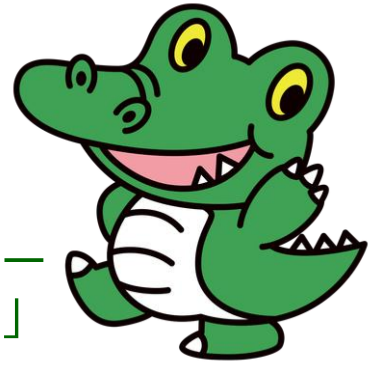
ファクトリアルキュムラントを用いた初期キュムラントの解析

北沢正清（阪大理）

MK, to appear soon

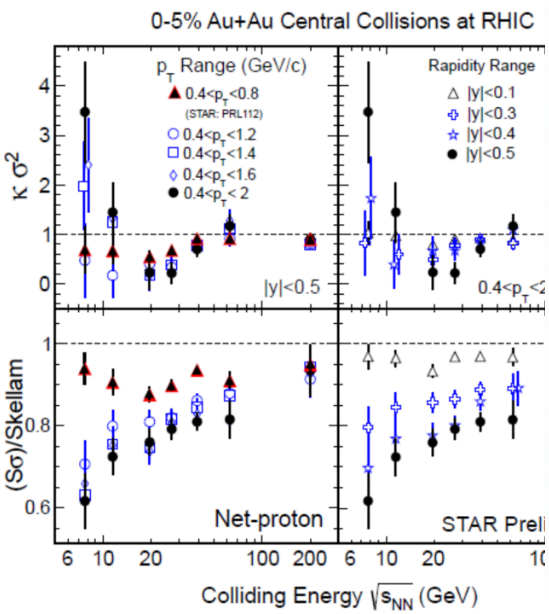
大阪大学公式キャラクター
「ワニ博士」



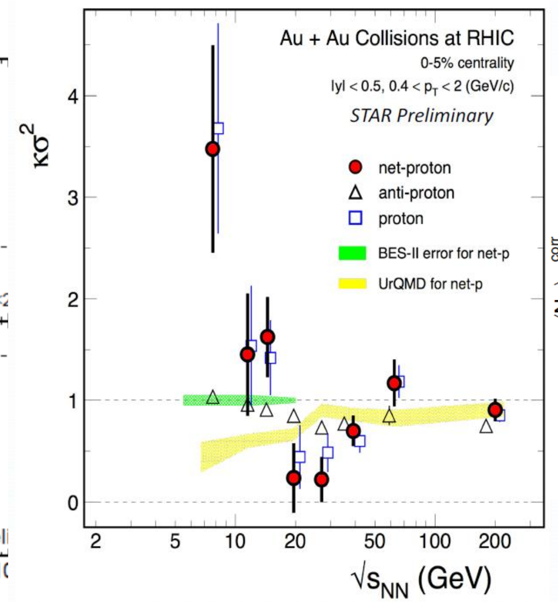
イベント毎ゆらぎ

大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

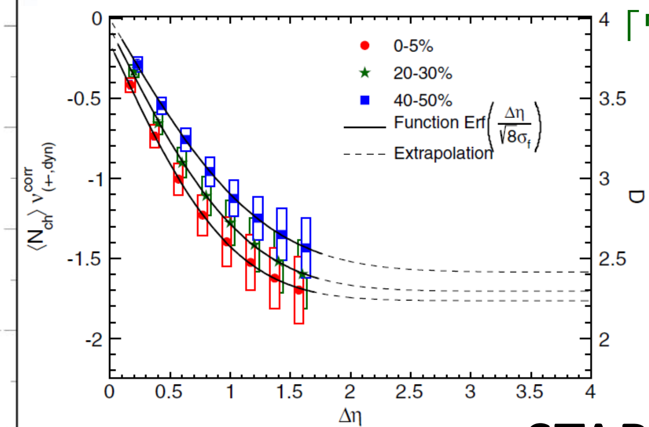
STAR ('15)



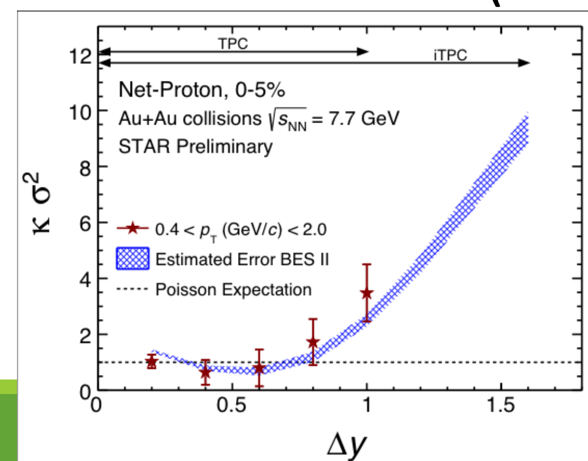
STAR ('17)



ALICE('13)

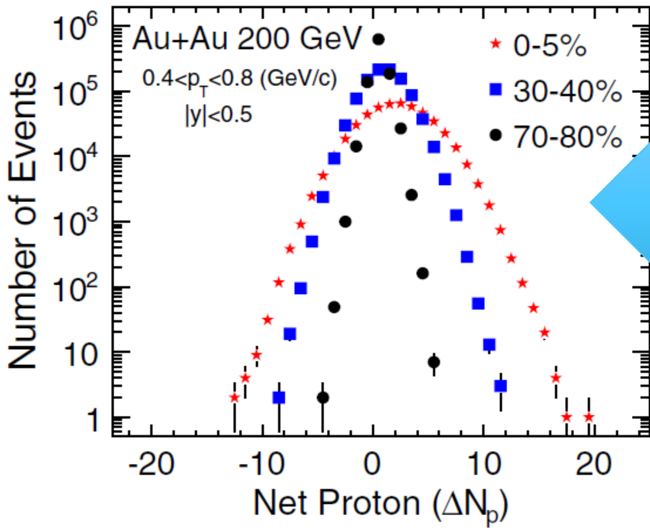


STAR ('15)



- 高次ゆらぎ＝非ガウス性
- QCD臨界点探索の切り札
- 活発な実験的観測

キュムラント ＝ゆらぎを特徴づける便利な量



$$\langle N^m \rangle_c$$

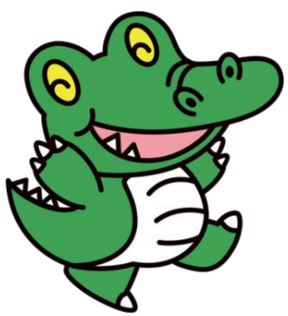
$$\langle N \rangle_c = \langle N \rangle$$

$$\langle N^2 \rangle_c = \langle \delta N^2 \rangle$$

$$\langle N^3 \rangle_c = \langle \delta N^3 \rangle$$

キュムラントの有用性

- 2次キュムラント＝分散
- 平衡状態のキュムラントは示量変数
- 熱力学関数と直結、微分による解釈 Asakawa, Ejiri, MK, '09
- ガウス：３次以上ゼロ／ポアソン：全次数等しい



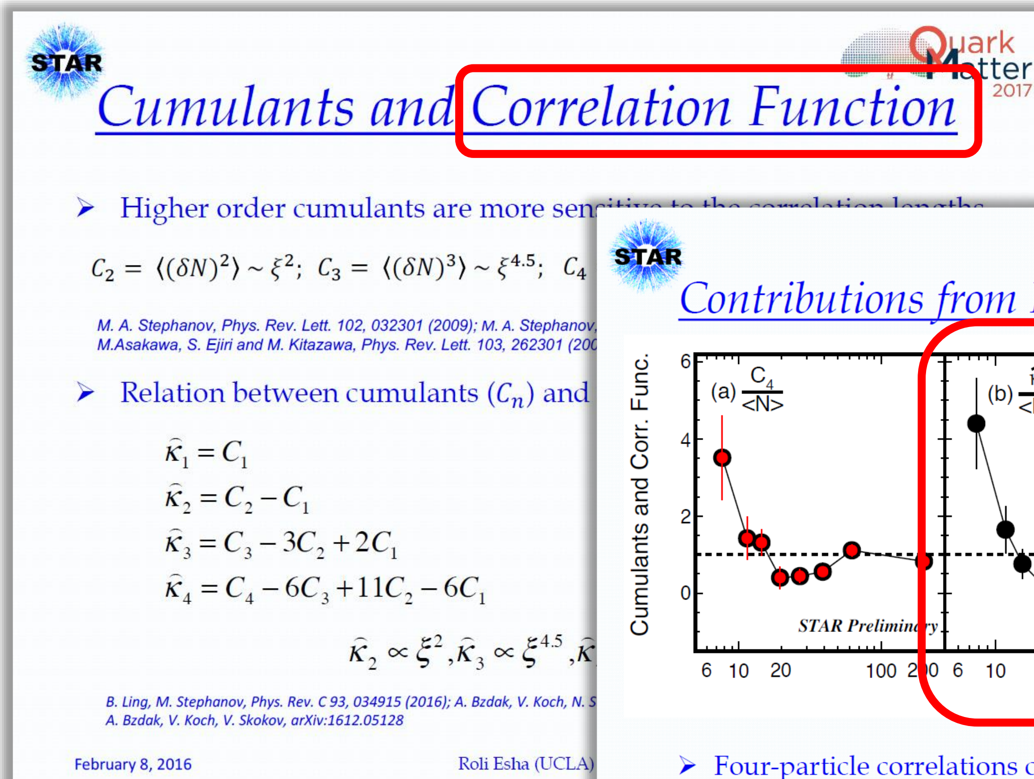
大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

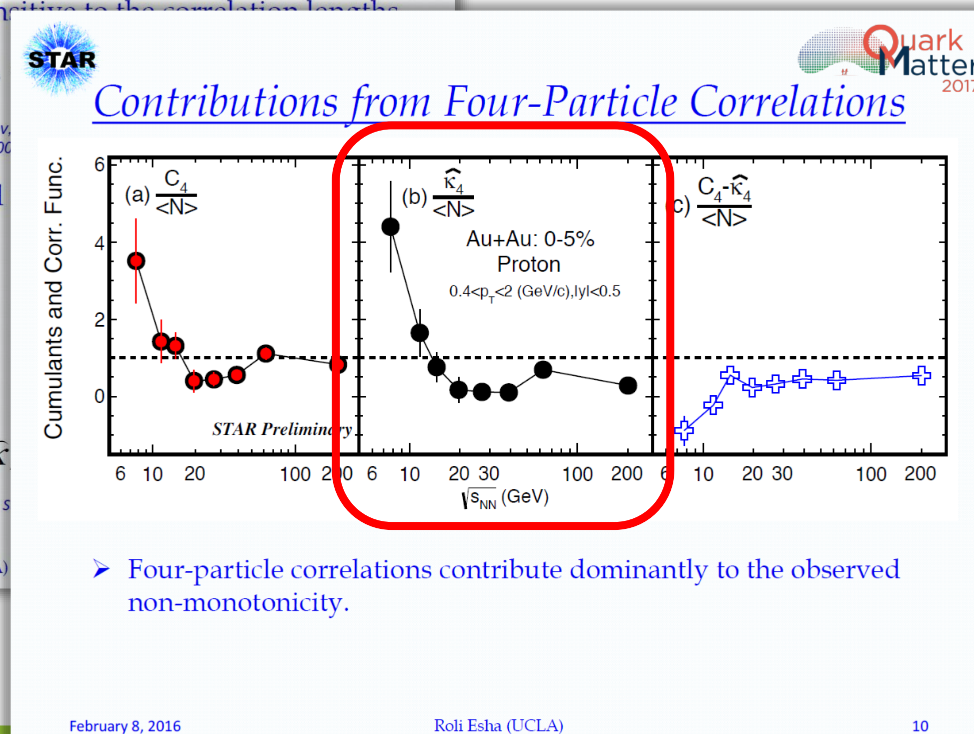
レビュー：Asakawa,MK, PPNP (2016)

最近、

ファクトリアルキュムラント

と呼ばれる量がにわかに注目されている。





Ling, Stephanov ('16)
Bzdak, Koch, Strodhoff ('16)
参考:MK+('14), MK('15)

R. Esha (STAR)
QM2017

大阪大学公式キャラクター
「ワニ博士」

Fキュムラントとは何か？

$$\langle N\rangle_{\mathrm{fc}} = \langle N\rangle_{\mathrm{c}}$$
$$\langle N^2\rangle_{\mathrm{fc}} = \langle N(N-1)\rangle_{\mathrm{c}}$$
$$\langle N^3\rangle_{\mathrm{fc}} = \langle N(N-1)(N-2)\rangle_{\mathrm{c}}$$
$$\langle N^m\rangle_{\mathrm{fc}} = \langle N(N-1)\cdots(N-m+1)\rangle_{\mathrm{c}}$$

のようにキュムラントから定義される量

大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

母関数を使っても定義可能

$$K_{\mathrm{f}}(s) \equiv \ln\langle(1+s)^N\rangle = \sum_m \frac{s^m}{m!}\langle N^m\rangle_{\mathrm{fc}}$$

測って何が嬉しいのか①

Fキュムラント＝自明な相関を取り除いたキュムラント

相関関数

$$C(x,y) = \langle \delta n(x) \delta n(y) \rangle$$

キュムラント

$$\langle N^2 \rangle_{\mathrm{c}} = \int_{\Delta} dx dy C(x,y)$$

古典粒子系では

$$C(x,y) = C^*(x,y) + \langle n(x) \rangle \delta(x-y)$$

Fキュムラント

$$\langle N^2 \rangle_{\mathrm{fc}} = \int_{\Delta} dx dy C^*(x,y)$$

- この関係は、古典粒子系でのみ成立
- 粒子種が変化する場合は、解釈が困難
- 結局、相関はどのように解析するのか？

大阪大学公式キャラクター
「ワニ博士」

測って何が嬉しいのか②

Dy依存性のベキ乗則

Ling, Stephanov, 2016

- m次ファクトリアルキュムラントは、Dy→0で、$(Dy)^m$に比例する。

$$\langle N^2\rangle_{\rm fc} = \int_\Delta dx dy C^*(x,y)$$

$$\langle N^3\rangle_{\rm fc} = \int_\Delta dx dy dz C^*(x,y,z)$$

$$\langle N^2\rangle_{\rm fc} = C_2^* \Delta^2$$

$$\langle N^3\rangle_{\rm fc} = C_3^* \Delta^3$$

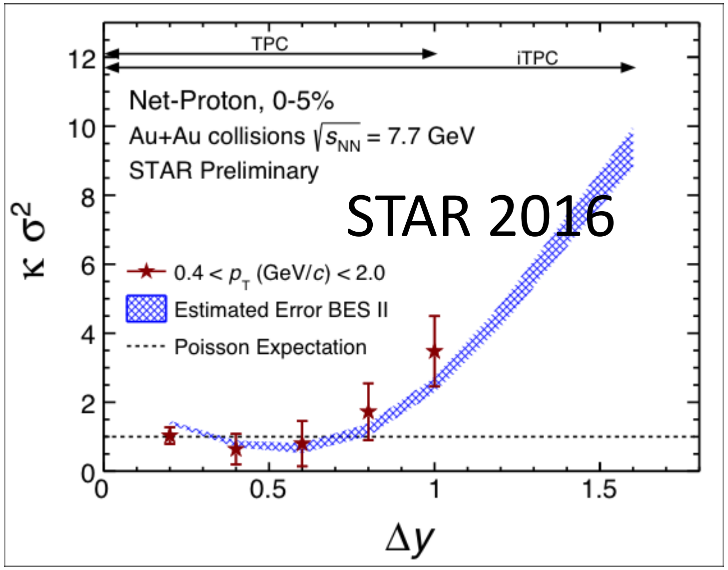
微少領域Δ内ではC*が
定数と見なせるから、

- ベキ乗則は、臨界点とは無関係
- So what??

大阪大学公式キャラクター
「ワニ博士」

これまでの議論の問題点

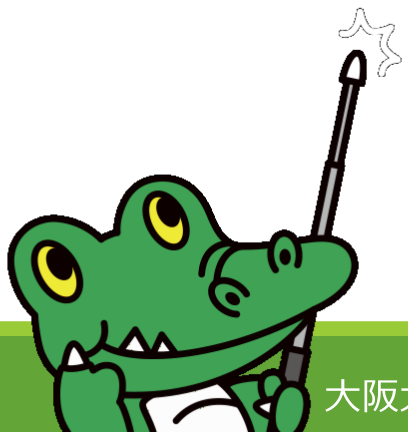
- Fキュムラントを使うメリットが見えない。
- キュムラントとFキュムラントが混乱して使われている。
- 誤った議論が散見される。
- 単一粒子種のFキュムラントのみしか議論されていない。



では、Fキュムラントは不要なのか？

提案

ゆらぎの背後に（近似的）二項分布性が
介在する物理が隠されている場合、
Fキュムラントは著しく有用。



大阪大学公式キャラクター「ワニ博士」

多変数系のFキュムラント

確率分布関数

$$P(N_1, N_2, \cdots, N_M)$$

Fキュムラント

$$\langle N_a N_b N_c \rangle_{\rm fc} = \frac{\partial}{\partial s_a}\frac{\partial}{\partial s_b}\frac{\partial}{\partial s_c} K_{\rm f}\Big|_{s=1}$$

$$K_{\rm f} = \ln\langle s_1^{N_1} s_2^{N_2} \cdots s_M^{N_M} \rangle$$

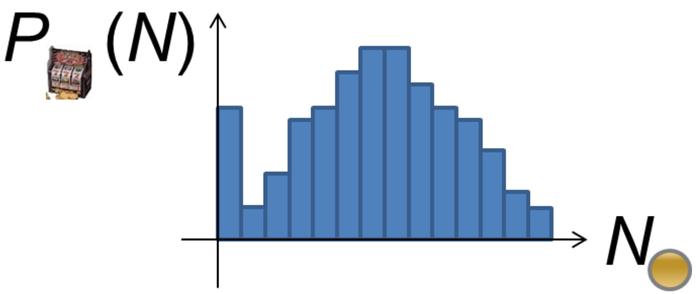
大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

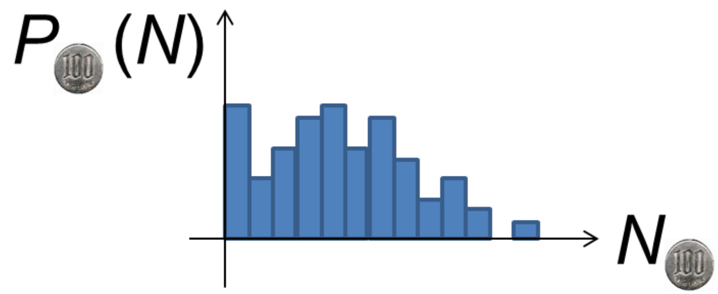
- 「自己相関を除いたキュムラント」の性質は保持
- $\langle Q^m \rangle_{\rm fc} \neq \langle Q(Q-1)\cdots(Q-m+1)\rangle_{\rm c}$

※Q：Nの線形結合

二項分布モデル

大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」





二項分布モデル

$$P_{\rm obs}(n) = \sum_N B_p(n;N)P(N)$$

Fキュムラントの関係式

$$\langle n^m \rangle_{\rm fc} = \langle p^m N^m \rangle_{\rm fc}$$

多変数系：Nonaka, MK, Esumi, 1702.07106

検出効率補正への応用

キュムラント検出効率補正小史

- **最初の提案**
  MK, Asakawa ('12), Bzdak, Koch ('12)
  → 2粒子種しか扱ってない

- **Fモーメントを使った方法**
  Bzdak, Koch ('15), Luo ('15)
  → 数値解析重すぎ

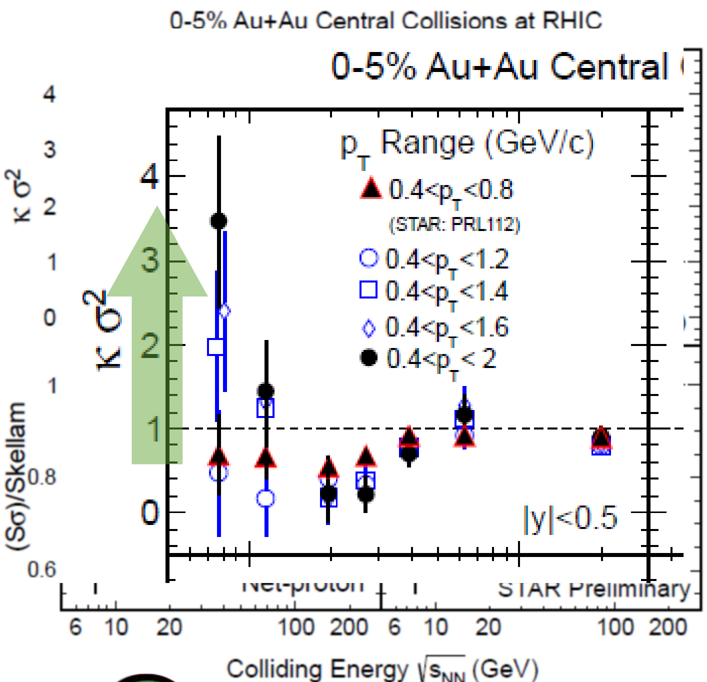
- **キュムラント展開を使った方法**
  MK ('16)
  → 手計算複雑すぎ

- **新しい提案**：Fキュムラントを使った方法
  T. Nonaka, MK, Esumi, 1702.07106

→ **手計算シンプル、かつ低数値コスト**

大阪大学公式キャラクター
「ワニ博士」

運動量カット依存性



４次キュムラントが
p_T領域増加に伴い増大

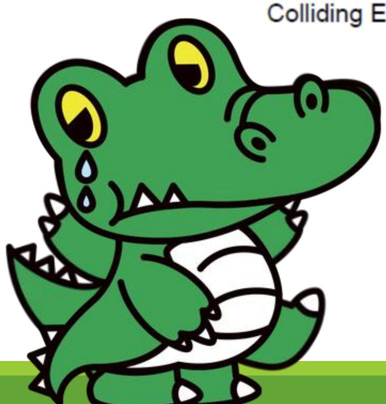
➡ 臨界ゆらぎの観測？

粒子放出の独立性を仮定

$$\frac{\langle n^m \bar{n}^{\bar{m}} \rangle_{\mathrm{fc},p_T}}{\langle n \rangle_{p_T}^m \langle \bar{n} \rangle_{p_T}^{\bar{m}}} = \frac{\langle N^m \bar{N}^{\bar{m}} \rangle_{\mathrm{fc}}}{\langle N \rangle^m \langle \bar{N} \rangle^{\bar{m}}}$$

p_T領域　　　　全領域

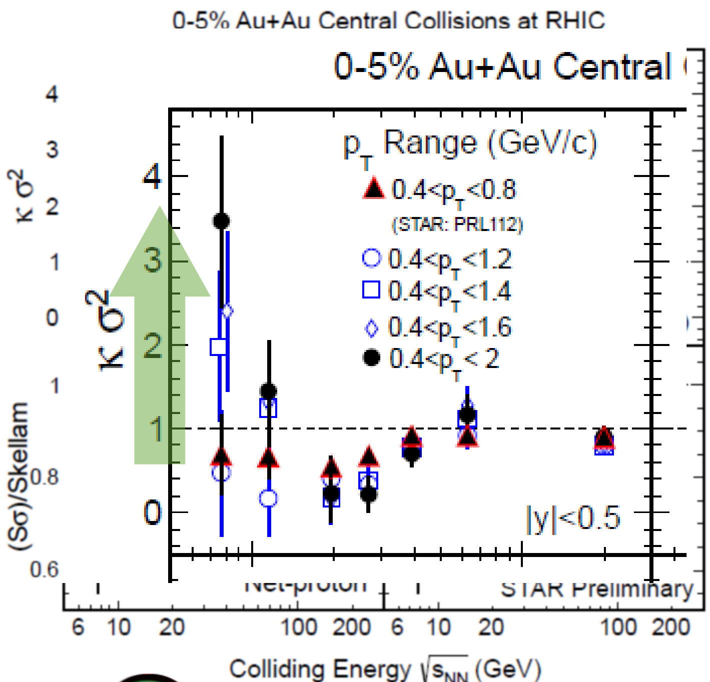
- 粒子放出機構を実験的に検証可能
- 全領域のFキュムラントを再構築可能



大阪大学公式キャラクター「ワニ博士」

➡ キュムラントの構築へ

運動量カット依存性



４次キュムラントが
p_T領域増加に伴い増大

臨界ゆらぎの観測？

粒子放出の独立性を仮定

$$\frac{\langle n^m \bar{n}^{\bar{m}}\rangle_{\mathrm{fc},p_T}}{\langle n\rangle_{p_T}^{m}\langle \bar{n}\rangle_{p_T}^{\bar{m}}} = \frac{\langle N^m \bar{N}^{\bar{m}}\rangle_{\mathrm{fc}}}{\langle N\rangle^{m}\langle \bar{N}\rangle^{\bar{m}}}$$

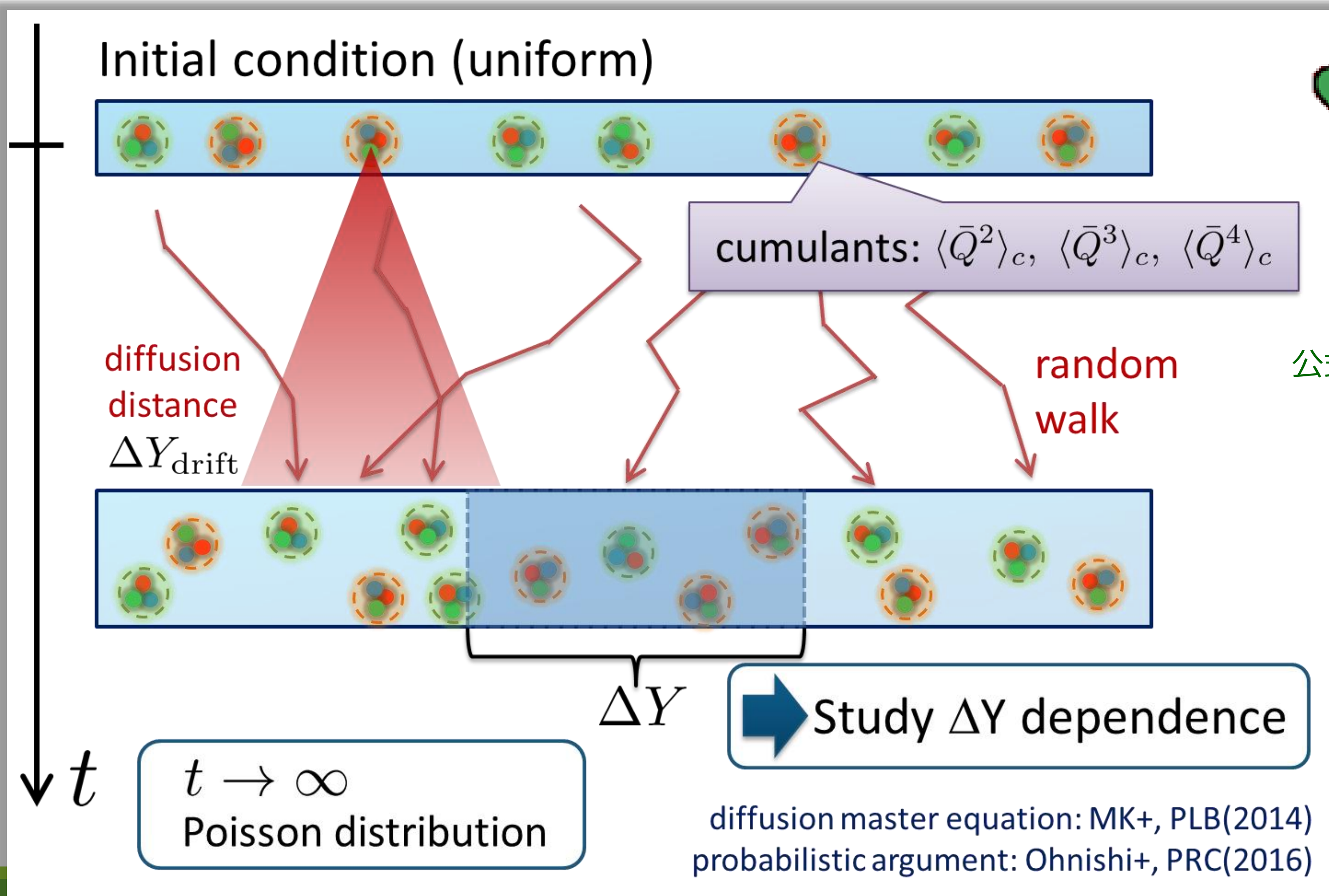
p_T領域　　　　全領域

- 粒子放出機構を実験的に検証可能
- 全領域のFキュムラントを再構築可能

大阪大学公式キャラクター「ワニ博士」

⇒キュムラントの構築へ

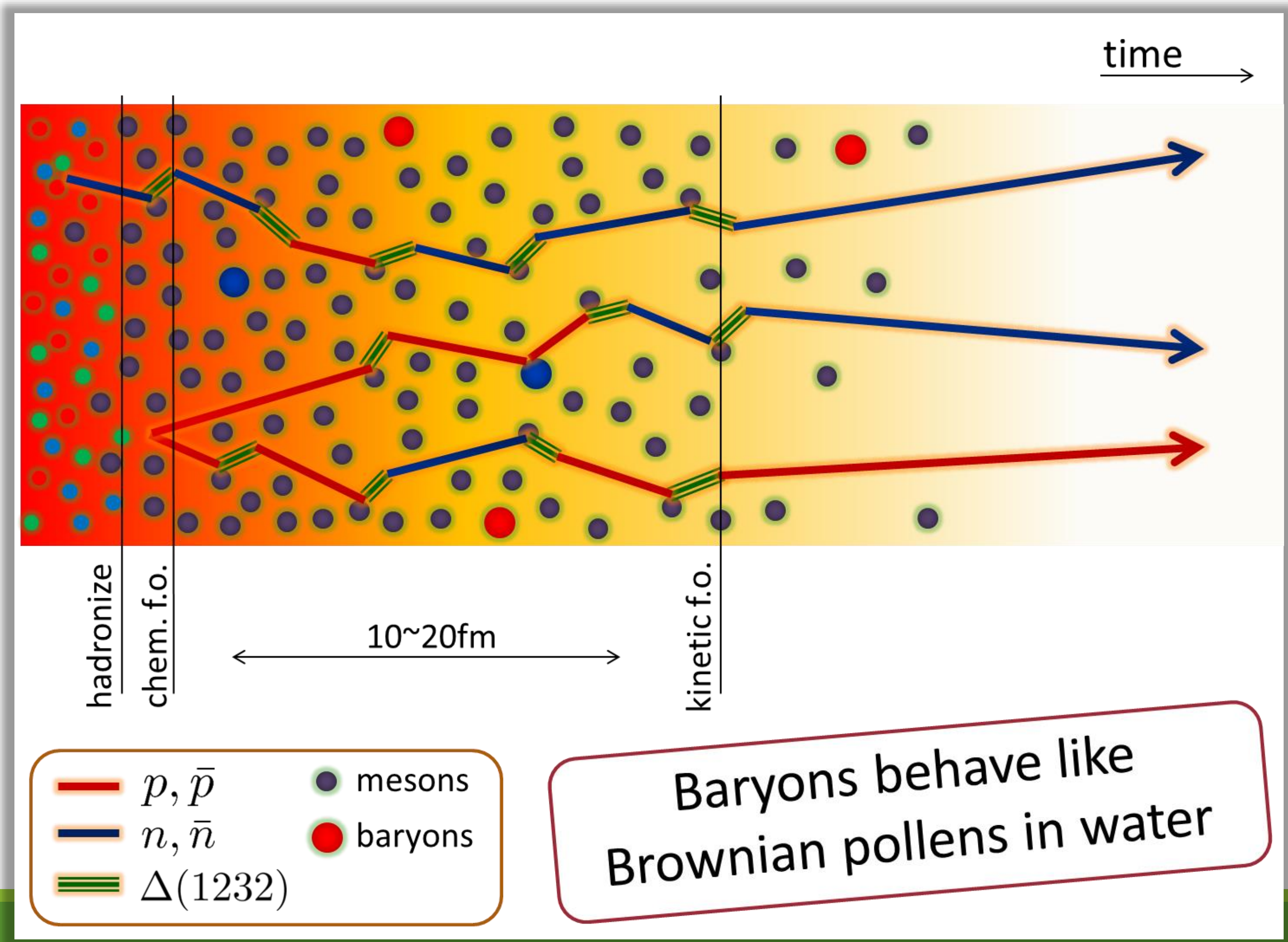
Dy依存性：独立拡散モデル



diffusion master equation: MK+, PLB(2014)
probabilistic argument: Ohnishi+, PRC(2016)

大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

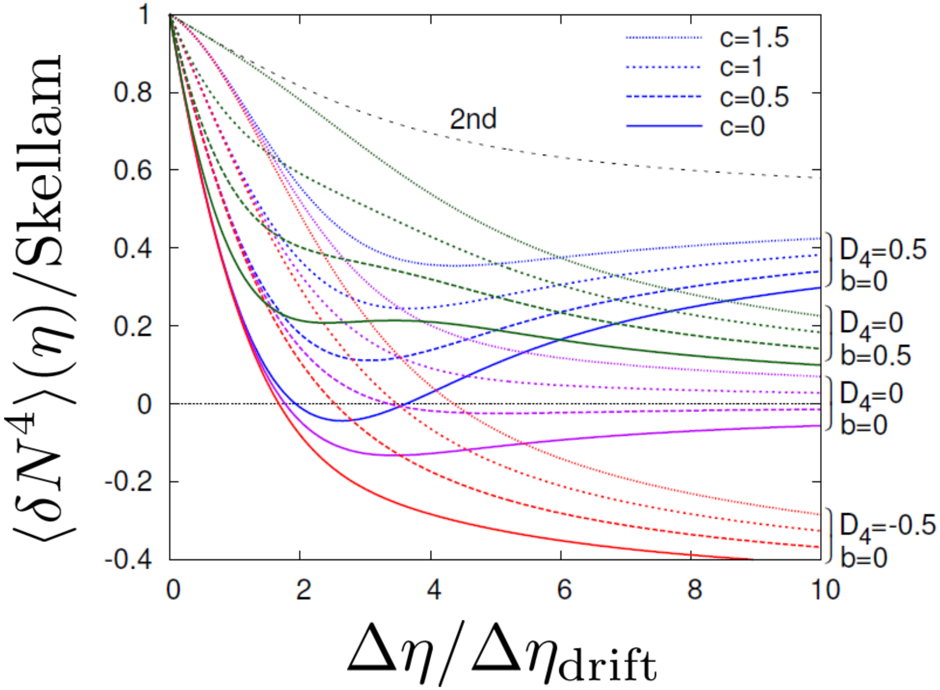
Dy依存性：独立拡散モデル

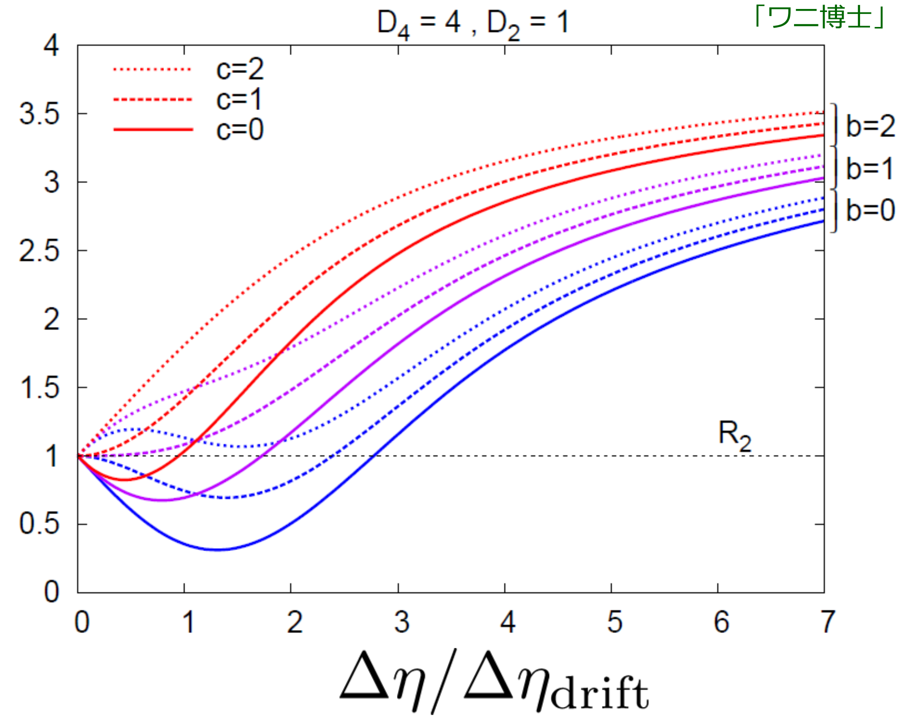


大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」

Dy依存性：キュムラント

大阪大学
公式キャラクター
「ワニ博士」





- 終状態高次キュムラントは、初期条件に応じて振舞いが変化
- Dy依存性から、初期ゆらぎの情報が引き出せるはず

MK, Asakawa, Ohno ('14), MK ('15)

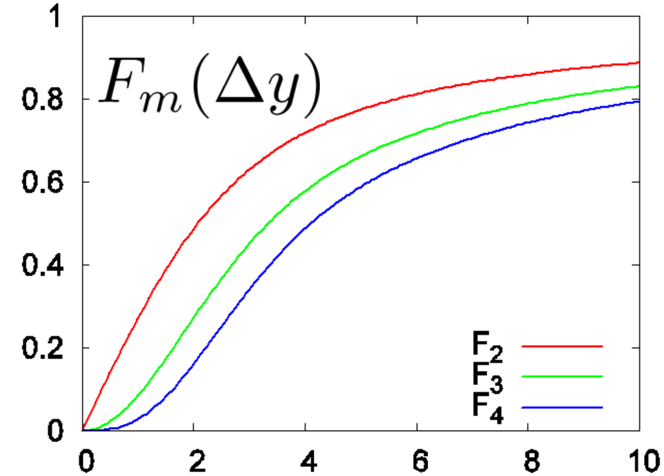
ファクトリアルキュムラント

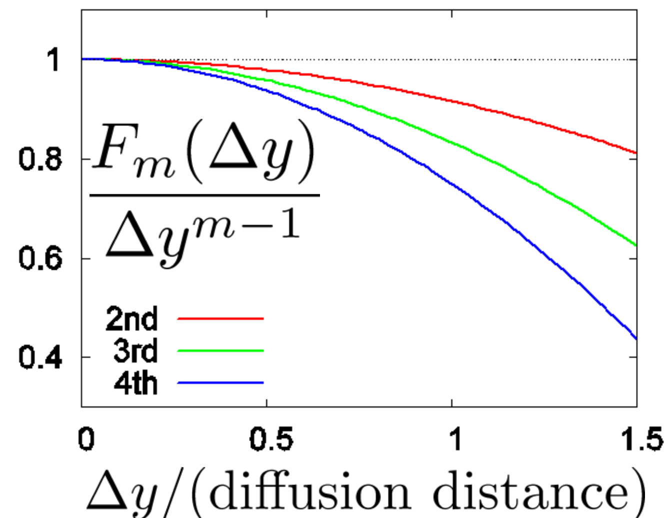
$$\langle n^m \bar{n}^{\bar{m}} \rangle_{\rm fc} = \kappa_{m\bar{m}} \Delta y F_{m+\bar{m}}(\Delta y/d)$$

- FキュムラントのDy依存性は、m+mのみで決まる
- 係数は初期Fキュムラント

- 独立拡散モデルの検証
- 初期Fキュムラントの決定

- 初期キュムラントの決定



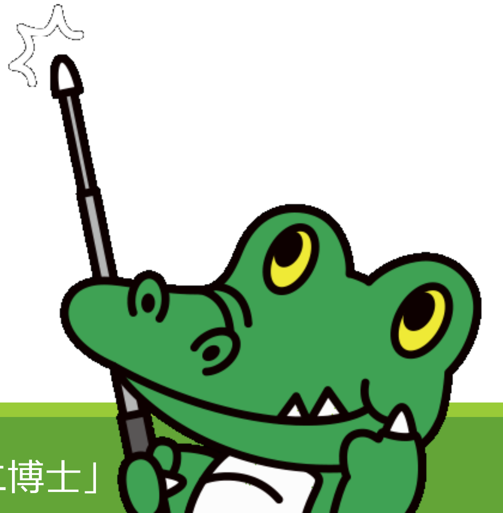


大阪大学公式キャラクター「ワニ博士」

まとめ

- ファクトリアルキュムラントは多粒子種系に拡張可能。
- Fキュムラントそれ自身は明快な物理的意味を持たない。
- ゆらぎの背後に二項分布に関連した機構が内在する場合に、Fキュムラントは有用な役割：
  - 二項分布性（多くは粒子間の無相関性）の検証
  - 喪失した情報の復元
- Fキュムラントの新しい利用法の提案
  - 簡便かつ高効率な検出効率補正
  - 運動量領域依存性
  - Dy依存性を利用した初期ゆらぎの構築

MK, to appear soon



大阪大学公式キャラクター「ワニ博士」