

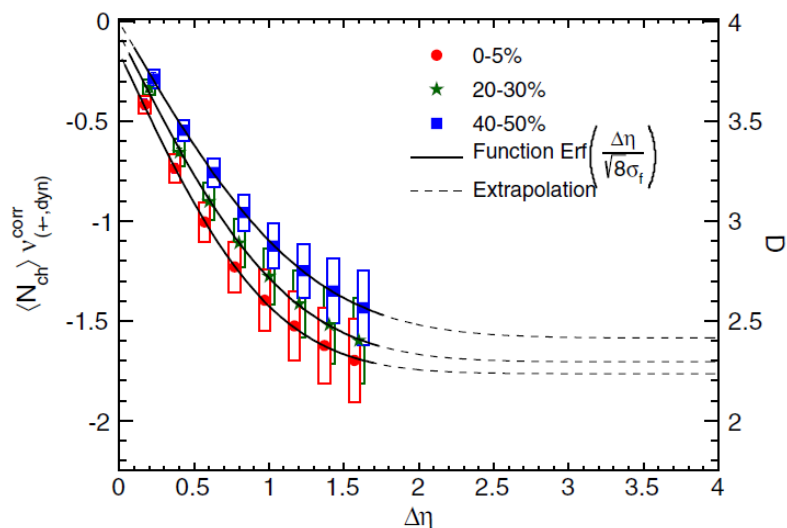
高次キュムラントに対する 検出効率補正の効率化

北沢正清
(阪大理)

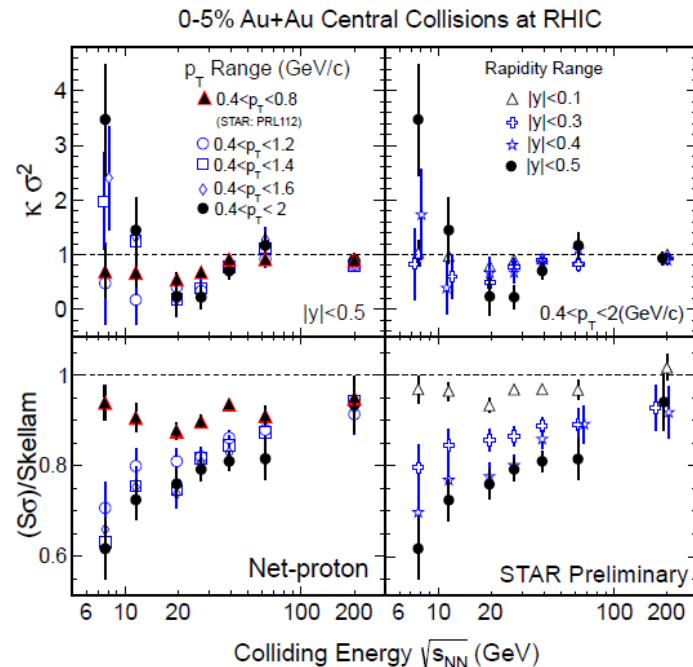
Efficient formulas for **efficiency** correction of cumulants
MK, PRC**93**, 044911 (2016) [arXiv:1602.01234]

日本物理学会2016年秋季大会, 宮崎大学, 22/Sep./2016
22aSK9

保存電荷イベント毎ゆらぎ



電磁電荷2次キュムラント
ALICE (2013)

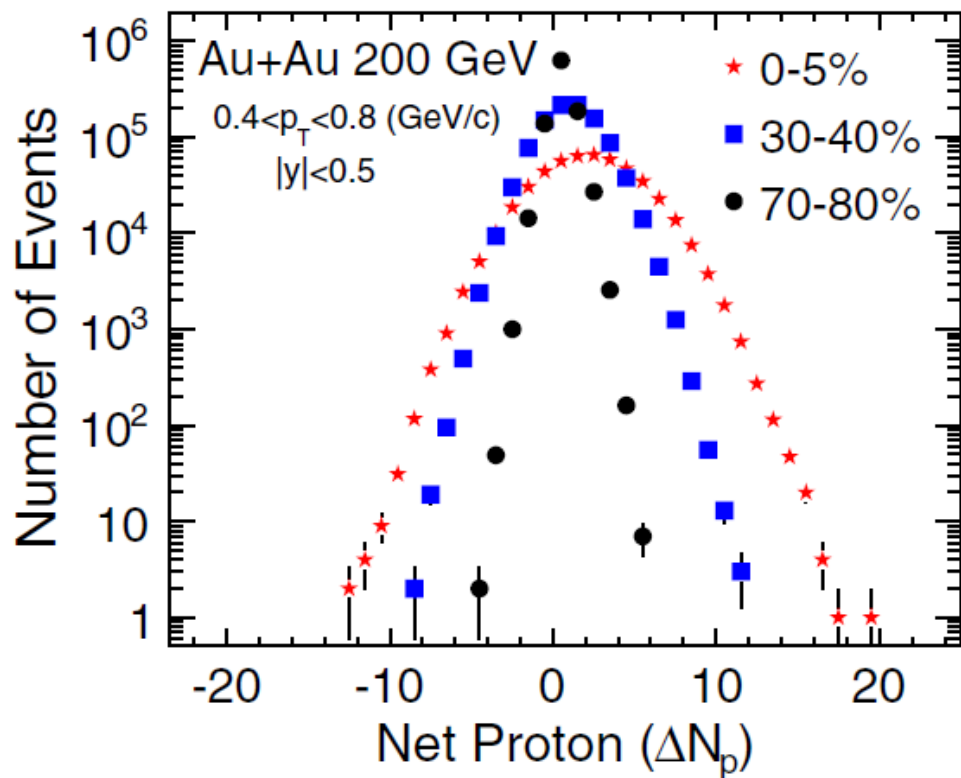


陽子数4,3次キュムラント
STAR (2015)

- 初期熱力学・QCD臨界点探索の切り札
- 近年、活発な実験的・理論的研究

レビュー: Asakawa, MK, PPNP, 2016

保存電荷のイベント毎ゆらぎ



ヒストグラムを特徴づける量

キュムラント

$$\langle N^n \rangle_c$$

□ Variance: $\langle \delta N^2 \rangle = V \chi_2 = \sigma^2$

□ Skewness: $S = \frac{\langle \delta N^3 \rangle}{\sigma^3}$

□ Kurtosis: $\kappa = \frac{\langle \delta N^4 \rangle - 3\langle \delta N^2 \rangle^2}{\chi_2 \sigma^2}$

検出効率



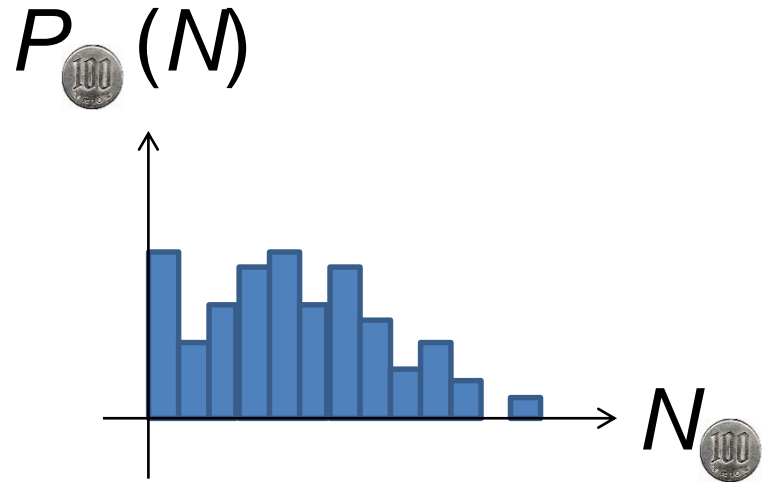
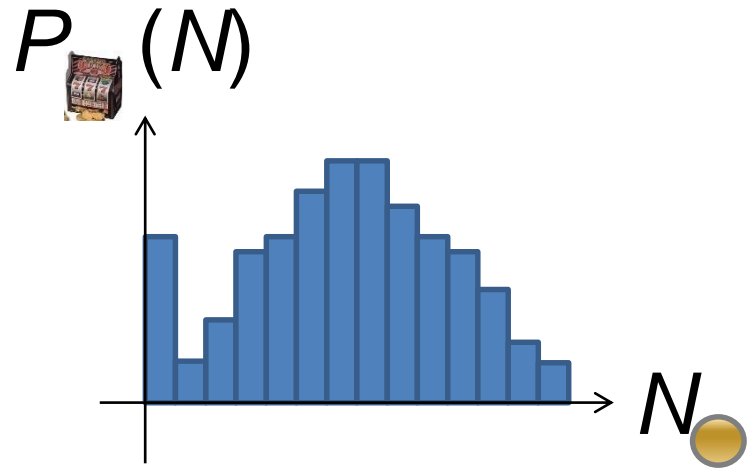
検出器は、到達した全ての粒子を
検出できるわけではない

検出効率 ε
ある粒子が検出される確率



観測量に対する適切な検出効率補正は、実験解析に不可欠

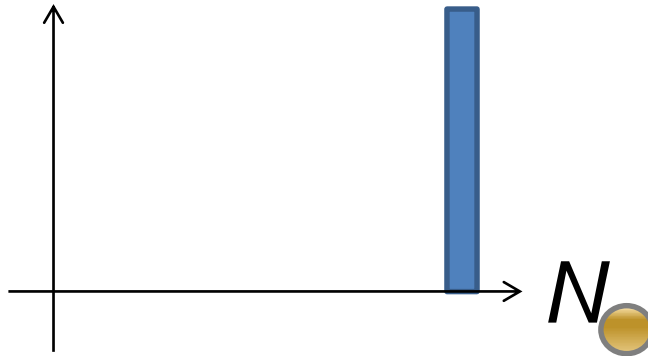
Slot Machine Analogy



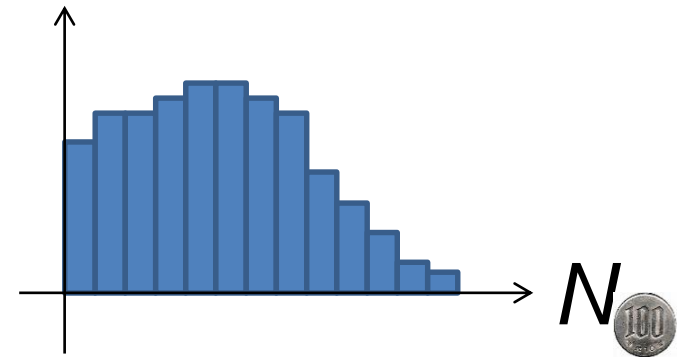
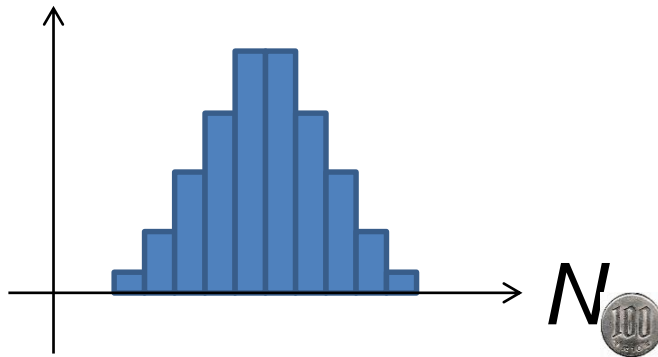
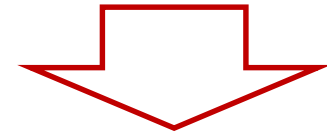
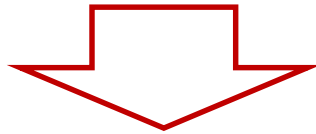
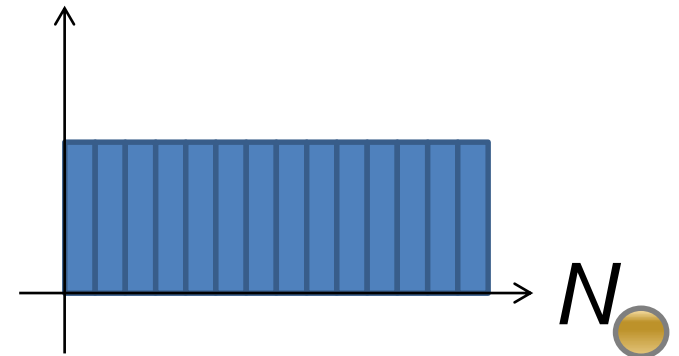
Slot Machine Analogy



Fixed # of coins



Constant probabilities



When efficiency for individual particles are **independent**

$$P_{\text{obs}}(n) = \sum_N B_p(n; N) P(N)$$

dist. func. of
observed particle #

binomial
dist. func.

dist. func. of
original particle #

The cumulants connected with each other

$$\langle n^m \rangle_c \longleftrightarrow \langle N^m \rangle_c$$

$$\langle n^m \rangle_c \longleftrightarrow \langle N^m \rangle_c$$

$$\langle N^m \rangle_c \rightarrow \langle n^m \rangle_c$$

$$\langle n \rangle = \xi_1 \langle N \rangle,$$

$$\langle n^2 \rangle_c = \xi_1^2 \langle N^2 \rangle_c + \xi_2 \langle N \rangle,$$

$$\langle n^3 \rangle_c = \xi_1^3 \langle N^3 \rangle_c + 3\xi_1\xi_2 \langle N^2 \rangle_c + \xi_3 \langle N \rangle,$$

$$\langle n^4 \rangle_c = \xi_1^4 \langle N^4 \rangle_c + 6\xi_1^2\xi_2 \langle N^3 \rangle_c + (3\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_3) \langle N^2 \rangle_c + \xi_4 \langle N \rangle,$$

$$\langle n^m \rangle_c \rightarrow \langle N^m \rangle_c$$

$$\langle N \rangle = \xi_1^{-1} \langle n \rangle,$$

$$\langle N^2 \rangle_c = \xi_1^{-2} \langle n^2 \rangle_c - \xi_2 \xi_1^{-3} \langle n \rangle,$$

$$\langle N^3 \rangle_c = \xi_1^{-3} \langle n^3 \rangle_c - 3\xi_2 \xi_1^{-4} \langle n^2 \rangle_c + (3\xi_2^2 \xi_1^{-5} - \xi_3 \xi_1^{-4}) \langle n \rangle,$$

$$\langle N^4 \rangle_c = \xi_1^{-4} \langle n^4 \rangle_c - 6\xi_2 \xi_1^{-5} \langle n^3 \rangle_c + (15\xi_2^2 \xi_1^{-6} - 4\xi_3 \xi_1^{-5}) \langle n^2 \rangle_c$$

$$- (15\xi_2^3 \xi_1^{-7} - 10\xi_2 \xi_3 \xi_1^{-6} + \xi_4 \xi_1^{-5}) \langle n \rangle,$$

Formulas using factorial moments: Bzdak, Koch, 2012

複数の検出効率の問題

- 全ての保存電荷は、異なる検出効率で検出される
粒子数の線形結合で与えられる

例1: バリオン数

$$N_B = N_p - N_{\bar{p}} + N_n - N_{\bar{n}} + \dots$$

例2: 電氣的電荷数

$$N_Q = N_{\pi^+} - N_{\pi^-} + N_p - N_{\bar{p}} + N_{K^+} + \dots$$

- 各粒子の検出効率が異なる場合、個別の検出効率を適切に取り扱う必要がある

二項分布モデルの複数粒子への拡張

□ 2種類の場合(粒子+反粒子)

MK, Asakawa, 2012

$$\tilde{P}(n_1, n_2) = \sum_{N_1, N_2} B_{p_1}(n_1; N_1) B_{p_2}(n_2; N_2) P(N_1, N_2)$$

□ 一般のM種への拡張

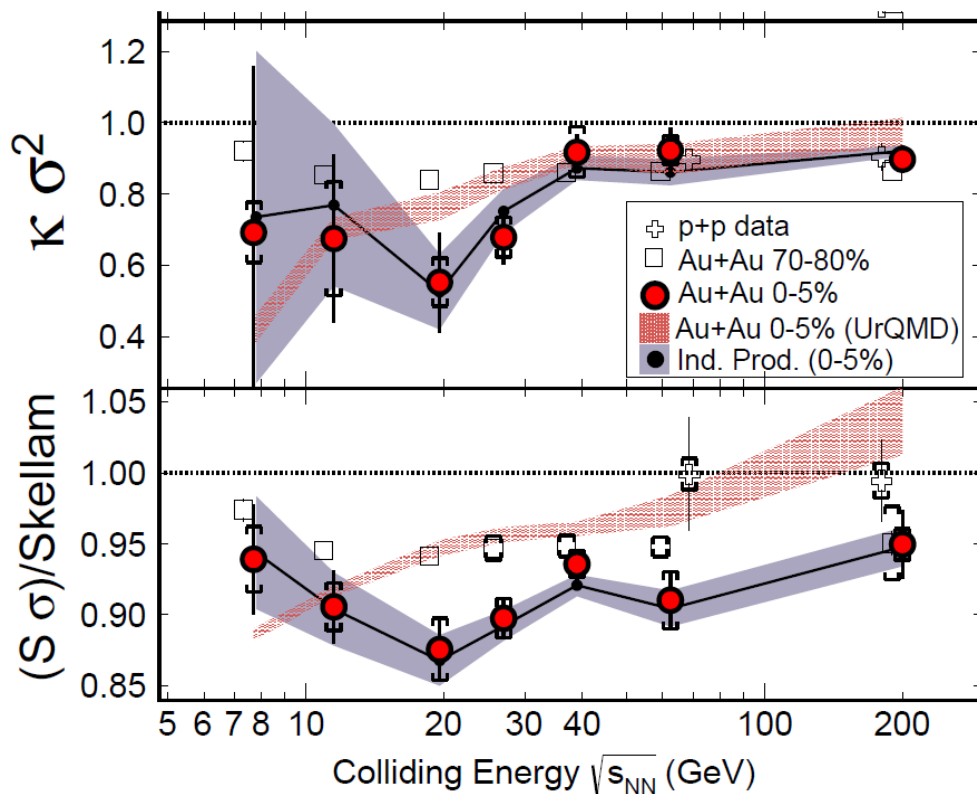
Luo, 2014

Bzdak, Koch, 2015

$$\tilde{P}(n_1, \dots, n_M) = \sum_{N_1, \dots, N_M} \left(\prod_i B_{p_i}(n_i; N_i) \right) P(N_1, \dots, N_M)$$

解析の例

STAR, PRL2014



陽子・反陽子に、
平均した検出効率を使用
(Bzdak, Kochの式)



期待値(1次のキュムラント)
の再現すら不可能

cf, Nonaka+, 1604.06212

検出効率の p_T 依存性

□陽子数

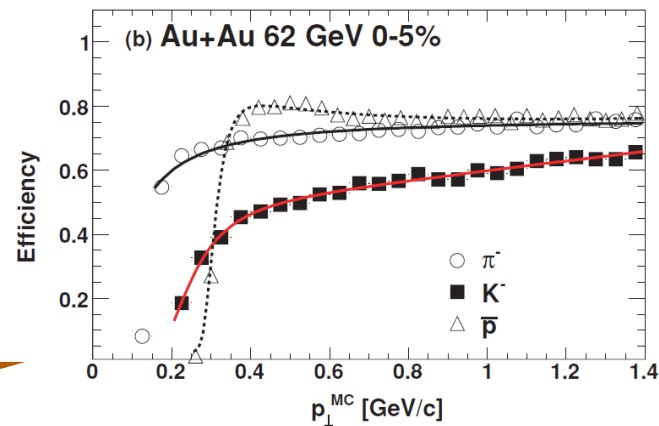
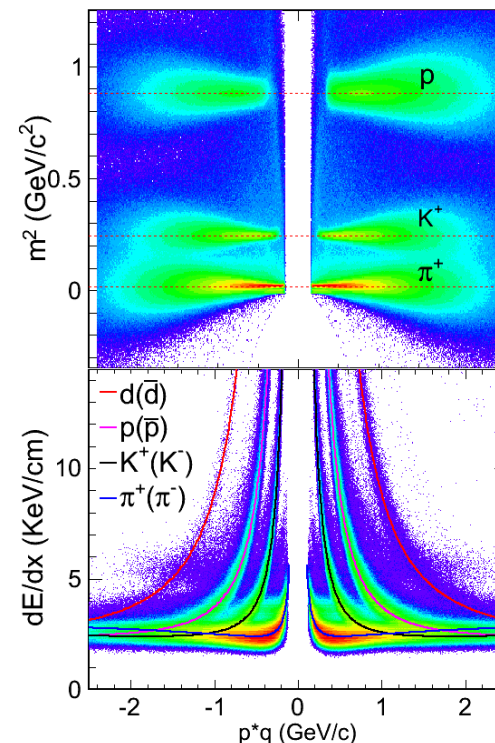
STAR, net proton

$p_T < 0.8 \text{ GeV}$
TPC $\varepsilon \sim 80\%$
 $p_T > 0.8 \text{ GeV}$
TPC+TOF $\varepsilon \sim 50\%$

□ そもそも、検出効率は p_T に依存する



全ての検出効率を独立に扱いたい



□ ファクトリアルモーメントを用いる

Fモーメント間の関係式 in 二項分布モデル

$$\langle n_i^m \rangle_f = p_i^m \langle N_i^m \rangle_f, \quad \langle n_i^m n_j^l \rangle_f = p_i^m p_j^l \langle N_i^m N_j^l \rangle_f, \dots$$

□ 検出効率補正のアルゴリズム

- ① 対称のキュムラントを、Fモーメントに分解
- ② n のFモーメントを実験データから計算
- ③ この結果を検出効率で割ることで、 N のFモーメントに変換
- ④ Fモーメントを組み合わせて、キュムラントを構成

□ 問題点：計算コストの増大

• M 変数

• n 次キュムラント



$$\binom{M+n}{n}^{-1} \rightarrow M^n$$



計算コストの
急速な増大

$$\begin{aligned}\langle Q \rangle_c &= \langle\langle q_{(1)} \rangle\rangle_c, \\ \langle Q^2 \rangle_c &= \langle\langle q_{(1)}^2 \rangle\rangle_c - \langle\langle q_{(2)} \rangle\rangle_c, \\ \langle Q^3 \rangle_c &= \langle\langle q_{(1)}^3 \rangle\rangle_c - 3\langle\langle q_{(2)}q_{(1)} \rangle\rangle_c + \langle\langle 3q_{(2,1|2)} - q_{(3)} \rangle\rangle_c, \\ \langle Q^4 \rangle_c &= \langle\langle q_{(1)}^4 \rangle\rangle_c - 6\langle\langle q_{(2)}q_{(1)}^2 \rangle\rangle_c + 12\langle\langle q_{(2,1|2)}q_{(1)} \rangle\rangle_c \\ &\quad + 6\langle\langle q_{(1,1|2)}q_{(2)} \rangle\rangle_c - 4\langle\langle q_{(3)}q_{(1)} \rangle\rangle_c - 3\langle\langle q_{(2)}^2 \rangle\rangle_c \\ &\quad + \langle\langle -18q_{(2,1,1|2,2)} + 6q_{(2,1,1|3)} + 4q_{(3,1|2)} \\ &\quad + 3q_{(2,2|2)} - q_{(4)} \rangle\rangle_c,\end{aligned}$$

$$Q = \sum_{i=1}^M a_i N_i$$

linear combination of
original particle numbers

$$q_{(\dots)} = \sum_{i=1}^M c_{(\dots)}^{(i)} n_i$$

linear combination of
observed particle numbers

Numerical Cost

For n th order and M variables

- ❑ F-moment method $\sim \mathcal{O}(M^n)$
 - ❑ Our method $\sim \mathcal{O}(M)$
- for $M \rightarrow \infty$

Derivation

(1) Cumulant expansion

$$\ln \langle e^N \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle N^m \rangle_c$$

(2) “Linearity” of binomial distribution

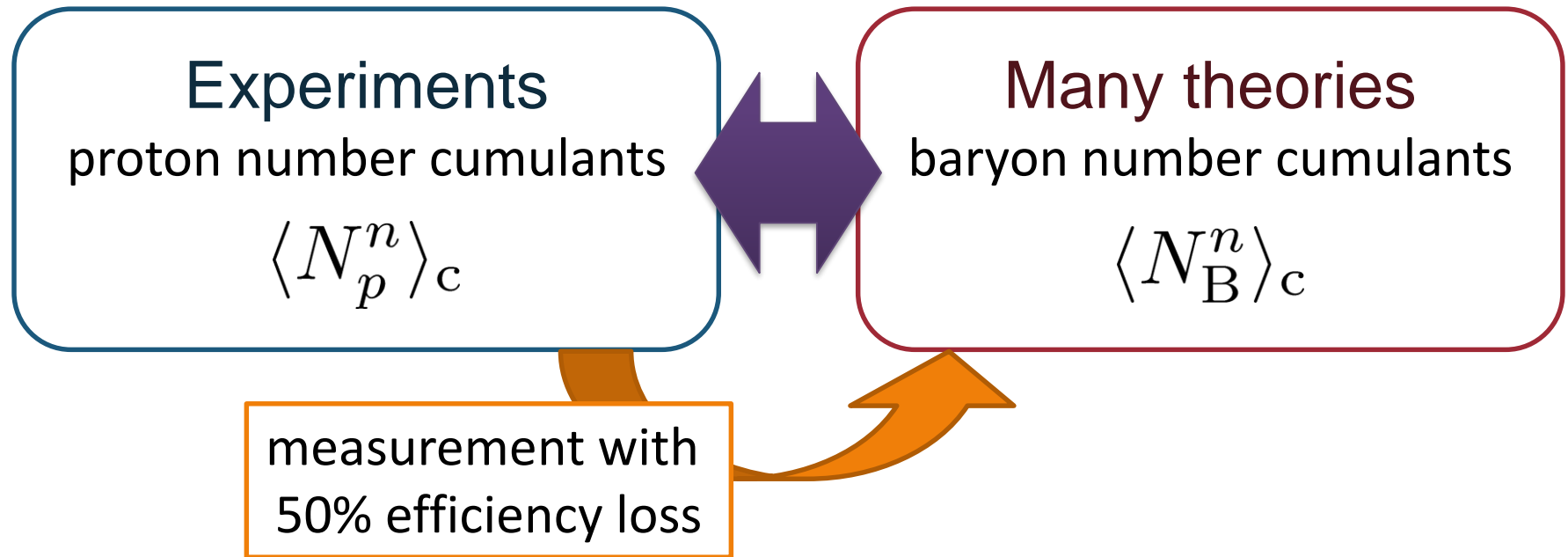
$$\langle n^m \rangle_{c, \text{binomial}} = \xi_n(p) N \quad \text{for } B_{p, N}(n)$$

$$\tilde{K}(\theta) = \ln \langle e^{k_{\text{binomial}}(\theta) N} \rangle = \sum_m \frac{1}{m!} \langle (k_{\text{binomial}}(\theta) N)^m \rangle_c$$

(3) Treating multi-variable dist. func.

Proton v.s. Baryon Number Cumulants

MK, Asakawa, 2012; 2012



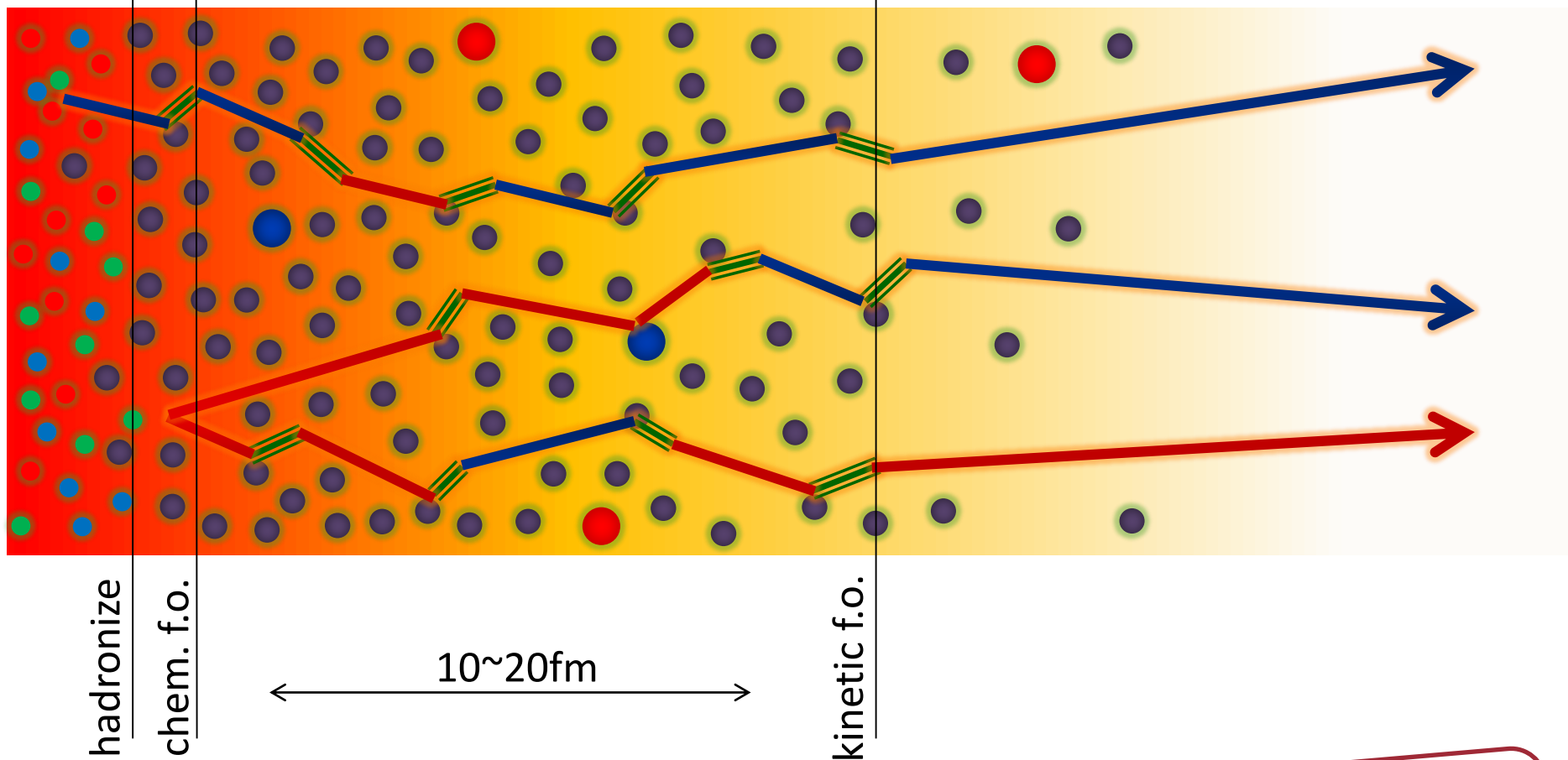
- ❑ The difference would be large.
- ❑ Reconstruction of $\langle N_B^n \rangle_c$ is possible using the binomial model.
- ❑ The use of binomial model is justified by “isospin randomization.”

まとめ

- 高次キュムラントの実験的測定は決して自明な問題ではない。未だ多くの課題と不確定性を残している。
- 高次キュムラントの検出効率補正の問題は、最近議論され始めた新しい問題。重要な問題だが、議論は進行中。
- 複数種の粒子数の線形結合からなる観測量の高次キュムラントの検出**効率補正**を、**効率的**に遂行する方法論を提案した。
- 二項分布モデルは、あくまでもモデルであることに注意。

Baryons in Hadronic Phase

time →








hadronize

chem. f.o.

10~20fm

kinetic f.o.

-  p, \bar{p}
-  n, \bar{n}
-  $\Delta(1232)$
-  mesons
-  baryons

Baryons behave like
Brownian pollens in water