks,” *J. Math. Phys.* **9**, 1762 (1968).
- [16] J. Williams “Topological Analysis of Nonlinear Field Theory,” *J. Math. Phys.* **11**, 2611 (1970).
- [17] E. Witten “Baryons in the $1/N$ expansion,” *Nucl. Phys. B* **160**, 57 (1979).
- [18] S. Jain and S. R. Wadia, “Large N Baryons: Collective Coordinates Of The Topological Soliton In $SU(3)$ Chiral Model,” *Nucl. Phys. B* **258**, 713 (1985).
- [19] D. K. Hong, M. Rho, H. U. Yee and P. Yi, “Chiral dynamics of baryons from string theory,” *Phys. Rev. D* **76**, 061901 (2007) [arXiv:hep-th/0701276].
- [20] D. K. Hong, M. Rho, H. U. Yee and P. Yi, “Dynamics of Baryons from String Theory and Vector Dominance,” *JHEP* **0709**, 063 (2007) [arXiv:0705.2632 [hep-th]].
- [21] H. Hata and M. Murata, “Baryons and the Chern-Simons term in holographic QCD with three flavors,” [arXiv:0710.2579 [hep-th]].
- [22] R. C. Myers and M. J. Perry “Black holes in higher dimensional space-times,” *Ann. Phys.* **172**, 304 (1986).
- [23] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto and S. Yamato, “Baryons from instantons in holographic QCD,” [arXiv:hep-th/0701280v2].
- [24] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], *J. of Phys. G* **33** (2006), 1.
- [25] R. C. Myers “Dielectric-Branes” *JHEP* **9912**, 022 (1999) [arXiv:hep-th/9910053].
- [26] J. Polchinski “Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724-4727 (1995) [arXiv:hep-th/9510017].
- [27] J. Maldacena “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231-252 (1998) [arXiv:hep-th/9711200].
- [28] M. B. Green, J. A. Harvey and G. W. Moore, “I-brane inflow and anomalous couplings on d-branes,” *Class. Quant. Grav.* **14**, 47 (1997)

- [29] E. Witten, “Current Algebra Theorems for the U(1) Goldstone Boson,” Nucl. Phys. **B156**, 269 (1979).
- [30] G. Veneziano, “U(1) Without Instantons,” Nucl. Phys. **B159**, 213 (1979).
- [31] T. H. R. Skyrme, “A Nonlinear field theory,” Proc. Roy. Soc. Lond. **A260**, 127 (1961).
- [32] J. Wess and B. Zumino, “Consequences of anomalous Ward identities,” Phys. Lett. **B37**, 95 (1971).
- [33] E. Witten, “Global Aspects of Current Algebra,” Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983).
- [34] N. Horigome and Y. Tanii, “Holographic Chiral Phase Transition with Chemical Potential,” JHEP **0701**, 072 (2007).
- [35] A. Parnachev and D. A. Sahakyan “Photoemission with Chemical Potential from QCD Gravity Dual,” Nucl. Phys. **B768**, 177 (2007)
- [36] M. R. Douglas, “Branes within Branes,” [arXiv:hep-th/9512077].
- [37] M. A. B. Beg, A. Zepeda, “Pion radius and isovector nucleon radii in the limit of small pion mass,” Phys. Rev. D **6** 2912 (1972).
- [38] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, “Static Properties Of Nucleons In The Skyrme Model,” Nucl. Phys. B **228**, 552 (1983).
- [39] K. Hashimoto, T. Hirayama and A. Miwa, “Holographic QCD and pion mass,” JHEP **0706**, 020 (2007) [arXiv:hep-th/0703024].
- [40] N. Evans and E. Threlfall, “Quark Mass in the Sakai-Sugimoto Model of Chiral Symmetry Breaking,” arXiv:0706.3285 [hep-th].
- [41] O. Bergman, S. Seki and J. Sonnenschein, “Quark mass and condensate in HQCD,” arXiv:0708.2839 [hep-th].
- [42] A. Dhar and P. Nag, “Sakai-Sugimoto model, Tachyon Condensation and Chiral symmetry Breaking,” arXiv:0708.3233 [hep-th].
- [43] R. C. Brower, S. D. Mathur and C. I. Tan, “Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality,” Nucl. Phys. B **587** 249 (2000) [arXiv:hep-th/0003115].
- [44] K. Hashimoto, C. I. Tan and S. Terashima, “Glueball decay in holographic QCD,” arXiv:0709.2208 [hep-th].
- [45] S. Yamato, “Brane-induced Skyrme モデルに於けるバリオン解についての研究,” 京都大学大学院理学研究科 修士論文.

- [46] H. Hata, M. Murata and S. Yamato, “Chiral currents and static properties of nucleons in holographic QCD,” arXiv:0803. [hep-th].