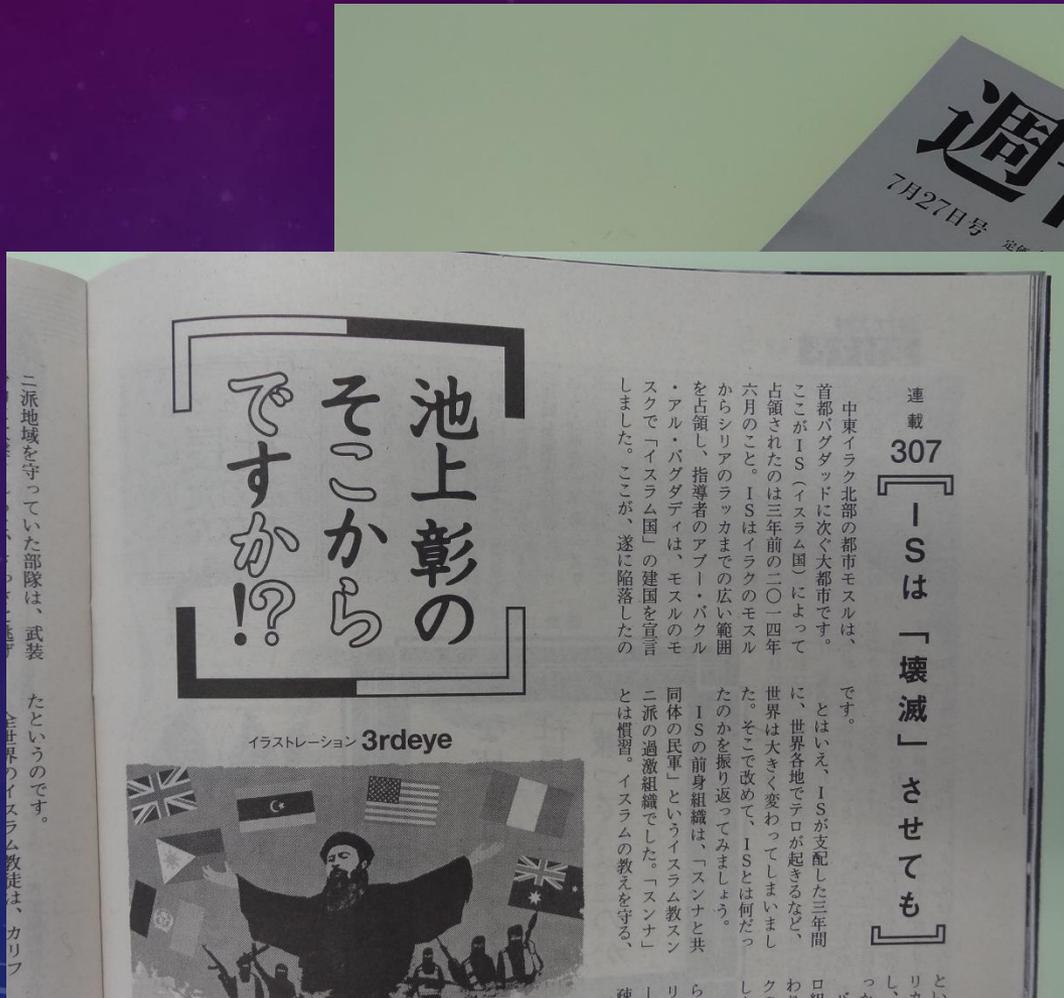


北沢正清の
「格子QCD、
そこから
ですか？」

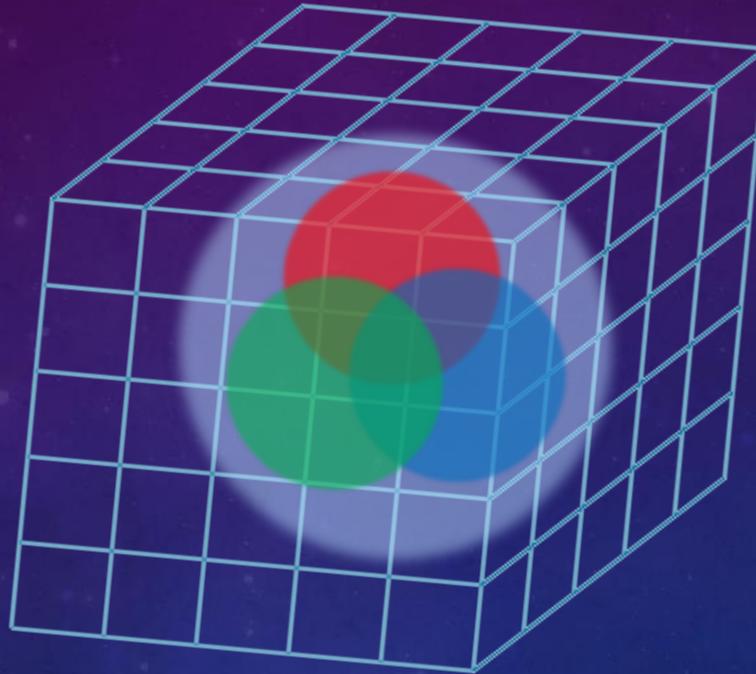
HEAVY-ION PUB, 奈良女子大学、2017年7月25日

タイトルの元ネタ



このトークの対象：格子QCDをよく知らない学生

格子QCD数値シミュレーション

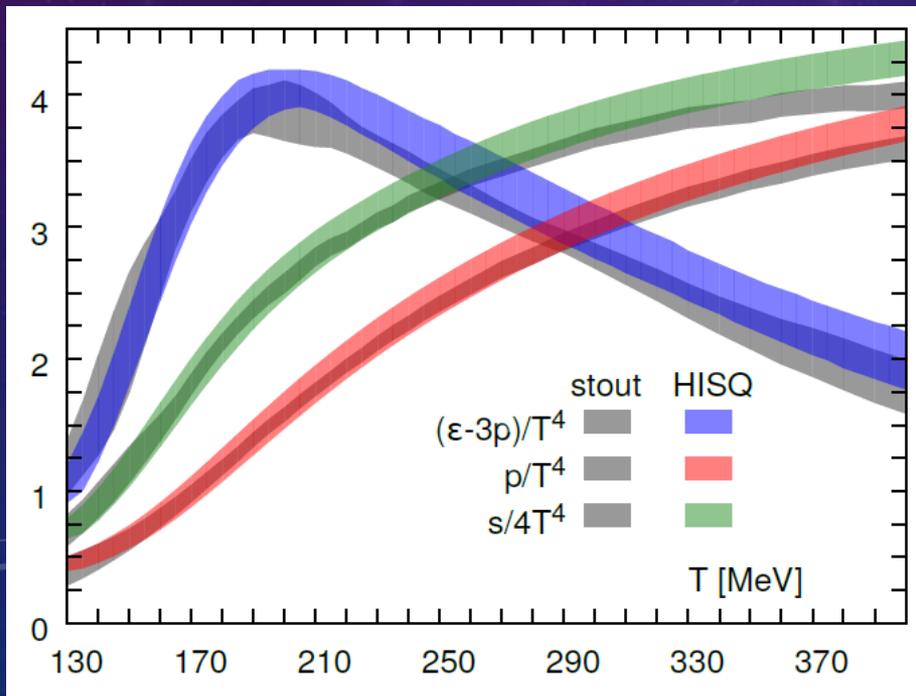
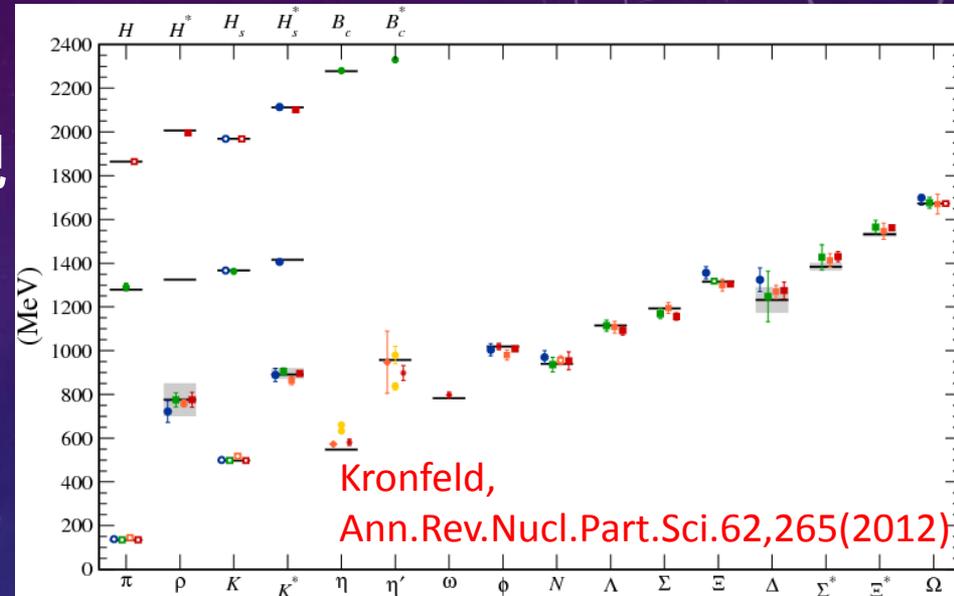


量子色力学 (QCD) を
非摂動的に取り扱う現状唯一の手段

hadron spectra, chiral symmetry, phase transition, etc.

格子QCD数値解析が 成し遂げたこと

ハドロンスペクトルの再現



$\mu=0$ の状態方程式
(エネルギー密度と圧力)

HotQCD Collaboration, PRD90, 094503 (2014)

質問コーナーより

格子QCDでこの量を計算してほしい、という物理量を挙げてください

- 高密度中での**バリオン質量**、そこから**chiral partner**の示唆
- TMDやGPDといった3次元的な**クォーク分布関数**についての物理量を第一原理から計算してほしいです。できればx依存性を含めて。今後のハドロン構造論において実験的にも理論的にも非常に重要で、有効理論や実験との比較や予言をすると面白いと思います。
- 中間子(擬スカラー、ベクター、重クォーク入りのもの等)とバリオン(オクテット+デカプレット等)の**相互作用**(散乱長など)。特に $\eta(958)$ と量子異常の効果なども見られるとうれしいです。
- 核子中の**パートンの分布**(PDF)、特にクォーク質量を考慮した計算
- **phi meson**の**ポール質量**と**スクリーニング質量**を物理的なパイ中間子質量で計算してください。あとは**パイ中間子の分散関係**をいろいろな温度で計算してください。
- あるエネルギースケールでの**粒子の質量**
- 核子やハドロンの質量は計算できると聞きますが、**スピン**は計算できるのでしょうか？
パリティは？
- クォーク、クォーコニウムの**エントロピー**とか**自由エネルギー**とか
- **陽子の荷電半径**
- **散乱振幅**、**崩壊幅**、**陽子の大きさ**
- **スペクトル関数**

「どうして格子QCDではこの量が計算できないんだろう？」とか、「あの議論はどうなったんだろうか？」など、格子QCDに関して日頃から疑問に思っていることを挙げてください。

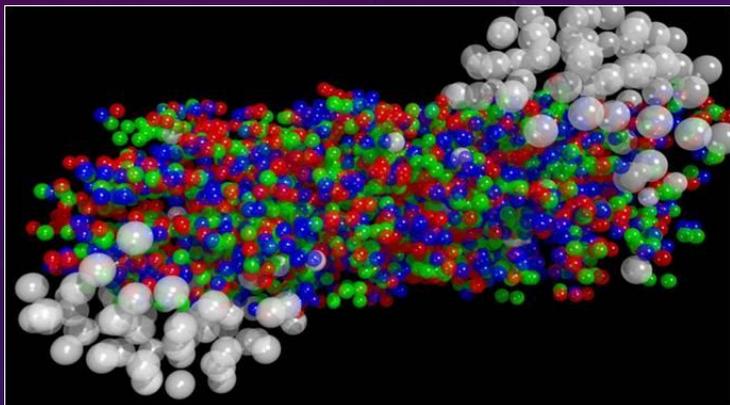
- 有限密度系などで、2つ以上の化学ポテンシャルを導入して格子QCDの計算を行うことができないと聞きました。なぜでしょうか。
- 格子QCDではクォーク分布関数の x 依存性は計算できないとしていて、低次のモーメント計算が一般的ですが、その理由としては格子QCDにはLorentz対称性が存在しないからということを知りましたが、本当でしょうか？このことについてなにか改善する余地はありますか？また、他にも格子QCDでの計算は原理的に不可能だとする物理量はありますか？
- いろいろ「計算できていない」量はあると思うのですが、それらを分類して、横軸を、日付(もしくは計算機の数値などのパラメータ)として、いつごろどの段階で、どのような量が計算可能になるか(もしくは原理的にずっと計算できないか)？がわかるような、分類表のようなものが見てみたいと思います。(できれば、のお願いです。すみません。)
- 符号問題の最近の議論・進展
- いろいろなコラボレーション(WHOTとか)がありますが、どこの名前がとおもいますか？ペンネーム:雲米志亜我例(元名古屋在住)



「どうして格子QCDではこの量が計算できないんだろう？」とか、「あの議論はどうなったんだろうか？」など、格子QCDに関して日頃から疑問に思っていることを挙げてください。

- 格子上でのFermionを考える際、なぜ問題が生ずるのか
- ゲージ場のChern-Simons数
- 格子QCDに向く物理量は何ですか。どうして向く、向かないがありますか。第一原理という点以外の観点から、どうして格子QCDの手法が注目されているのですか。
- なぜ格子に分割する必要がてできたのか。格子QCDによってどんなメリットがあるのか。
- 格子にする利点とは何ですか？
- 格子によって最小に区切られている”量？もの？”は、結局何だと言えるのでしょうか。
- 遅い回答となり申し訳ありません。格子QCD初心者でほとんど知識がないのですが、格子QCDを用いることで計算できるようになった物理量はどんなものがあるのでしょうか。またそれからどのような物理が得られたのでしょうか。漠然とした質問で申し訳ありませんがざっくりで良いので教えていただきたいと思っております。よろしくお願い致します。

格子QCD、できたらいいな ～原子核衝突分野から見て～



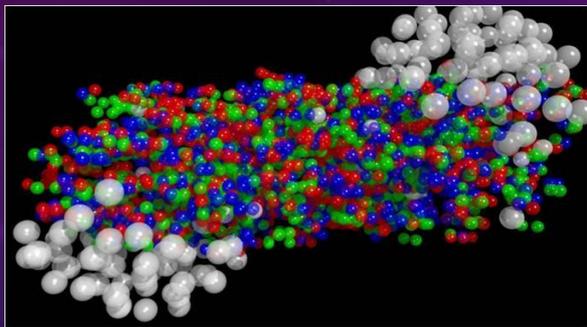
原子核衝突
まるごとシミュレーション



QCD相図の決定
QCD臨界点の位置を決める



格子QCD、できたらいいな ～原子核衝突分野から見て～

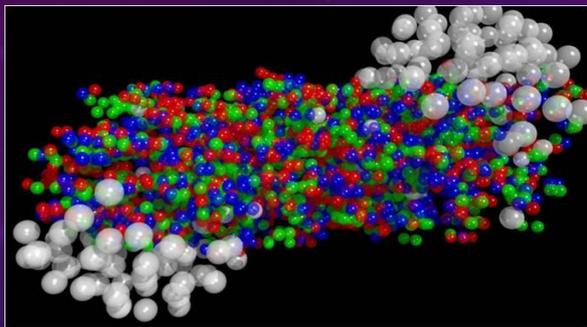


③: できる
②: いずれは
①: 絶望的

- 始状態の原子核なら作れる? ①
- $Z < 10$ 程度の軽イオンなら... ①
- 核子1個なら...
 - 質量 ③
 - 大きさの測定とか ①
 - パarton分布関数 ①
 - 1核子状態の記述 ①
- 核力 ②



格子QCD、できたらいいな ～原子核衝突分野から見て～

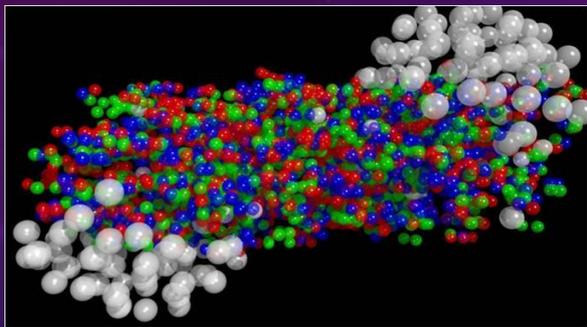


③: できる
②: いずれは
①: 絶望的

- 核子-核子衝突ならいけるか？
 - 実時間解析の壁①
- 平衡系の性質
 - 熱力学量③
 - クォーク非閉じ込めを視覚的に見たい①
 - 輸送係数①
 - ハドロンの質量変化②
- 有限密度②



格子QCD、できたらいいな ～原子核衝突分野から見て～



③: できる
②: いずれは
①: 絶望的

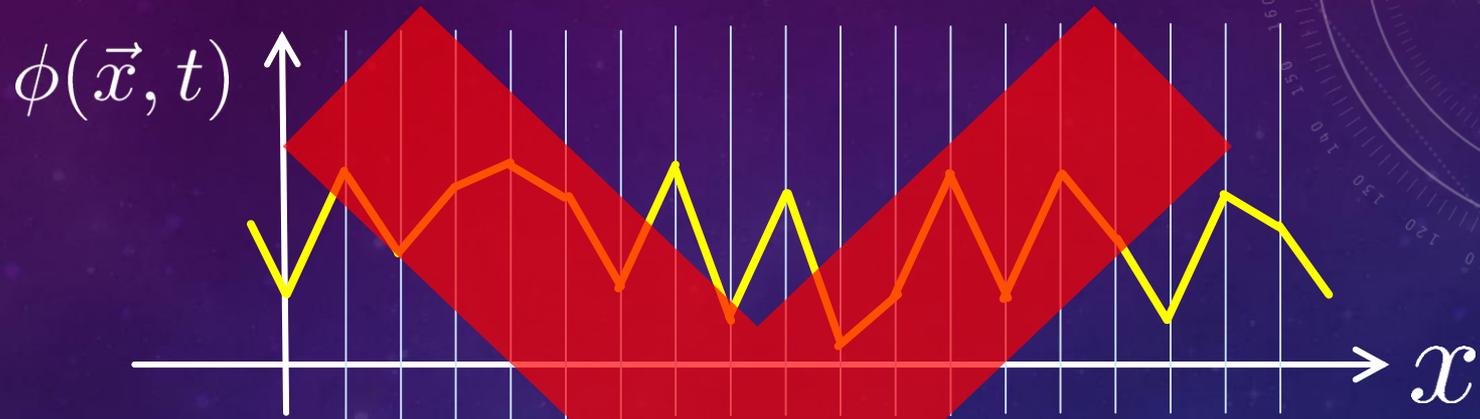
- 重イオン衝突分野に特化すれば
 - レプトン対・光子生成率①
 - ジェットエネルギーロス①
 - ハドロン溶解温度②
 - 熱ゆらぎ③
 - QCD臨界点①



格子上の場の理論

- 何が難しいか
- なぜ経路積分か
- なぜ相関関数か

格子QCDシミュレーションとは



例: 拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = D \nabla^2 \phi(\vec{x}, t)$

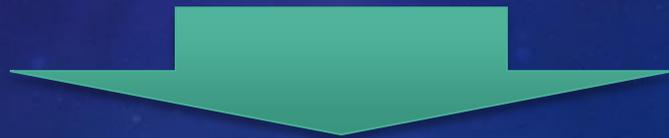
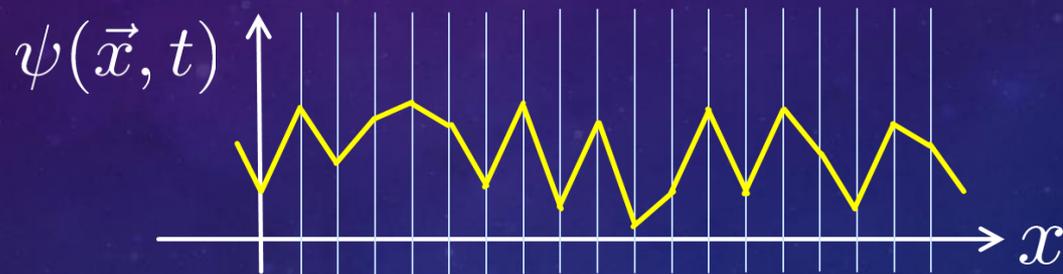
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \{ \phi(x-a) - 2\phi(x) + \phi(x+a) \}$$

$$\phi(x + \Delta t) = \phi(x) + \Delta t D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}$$

➡ どうしてできないの？

QCDは量子力学だった...

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x}, t) + V(x)\psi(\vec{x}, t)$$



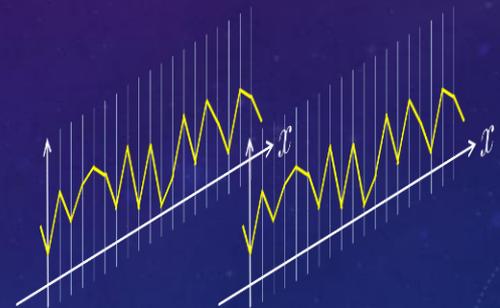
頑張れば解ける
(通常は、固有値問題を考える)

QCDは場の量子論だった...

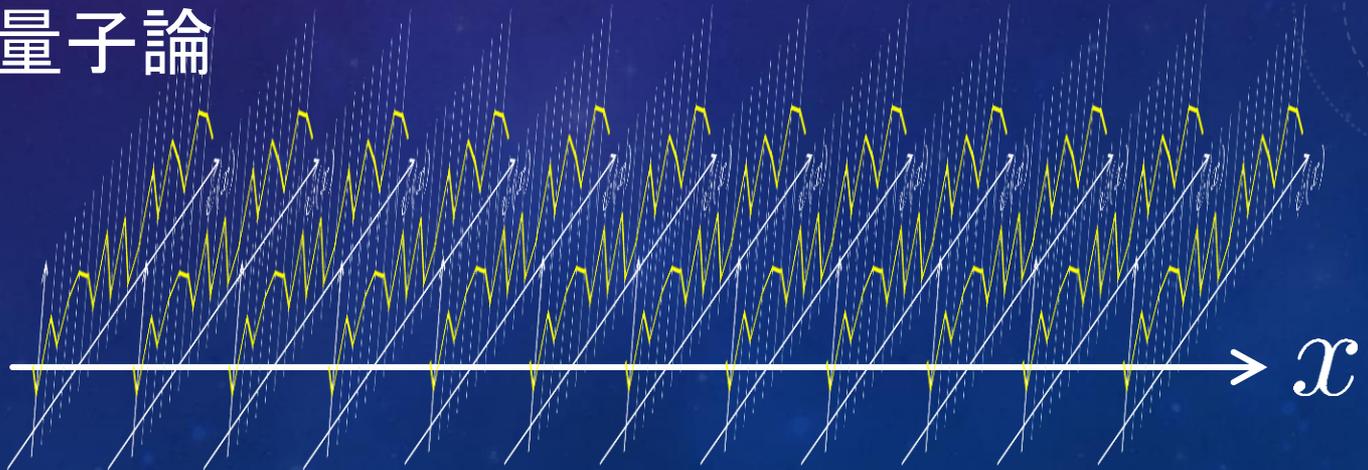
場の量子論とは
各時空点での場 ϕ が、それぞれ波動関数の引数

例: スピン1/2

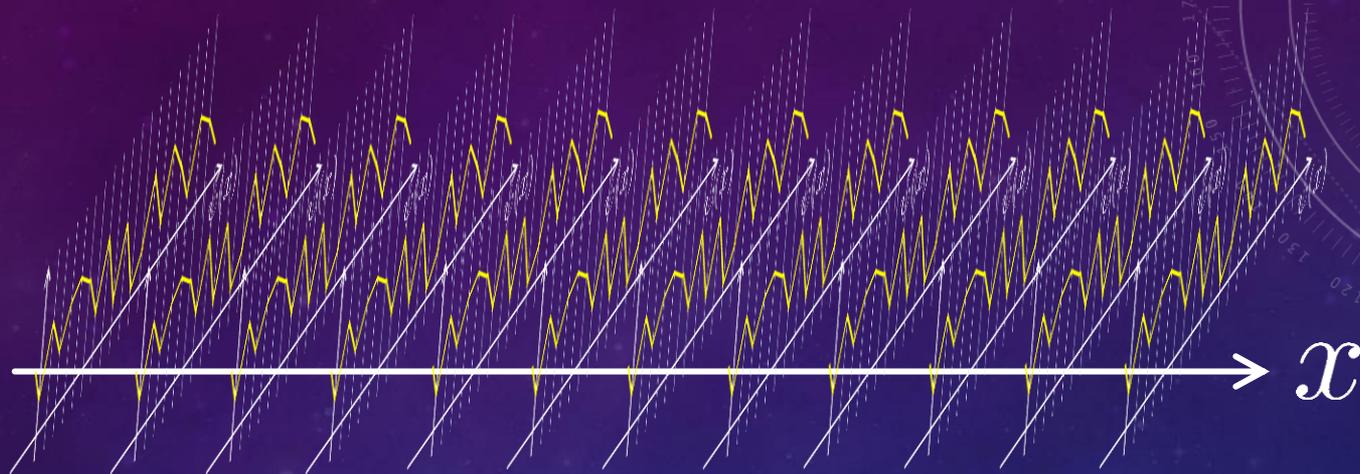
$$\Psi(x) = (\psi_{\uparrow}(x), \psi_{\downarrow}(x))$$



場の量子論



場の量子論の量子状態



$$\Psi[\psi(x)]$$

連続自由度の個数を持つ連続関数

or

汎関数(連続変数を引数に持つ関数)



数値計算上で、誤差を適切に抑制しながら
時間発展を記述するのは、実質不可能

初期状態設定の問題

意味のある量子状態が分からない

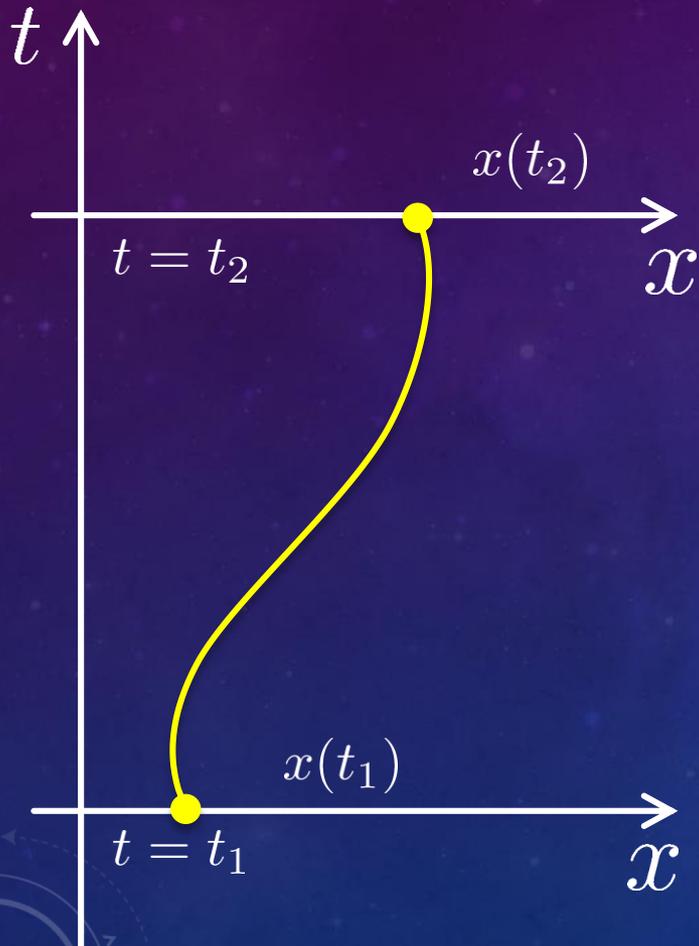
物理的に意味のありそうな状態

- 真空 $|0\rangle$
- 1粒子状態 $a_p^\dagger |0\rangle$
- 2粒子状態 $a_{p_1}^\dagger c_{p_2}^\dagger |0\rangle$

$|0\rangle$ 真空: 不明

a_p^\dagger 粒子の生成演算子: 不明

経路積分が救いとなる？

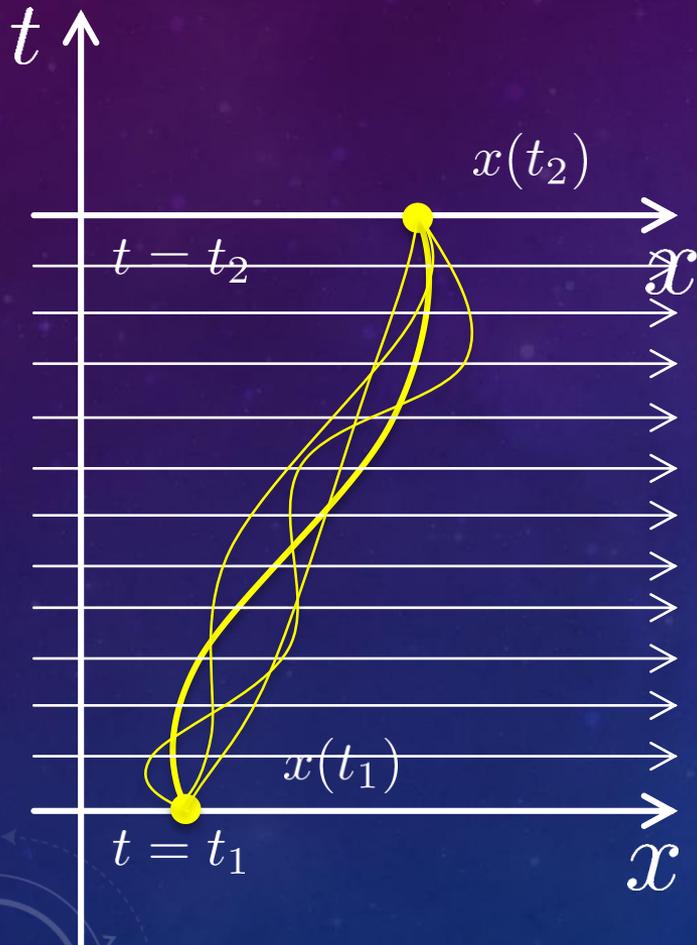


古典力学：最小作用の原理

x_1 と x_2 を結ぶ経路は、
作用 S を最小にする

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$$

経路積分が救いとなる？



量子力学：経路積分

x_1 と x_2 に粒子を見出す遷移振幅は、
全ての可能な経路に対する
 $e^{iS/\hbar}$ の重みの足し上げ

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle$$

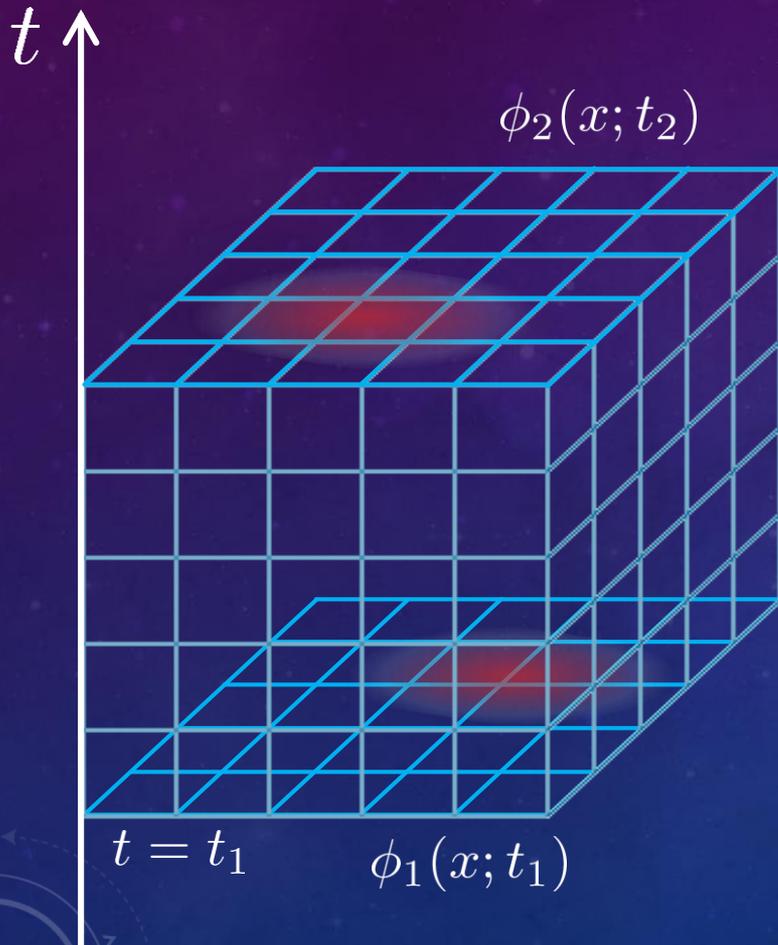
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\prod_n \int dx(t_n) \right] e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

$$= \int \mathcal{D}x e^{iS/\hbar}$$



始状態と終状態は、
座標のみで指定できる。

経路積分が救いとなる？



場の量子論

始状態と終状態の場を指定
→ 遷移振幅が求まる

$$\begin{aligned} & \langle \phi_2(x), t_2 | \phi_1(x), t_1 \rangle \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\prod_x \int d\phi(x) \right] e^{iS[\phi(x)]/\hbar} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi)/\hbar} \end{aligned}$$

時空を離散化すれば
格子場の理論が完成

問題点

① 始状態・終状態の問題

□ 量子力学: $\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle$

計算してもあまりおいしくない。
振る舞いが特異的

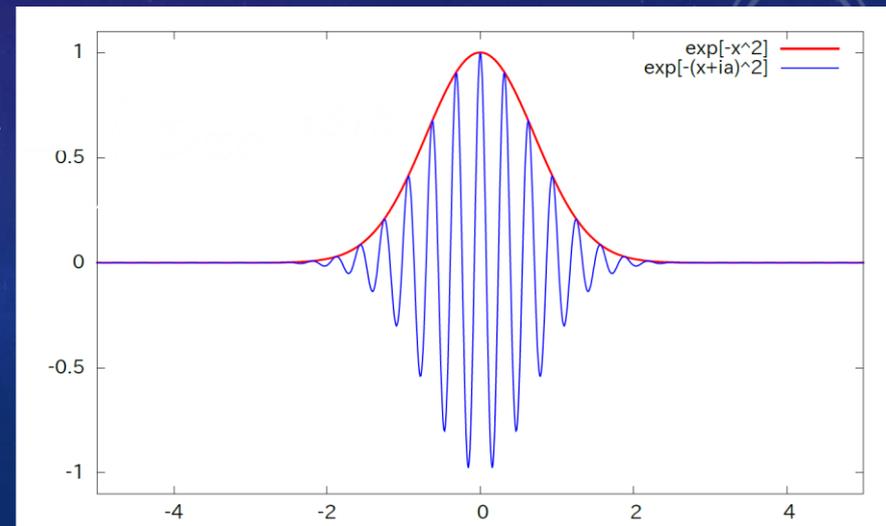
□ 場の量子論:

意味のある始状態と終状態が作れない。 $|\phi(x)\rangle?$

② 数値積分の困難

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\prod_n \int dx(t_n) \right] e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

経路ごとに位相が激しく振動
→ 数値積分が安定しない



解決策: WICK回転

虚時間(EUCLID空間)への移行 ($\tau = -it$)

御利益①数値積分可能になる

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$$



$$S_E[x(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d(i\tau) \mathcal{L}_E(x, \dot{x})$$

$$\int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]/\hbar}$$



$$\int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}$$



被積分関数が実数になる→数值的に手に負える

解決策: WICK回転

虚時間(EUCLID空間)への移行 ($\tau = -it$)

御利益②真空期待値が計算できる

$$\tau_1 \rightarrow -\infty, \tau_2 \rightarrow \infty$$

の極限を取ると、真空状態が作れる!

$$\int \mathcal{D}x e^{-\int_{-\tau_1}^0 d\tau L[x(\tau)]} \sim e^{-H\tau_1} |x, -\tau_1\rangle \xrightarrow{\tau_1 \rightarrow \infty} |0\rangle$$



$$\langle 0 | f(\hat{x}) | 0 \rangle \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x f(x)_{\tau=0} e^{-S/\hbar}$$

始状態・終状態は何でもいいので、周期境界にしても良い!

演算子の真空期待値

例：調和振動子の基底状態に対する期待値

$$\langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \hat{x}(\tau_1) \hat{x}(\tau_2) | 0 \rangle$$

場の理論でも、格子上では
演算子の真空期待値が計算可能

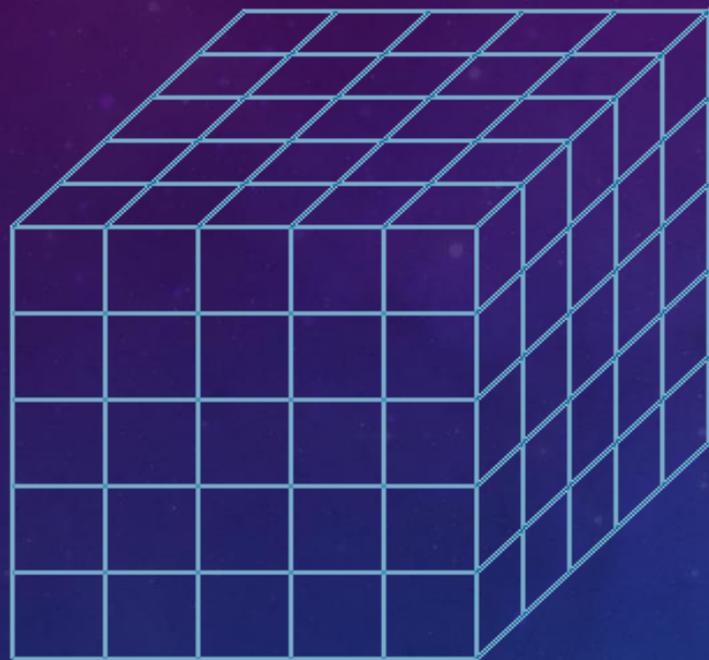
$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle, \langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle, \dots$$



期待値(相関関数)から、
物理量を抜き出す！

問：

平面波は低次元で解けるか？



格子QCDは、なぜいつも
4次元で数値解析するのか？

平面波等、並進不変な系を
想定すれば次元が落とせて、
計算効率を上げられるので
は？

一般的コメント

- 格子場の理論は、場の自由度を有限個に留めることで紫外発散を回避することができる
- 現状唯一の、場の量子論の有効な非摂動論的構築法
- Wilsonは、数値解析のために場を離散化したわけではない
- Wilsonは、強結合展開により閉じ込めを説明しようとした

ここまでのまとめ

- 場の量子論の実時間発展を数値的に追うのは困難
- 意味のある物理状態すら作れない

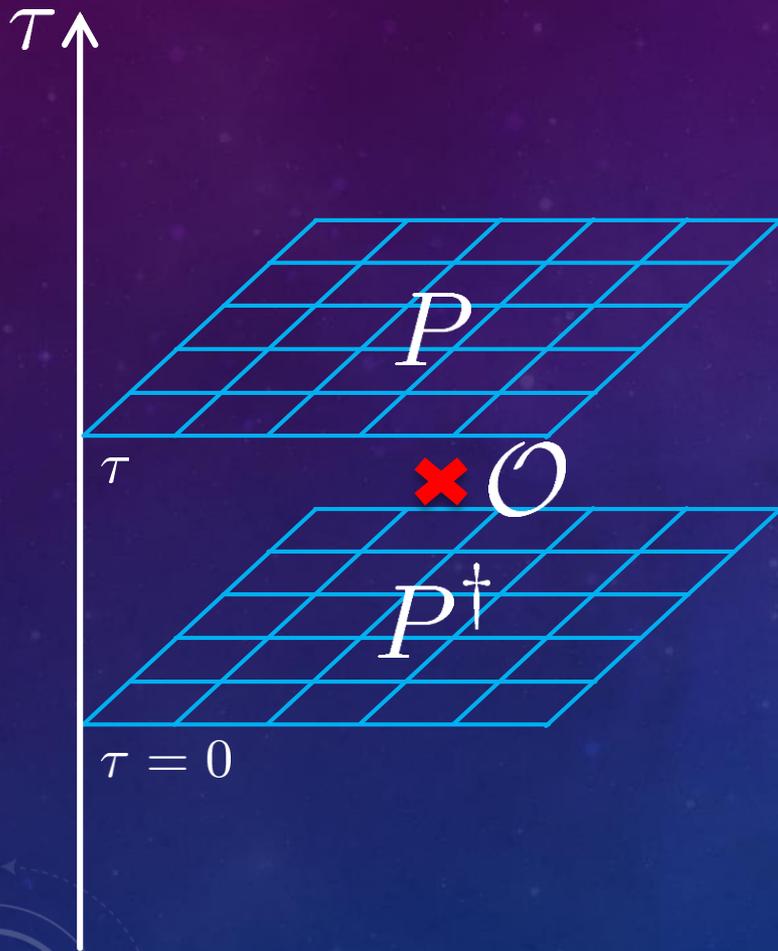
- 格子QCDは、経路積分の時空を離散化して構成
- 通常、Euclid空間で定式化
 - 御利益1: 経路積分を実数化し、安定させる
 - 御利益2: 真空期待値が計算できる

- 格子上で計算されるのは、基本的には演算子の相関関数。
- 相関関数からいかに物理量を引き出すかが勝負。

相関関数と物理量

The background is a dark blue gradient with faint, glowing particles. On the right side, there is a large, semi-transparent circular scale with numerical markings from 0 to 210 in increments of 10. Several concentric circles and dashed lines are scattered across the page, some with arrows indicating a clockwise direction.

相関関数と物理状態



π 粒子生成演算子 $P^\dagger(p=0, \tau)$

➔ 1 π 粒子状態 $|\pi\rangle = P^\dagger|0\rangle$

□ 質量の測定

$$\langle \pi(\tau) | \pi(0) \rangle \sim e^{-m_\pi \tau}$$

□ エネルギー

$$\langle \pi(\tau) | T_{00}(x) | \pi(0) \rangle \sim m_\pi$$

□ 電荷分布

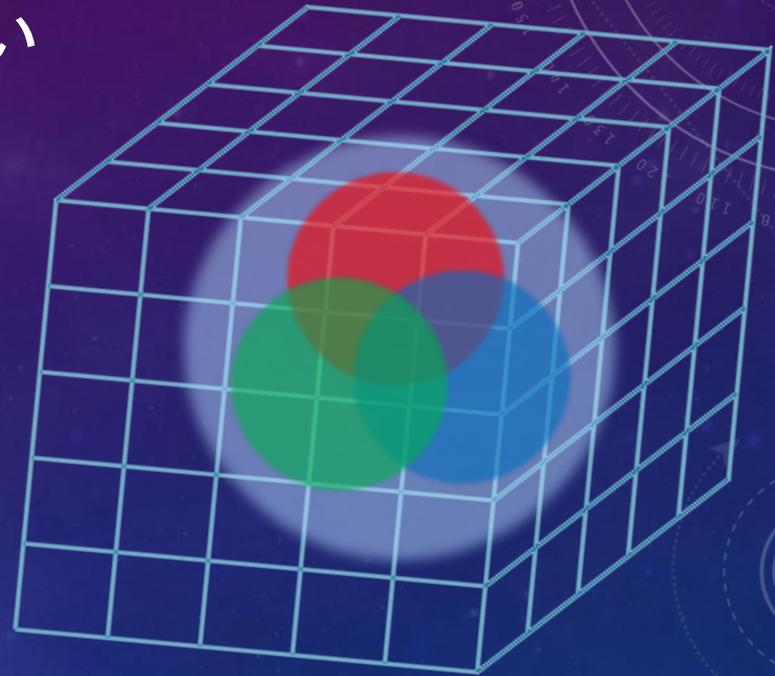
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \pi(\vec{0}, \tau) | \hat{\rho}(\vec{x}) | \pi(\vec{0}, 0) \rangle$$

演算子を知らなかった！

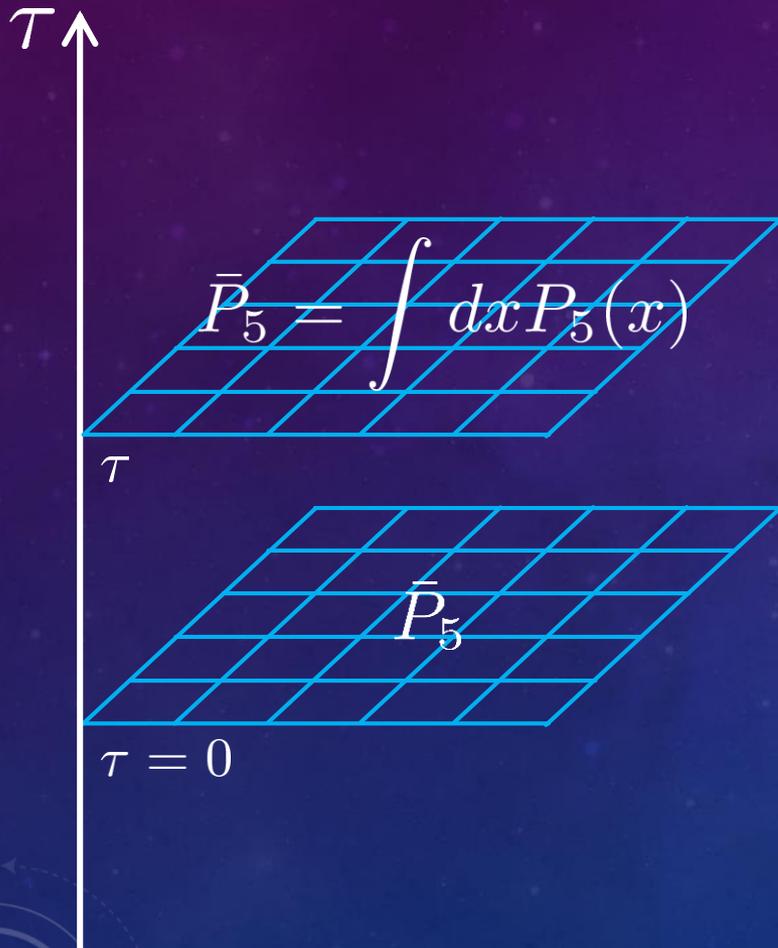
□ 我々はハドロン状態を知らない
—QCDの言葉でハドロンを
表現することは未だ不可能—

□ エネルギー—運動量テンソル
演算子も分からない

格子正則化は並進対称性を破る
→EMTはNoetherカレントとして定義できない
→最近の進展: gradient flowという技法を使う



利用可能な演算子



例：クォーク2点擬スカラー演算子

$$P_5(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

π 粒子ではないが、 π と同じ量子数

$$P_5(x)|0\rangle = c_0|\pi\rangle + c_1|x\rangle + \dots$$



$\tau \rightarrow \infty$ の極限で

$$|\bar{P}_5\rangle \sim |\pi\rangle$$

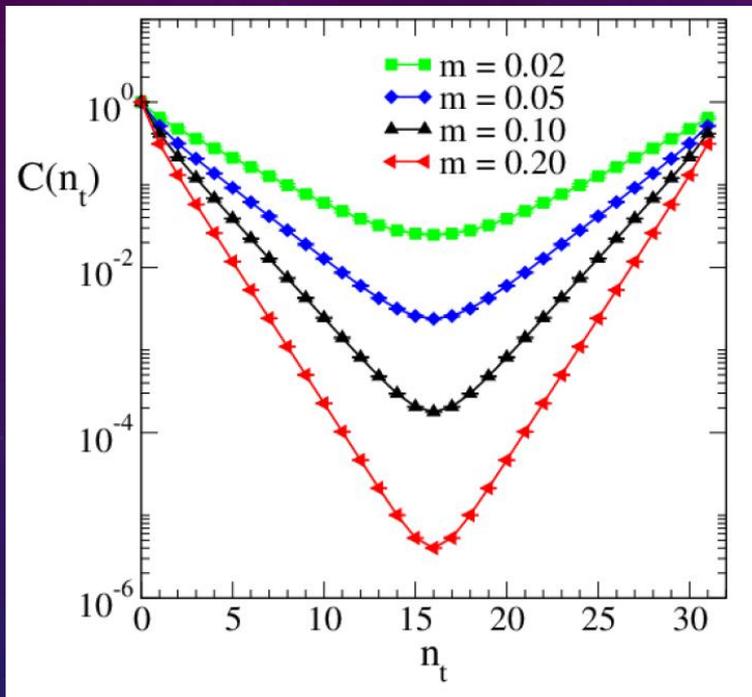
$$\langle \bar{P}_5(\tau) | \bar{P}_5(0) \rangle \rightarrow e^{-m_\pi \tau}$$

※実際の計算では、 τ を十分大きく取る必要あり

相関関数の例

Figs from C.B. Lang

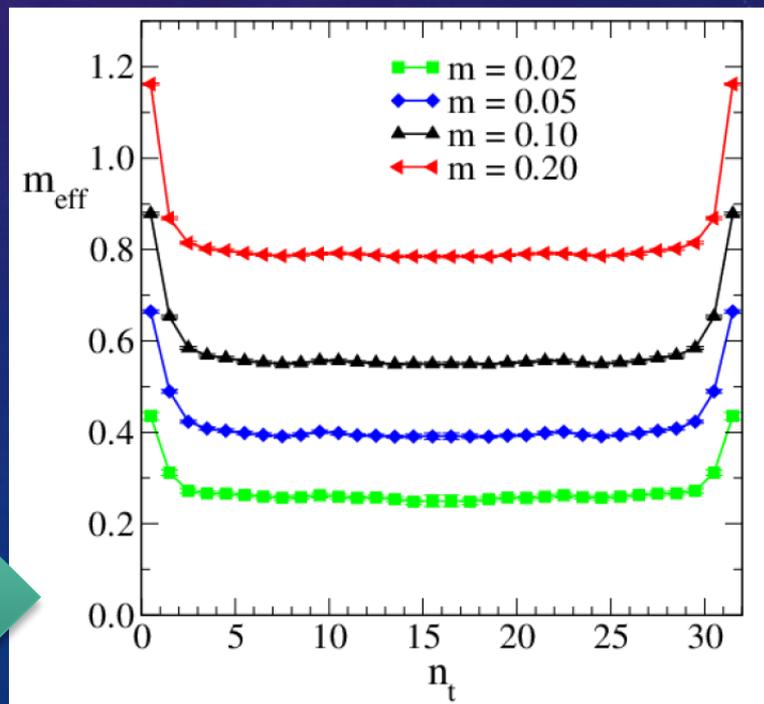
http://physik.uni-graz.at/~cbl/teaching/lgtped_c.pdf



$C(\tau)$

有効質量プロット

$$m_{\text{eff}} = \ln \frac{C(n)}{C(n+1)}$$



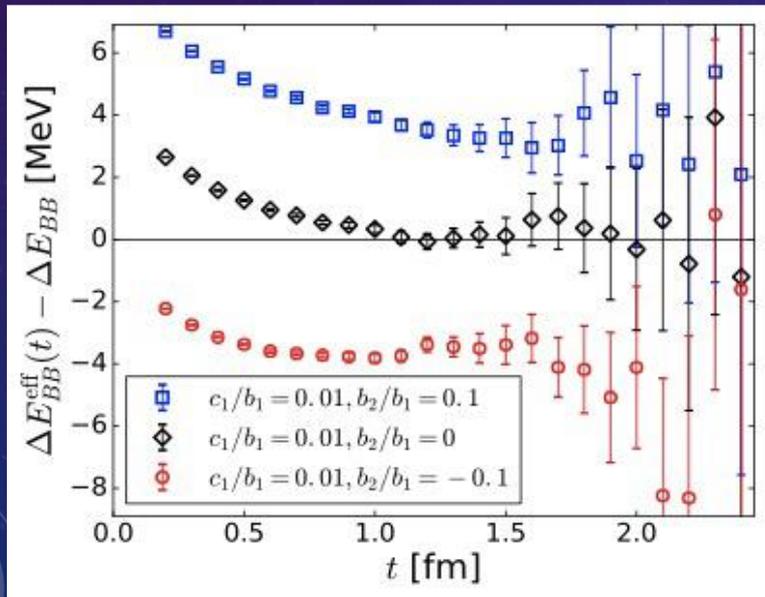
有効質量プロットに現れる
平坦領域から、質量を読み取る



注意点

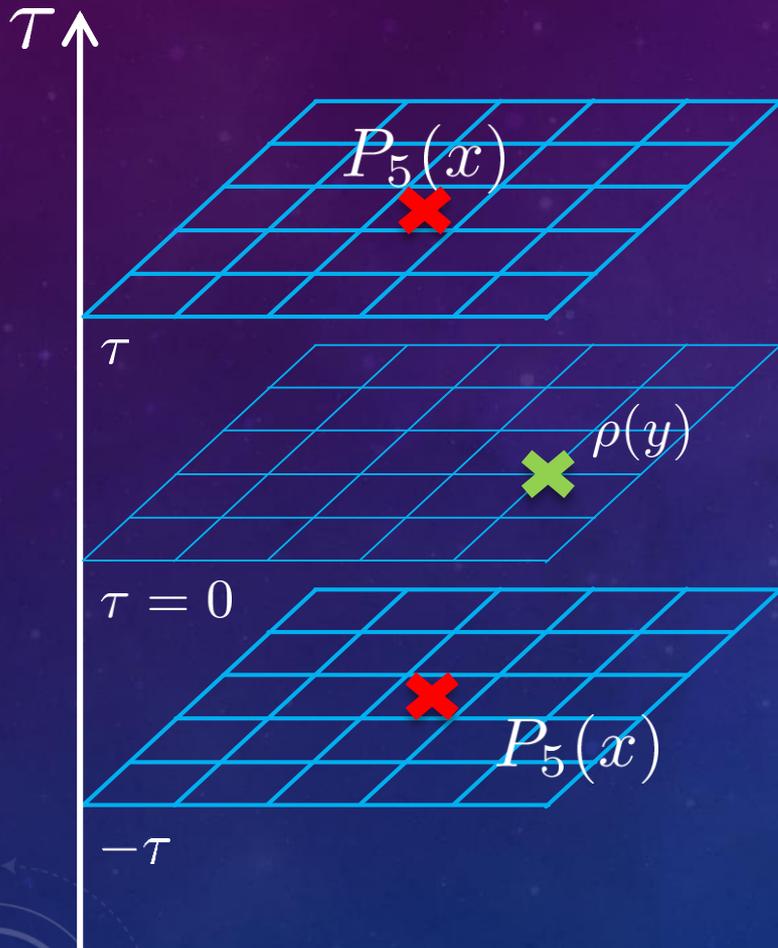
- 平坦領域の決定は人為的になりがち
- 有効質量解析からは、与えられた量子数の最低エネルギー状態のみが決定可能
- 高エネルギー状態の解析は難しい

HAL-QCD Collab. 2016



- 多核子系など、エネルギー準位差が狭い系では細心の注意が必要

ハドロンの半径は解析可能か？



$$\langle 0 | P_5(\vec{x}, \tau) \rho(\vec{y}, 0) P_5(\vec{x}, -\tau) | 0 \rangle$$

荷電半径が計算可能？



✗ P5で生成したハドロンは座標xの固有状態ではない

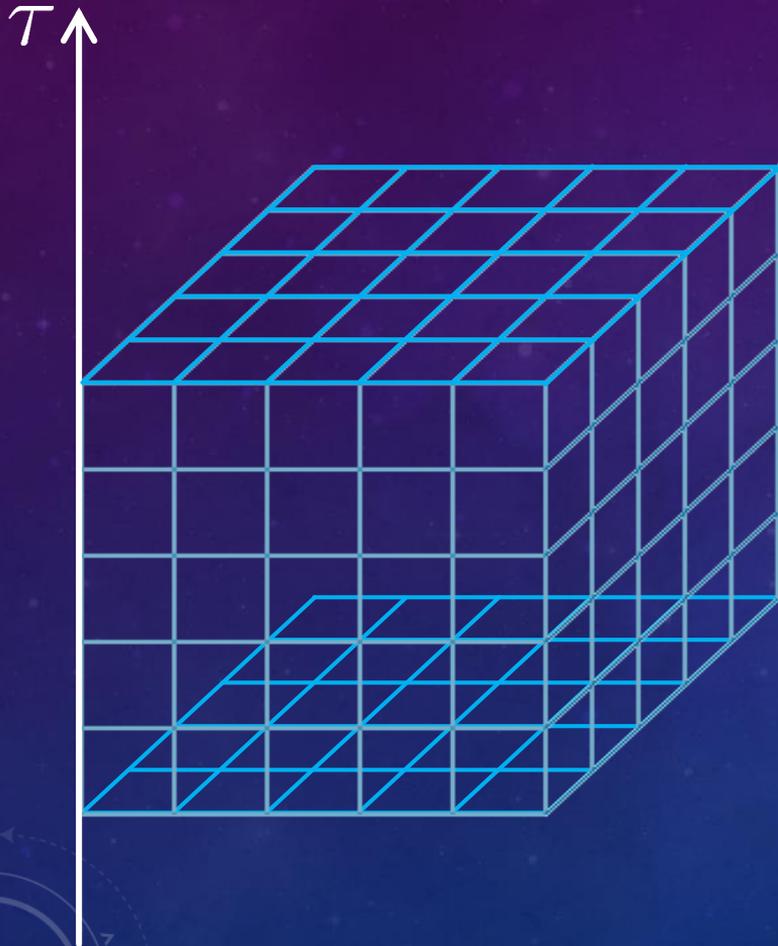
○ form factor

$$\langle \pi(\vec{p}_1) | V_\mu(\vec{q}) | \pi(\vec{p}_2) \rangle$$

多重積分の実行

- モンテカルロ積分
- 重点サンプリング
- 質量が軽い解析の困難
- 符号問題

経路積分



$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi(x)]}$$
$$= \left[\prod_x \int d\phi(x) \right] \mathcal{O} e^{-S[\phi(x)]}$$

(積分変数) =
(時空点の数) × (場の自由度)



膨大な多重積分

モンテカルロ積分

□モンテカルロ積分

ランダムに選んだ点で被積分関数を評価→平均

$$\int dx^m F(\vec{x}) \simeq \frac{1}{N} \sum_i F(\vec{x}_i)$$



積分空間

モンテカルロ積分

ロメトロポリス法(重点サンプリング)

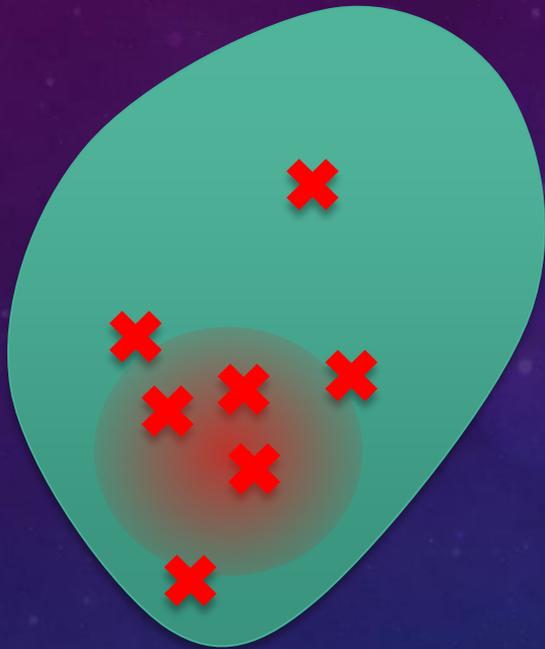
積分空間の一部のみが積分に強く寄与する場合

$$\int dx^m F(\vec{x})G(\vec{x})$$

ランダムな点の採集方法

$$\begin{cases} G(\vec{x}_{i+1}) \leq G(\vec{x}_i) & \text{必ず採用} \\ G(\vec{x}_{i+1}) > G(\vec{x}_i) & \text{確率 } G_i/G_{i+1} \text{ で採用} \end{cases}$$

$$\int dx^m F(\vec{x})G(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_i} F(\vec{x}_i)$$



積分空間

経路積分の場合

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi(x)]}$$

積分に寄与する領域がめっちゃくちゃ狭い



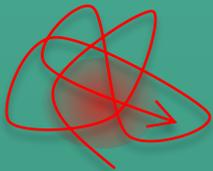
ランダムに評価点を選んでいると、
効率が悪くて話にならない



大きな寄与のある領域のみを
うろちょろするアルゴリズムが必要



ハイブリッド・モンテカルロ法
(純ゲージ理論のとき: 擬熱浴法)



積分空間

モンテカルロ積分の問題点①

ハイブリッドMCの各ステップで、

$$i\gamma_\mu D_\mu - m$$

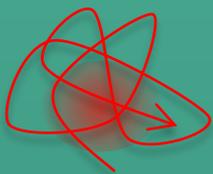
の逆行列を計算する必要がある



行列の最大固有値と最小固有値の
比が大きくなるほど、計算に時間を要する



クォーク質量を軽くしていくと計算時間が増大



積分空間

モンテカルロ積分の問題点②

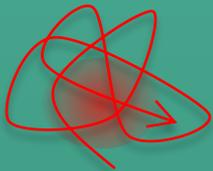
$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi(x)]}$$

Sが複素数の場合は、
確率解釈ができないため適用不能



“符号問題”
(複素位相問題)

- 実時間時間発展
- 有限密度($\mu \neq 0$)の場合



積分空間

有限密度系・符号問題

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma_{\mu}D_{\mu} + m + \mu\gamma_0)\psi = \bar{\psi}\Delta\psi$$

$$\Delta^{\dagger}(\mu) = -\gamma_{\mu}D_{\mu} + m + \mu^*\gamma_0 = \gamma_5\Delta(-\mu^*)\gamma_5$$

$$[\det \Delta(\mu)]^* = \det \Delta(-\mu^*)$$

$\mu \neq 0$ のとき、クォーク作用が複素数になる

□ 例外

- μ が純虚数
- $\mu_u = -\mu_d$
- $SU(2)_c$ 系

□ 解決策

- 再重み付け法、Taylor 展開法
- 複素ランジュバン法
- Lifshitz thimble 法
- ...

格子間隔の決定

ゼロ質量QCDラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} + i g A_{\mu}) \psi + \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + i g [A_{\mu}, A_{\nu}]$$

パラメータはgのみ。次元量が存在しない

gと格子間隔の関係は物理量を測定して決める
クォーク質量も同様

有限温度数值解析



量子統計力学

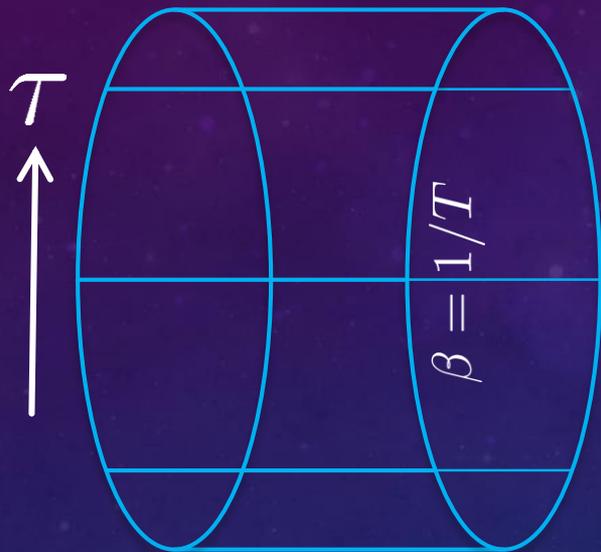
量子統計力学のいちばん大事な式

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H - \mu N)} \quad \text{“密度行列”}$$

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)} \quad \text{“分配関数”}$$

$$\langle O \rangle = \text{Tr}[O\rho]$$

境界条件と有限温度



$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$$
$$= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_T}$$

時間方向の(反)周期境界条件
=有限温度系

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S_T}$$

熱力学量の測定

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{エネルギー密度: } \langle T_{00} \rangle_T \\ \text{圧力: } \langle T_{11} \rangle_T \end{array} \right.$$

Suzuki, 2013; FlowQCD, 2014

熱力学量の測定

熱力学関係式

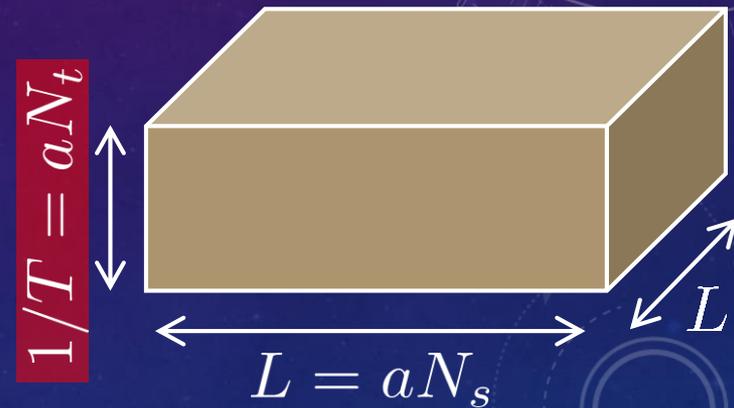
$$\varepsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad p = T \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$$

$\ln Z$ の T 、 V 微分を求められれば、
熱力学量が決まる



格子間隔による微分 $\rightarrow V$ と $1/T$ が同時に変わる

$$a \frac{\partial \ln Z}{\partial a} \sim \frac{V}{T} (\varepsilon - 3p)$$



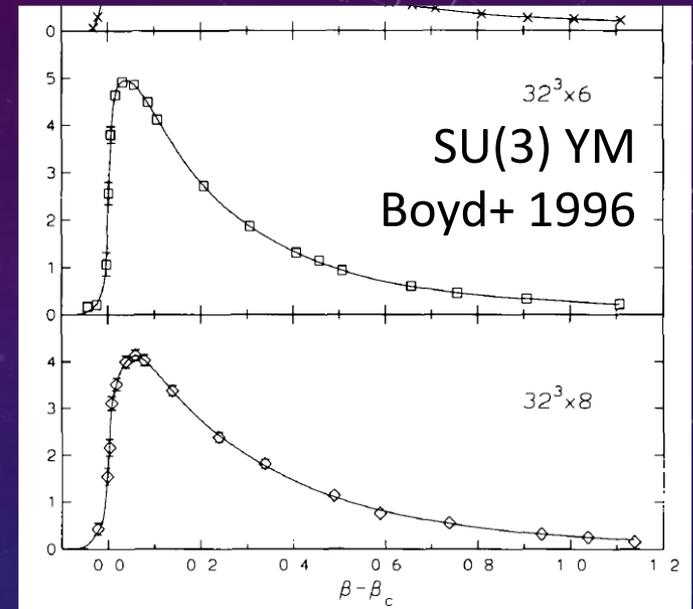
積分法

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial a} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \sim \frac{\partial \beta}{\partial a} \langle S \rangle$$

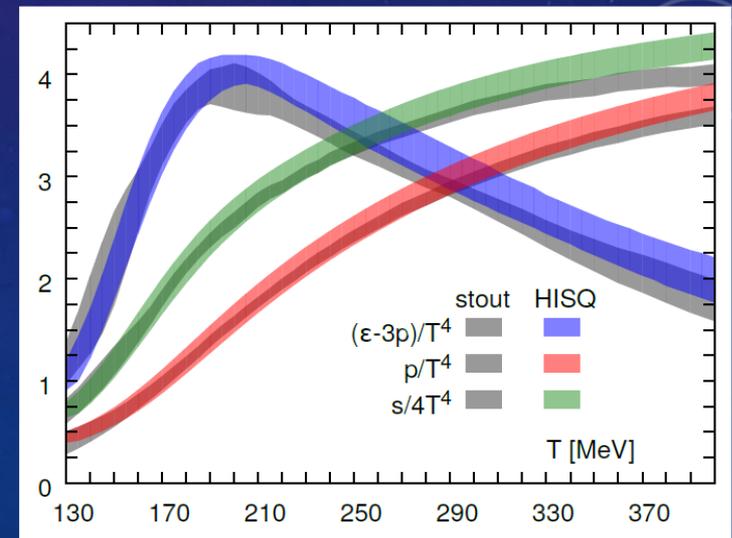
$$T \frac{\partial(p/T^4)}{\partial T} = \frac{\varepsilon - 3p}{T^4}$$



$$\frac{p}{T^4} = \int_{T_0}^T dT \frac{\varepsilon - 3p}{T^5}$$



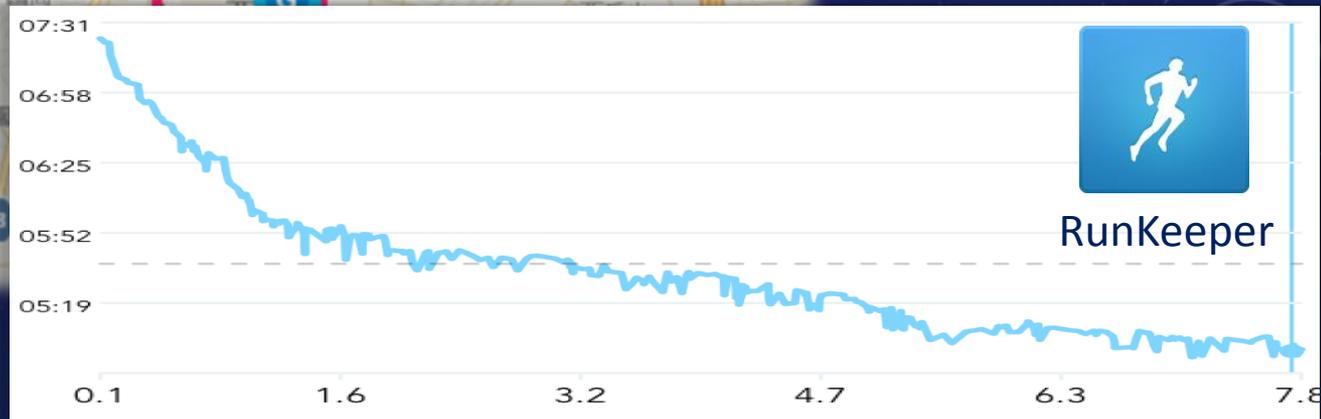
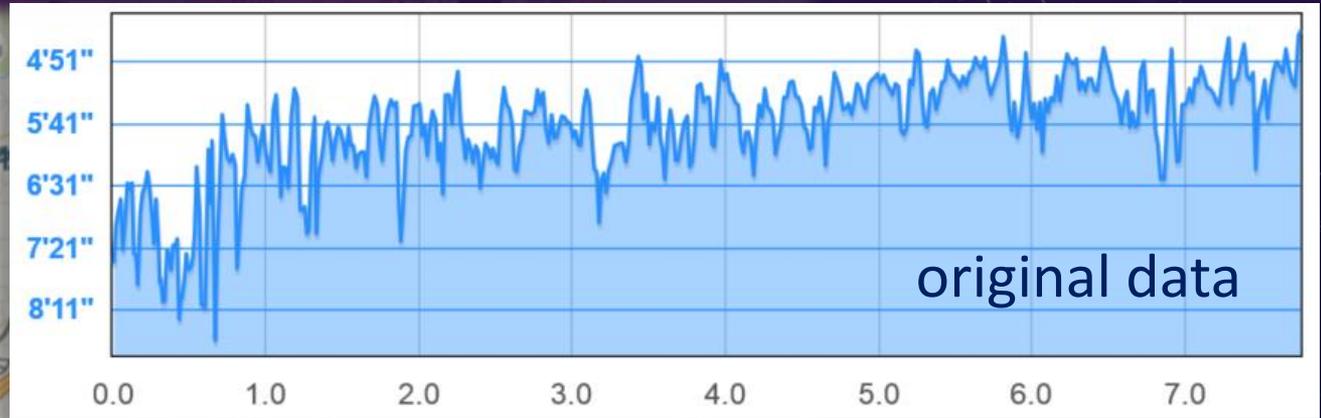
Full QCD, BW; HotQCD (2014)

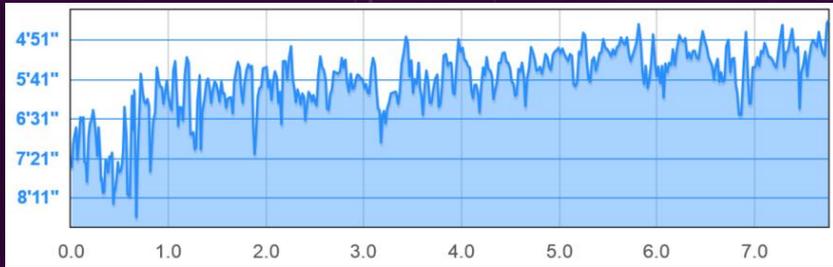


Gradient Flowによる エネルギー運動量テンソルの構築

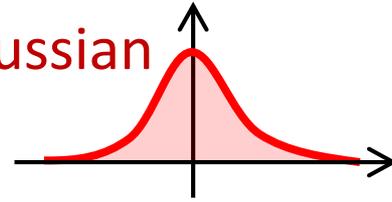


GRADIENT FLOWとは





Gaussian



$$\textcircled{1} \quad x(t) \rightarrow x'(t) \sim \int dt' \exp \left[-\frac{(t-t')^2}{2\sigma^2} \right] x(t')$$

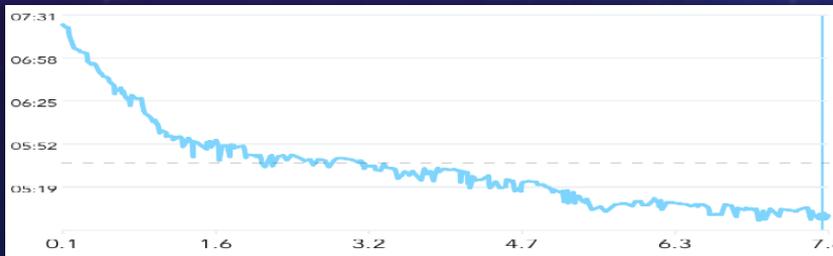
$$\sigma = \sqrt{2s}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{ds} x(t; s) = \frac{d^2}{dt^2} x(t, s) \quad x(t; 0) = x(t)$$

YM Gradient Flow

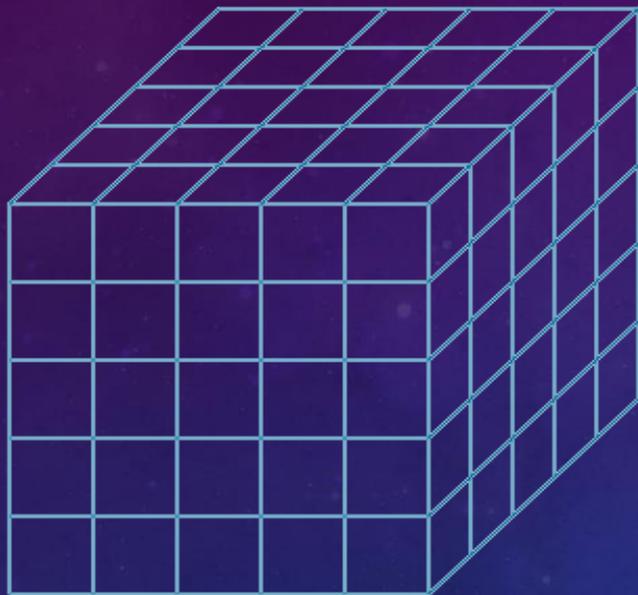
$$\begin{aligned} \partial_t A_\mu &= D_\nu G_{\mu\nu} \\ &= \partial_\nu \partial_\nu A_\mu + \dots \end{aligned}$$

Gauge invariant version of
4-dim. diffusion equation

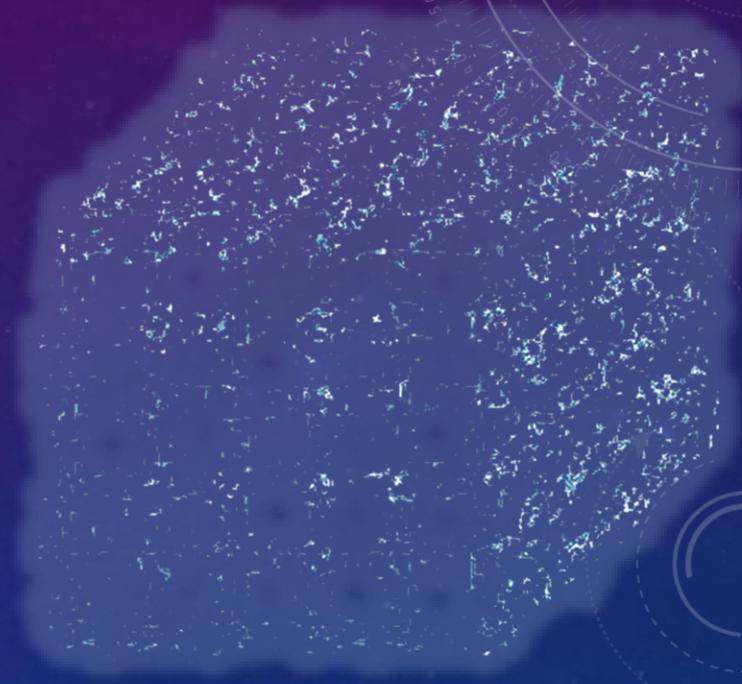


素朴なアイデア

Luscher, 2010-
Narayanan, Neuberger, 2006
Luscher, Weiss, 2011
Suzuki, 2013



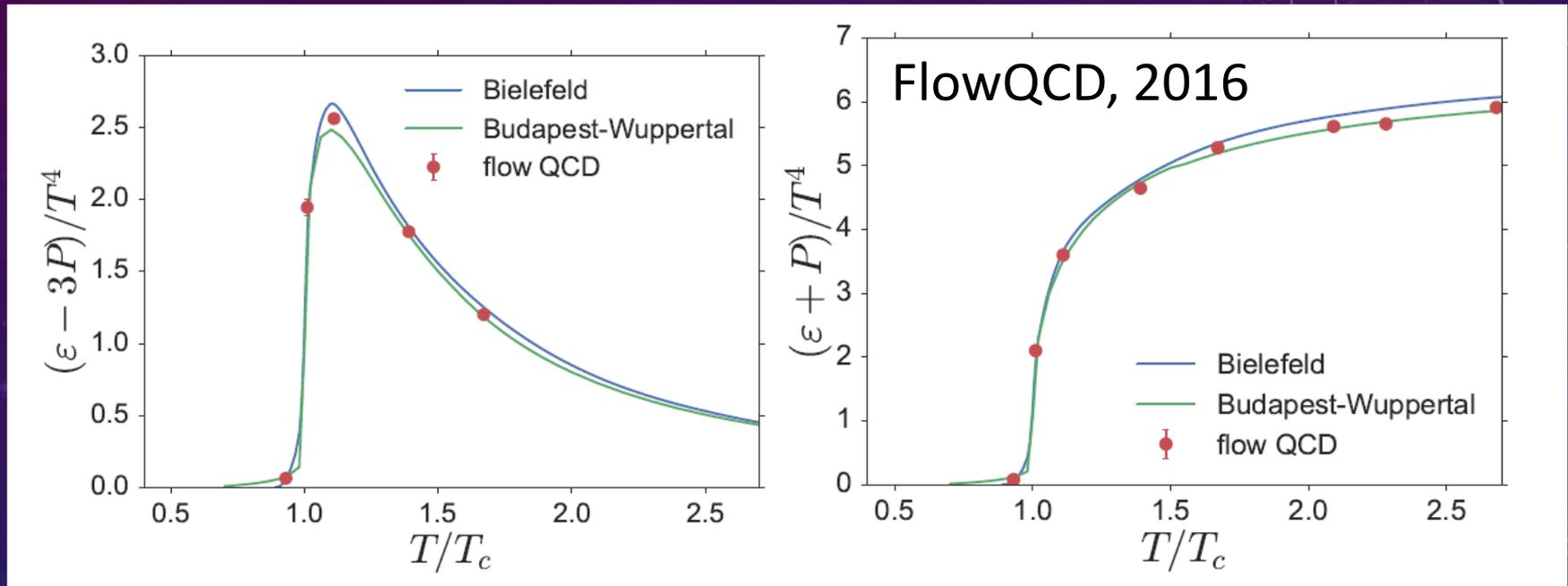
粗視化



並進対称性なし

並進対称性が回復
EMTが定義可能

熱力学量: SU(3) YANG-MILLS



Error includes

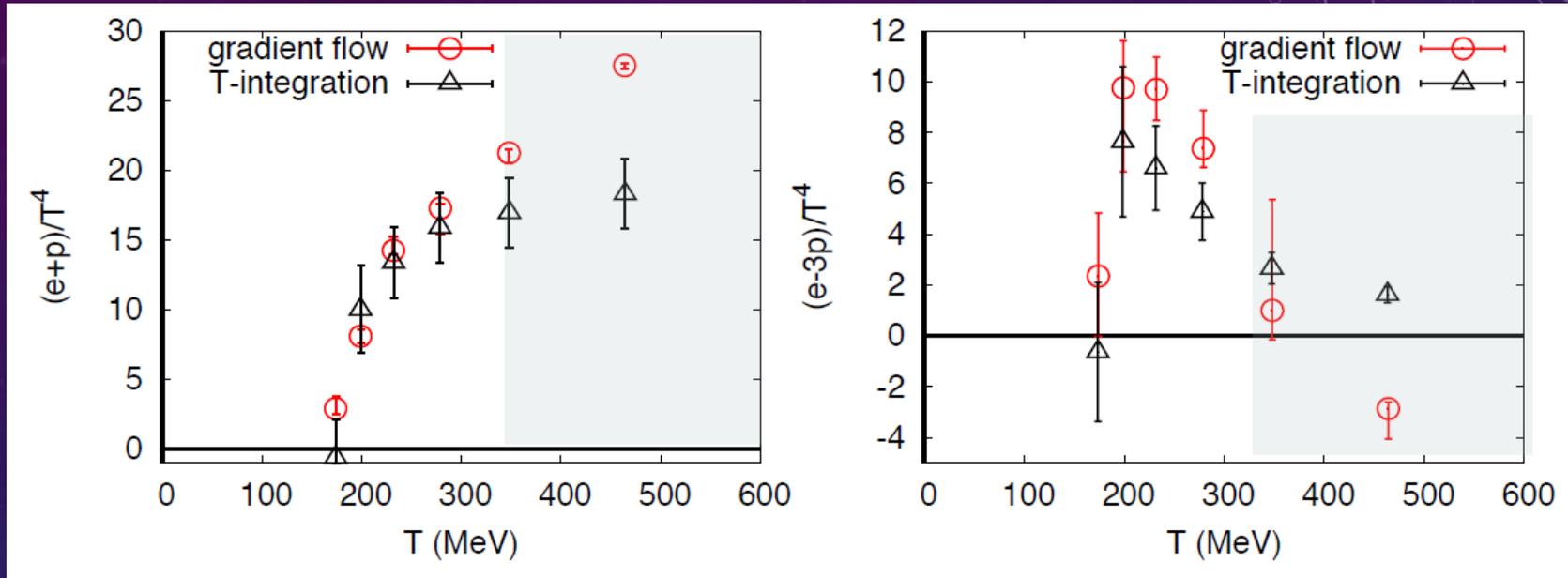
- statistical error
- choice of t range for $t \rightarrow 0$ limit
- uncertainty in $a\Lambda_{\text{MS}}$

total error $< 1.5\%$ for $T > 1.1T_c$

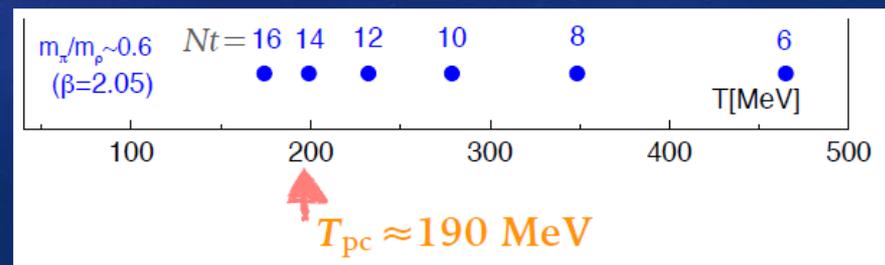
- 積分法と良く一致する
- 統計誤差の低減
(約2000配位)

熱力学量: $N_F=2+1$ QCD

谷口+, WHOT-QCD, PRD, 2017



- $N_f=2+1$ QCD, Iwasaki gauge + NP-clover
- $m_{ps}/m_V \approx 0.63$ with \approx physical s quark
- $T=0$: CP-PACS+JLQCD ($\beta=2.05$, $28^3 \times 56$, $a \approx 0.07$ fm)
- $T>0$: $32^3 \times N_t$, $N_t = 4, 6, \dots, 14, 16$
- $t \rightarrow 0$ extrapolation only



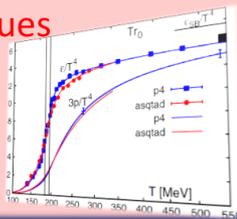
格子上的のEMTの応用

格子上的での、EMT解析が可能になった

Thermodynamics

direct measurement of
expectation values

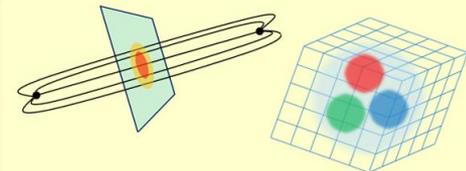
$\langle T_{00} \rangle, \langle T_{ii} \rangle$



Fluctuations and Correlations

viscosity, specific heat, ...

$$\eta = \int_0^\infty dt \langle T_{12}; T_{12} \rangle$$
$$c_V \sim \langle \delta T_{00}^2 \rangle$$

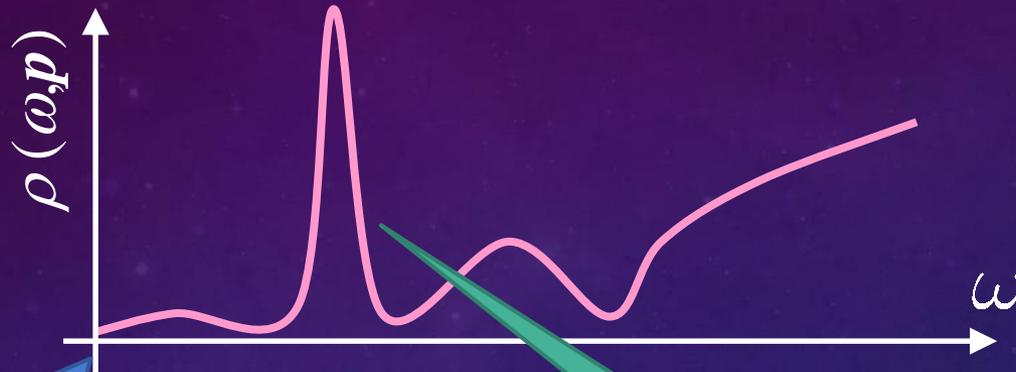


- confinement string
- EM distribution in hadrons

Hadron Structure

相関関数、輸送係数、ハドロン内部のEM/応力分布、
非閉じ込め相転移の検証、情報削減への応用、etc., etc.

スペクトル関数



slope at the origin

→ transport coefficients

Kubo formulae $\eta \sim \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \rho(\omega)$

- shear viscosity : T_{12}
- bulk viscosity : T_{mm}
- electric conductivity : J_{ij}

peaks

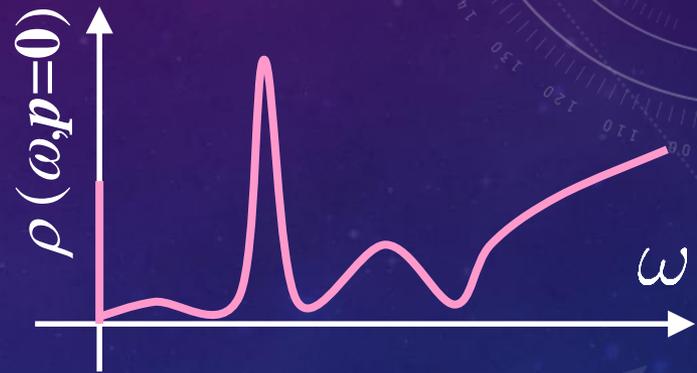
quasi-particle excitation
width \sim decay rate

スペクトル関数

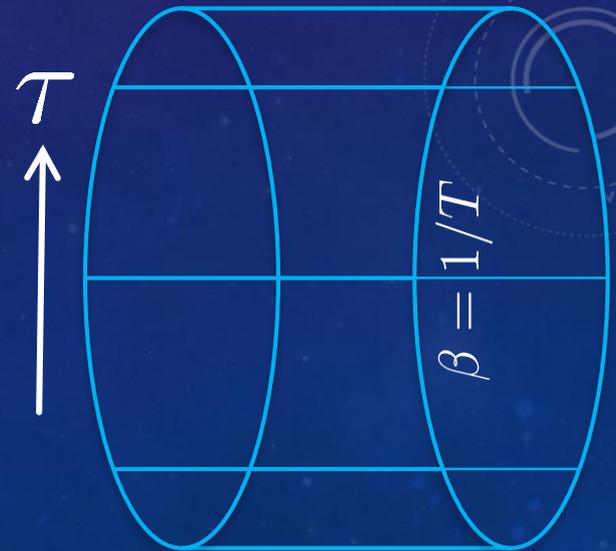
$T=0$



$T > 0$

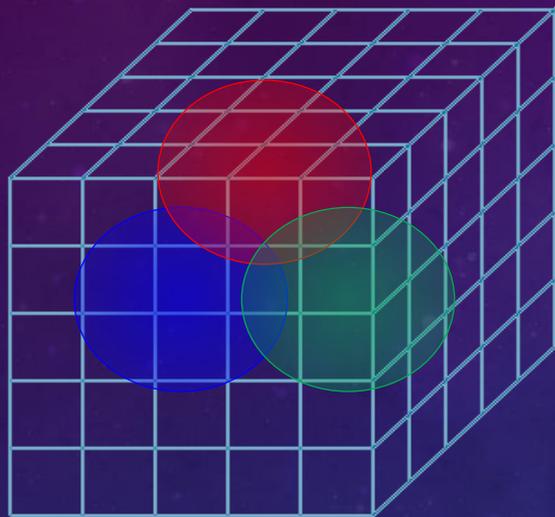


- 有限温度のスペクトルは、真空と比べて複雑
- しかし、利用可能な τ は境界条件により限定される



虚時間相関→スペクトル

格子



$$\tilde{G}(\tau, \mathbf{k})$$

discrete and noisy

動的情報



$$\rho(\omega, \mathbf{k})$$

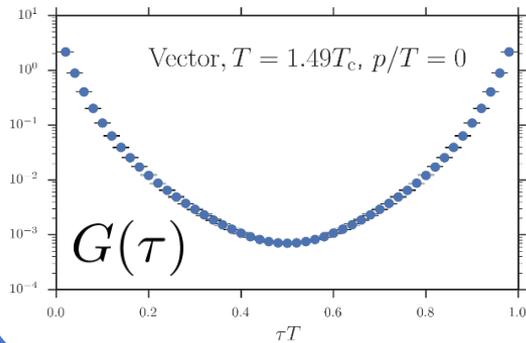
continuous

$$\tilde{G}(\tau) = \int d\omega \frac{e^{(\beta/2 - \tau)\omega}}{e^{\beta\omega/2} + e^{-\beta\omega/2}} \rho(\omega)$$

最大エントロピー法

Asakawa, Nakahara
Hatsuda, 2001

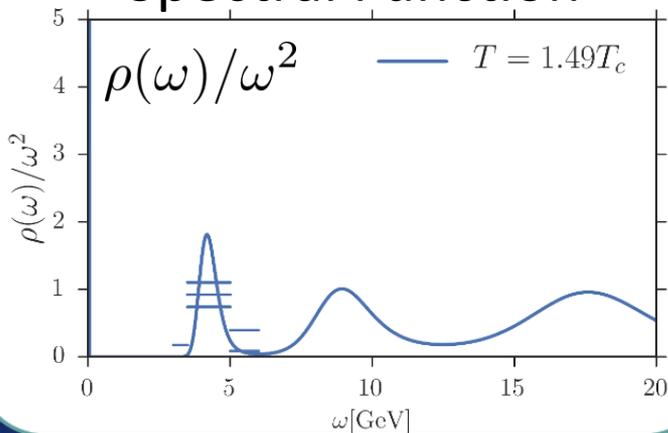
Lattice data



$$G(\tau) = \int_0^\infty d\omega \frac{\cosh(1/2T - \tau)\omega}{\sinh(\omega/2T)} \rho(\omega)$$

“ill-posed problem”

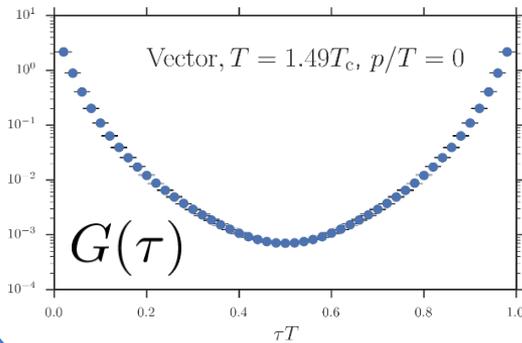
Spectral Function



最大エントロピー法

Asakawa, Nakahara
Hatsuda, 2001

Lattice data



Bayes
theorem



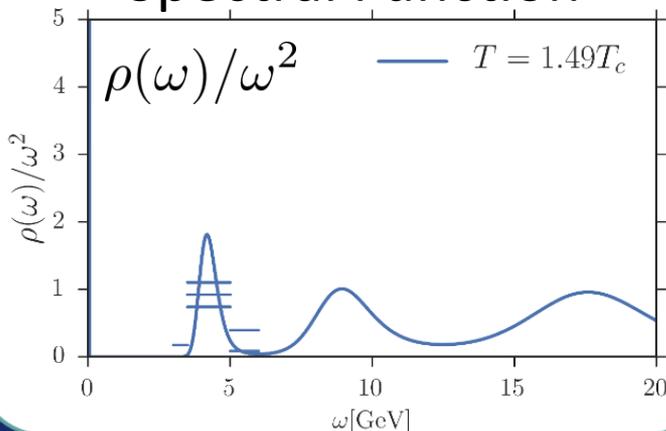
Prior probability

- Shannon-Jaynes entropy
- default model $m(\omega)$

Probability
of $\rho(\omega)$

$$P[\rho(\omega), \alpha]$$

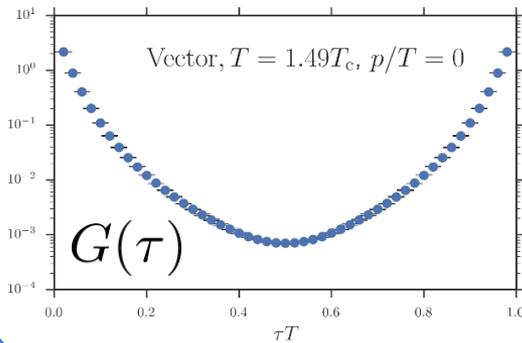
Spectral Function



最大エントロピー法

Asakawa, Nakahara
Hatsuda, 2001

Lattice data



Bayes
theorem



Prior probability

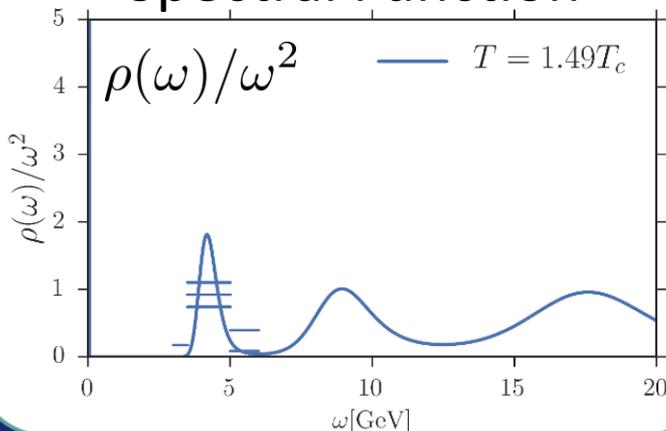
- Shannon-Jaynes entropy
- default model $m(\omega)$

Probability

of $\rho(\omega)$

$$P[\rho(\omega), \alpha]$$

Spectral Function



expectation value

$$\langle \rho(\omega) \rangle_P$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_P = \int d\alpha \int [d\rho] P[\rho, \alpha] \mathcal{O}$$

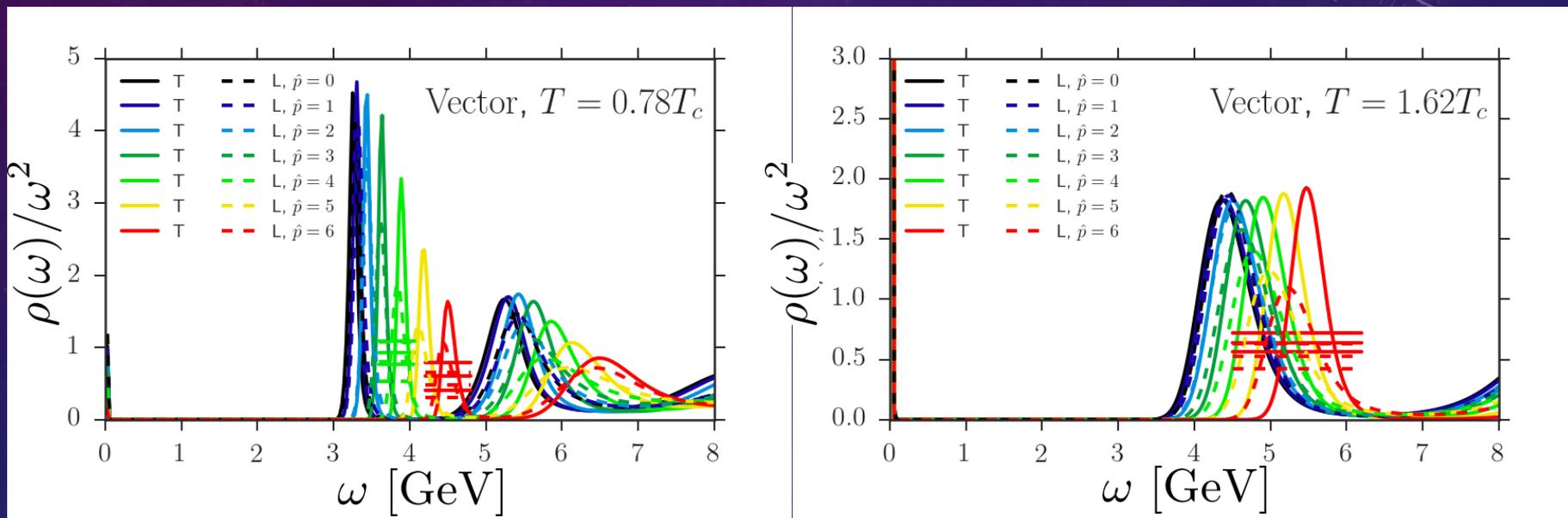
- スペクトルのイメージ自体はただの期待値
- 定量的意味付けには、誤差解析が必要

有限温度・有限運動量 チャーモニウムスペクトル関数

Ikeda, Asakawa, MK

PRD 2017

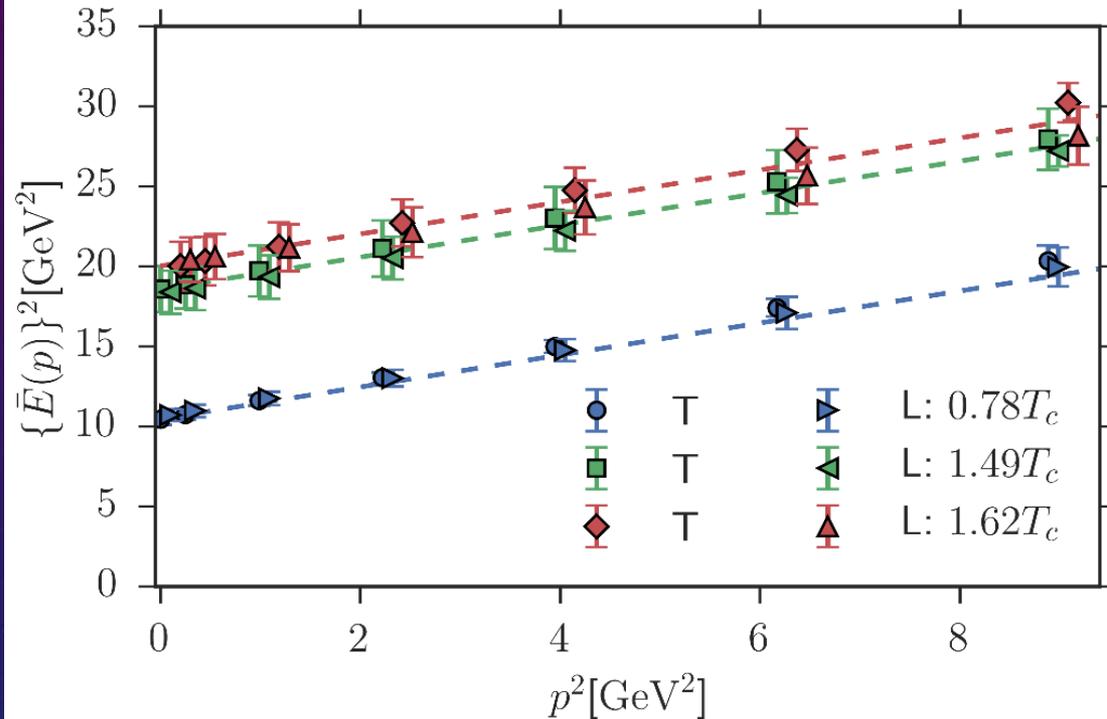
J/ψ スペクトル関数



- 有限運動量では縦・横チャンネルを分離
- 媒質効果で質量増加？
- 分散関係は？

媒質中のJ/ψ分散関係

Ikeda, Asakawa, MK
PRD 2017



□ スペクトルのピーク位置を、誤差付きで定量的に評価した初のMEM解析

真空の分散関係

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

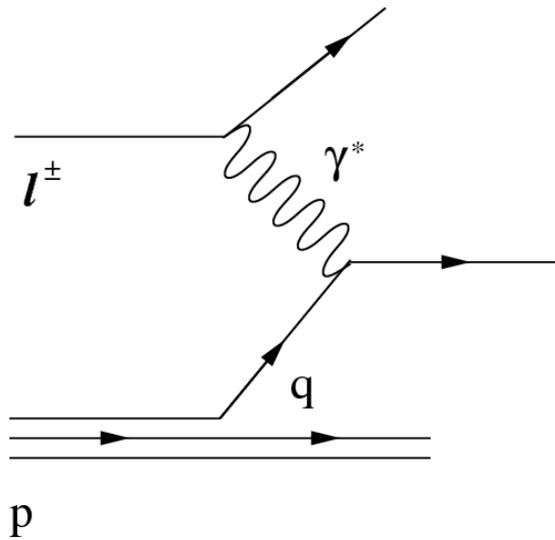
□ 媒質効果による質量増加

□ J/ψの分散関係は、媒質中でも真空と変わらない！

その他の話題

パートン分布関数

$$\frac{d\sigma(e^- p \rightarrow e^- X)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} \frac{1 + (1-y)^2}{2} \sum_f x e_f^2 f_f(x)$$

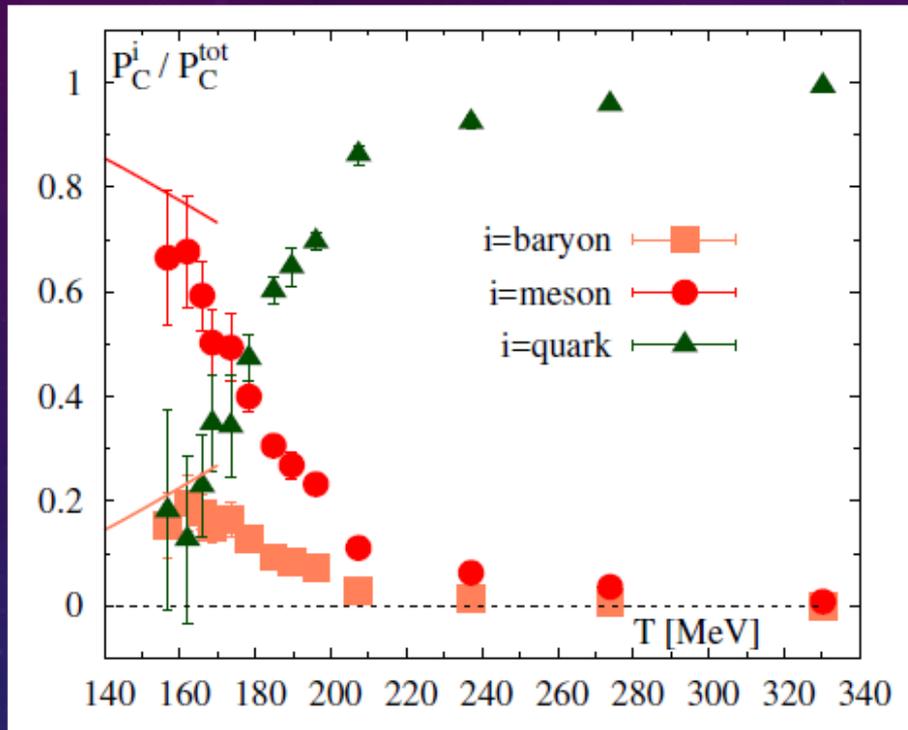


- 左辺は原理的には計算可能
- 右辺を定義するためには、クォーク数・反クォーク数演算子が必要

$$\bar{q}_f \gamma_\mu q_f$$

クォーク数と反クォーク数の差

ハドロン・クォークの分圧

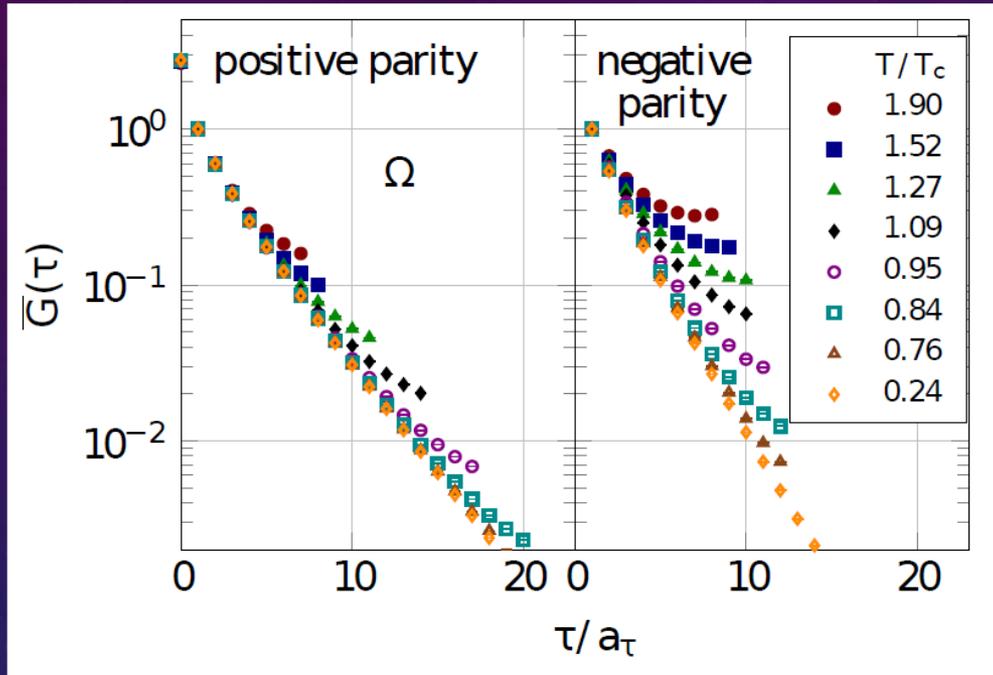


チャームクォークの分圧
Mukherjee+, PRD2016

- バリオン
- メソン
- クォーク

- ハドロンとクォークの自由粒子(共鳴ガス)描像
- 高次キュムラントの情報を利用

媒質中のストレンジバリオン



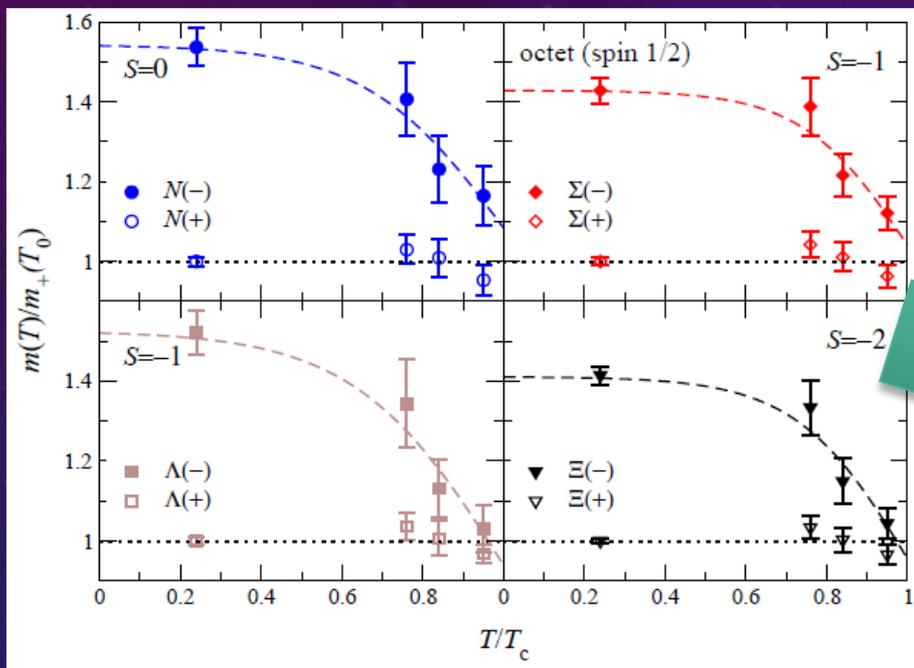
FASTSUM Collab.
LATTICE2017; XQCD2017

$N_f=2+1, m_{\pi}=384\text{MeV}$

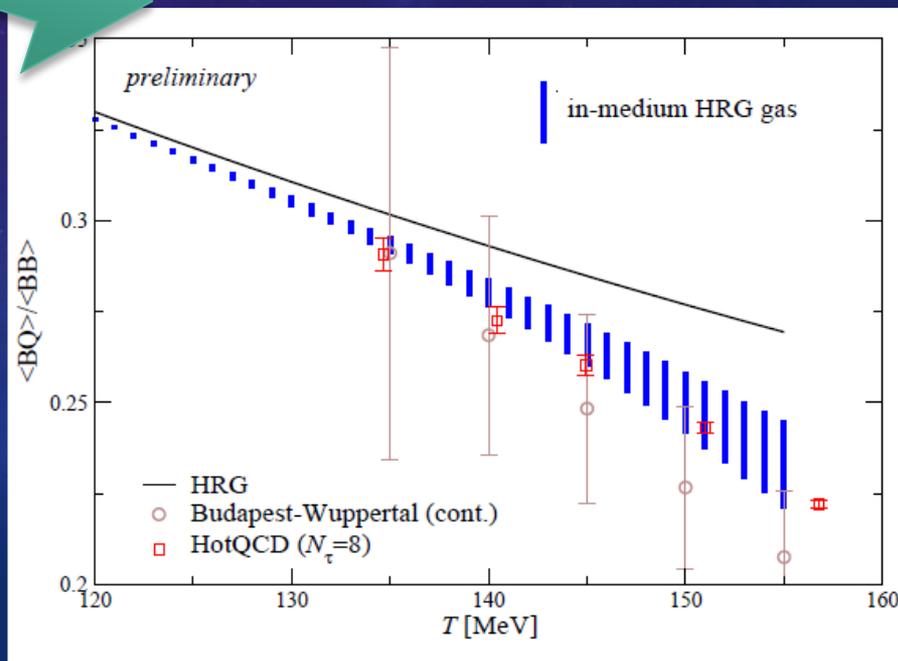
□ 温度上昇に伴い、偶パリティと奇パリティが縮退する傾向

媒質中のストレンジバリオン

質量の温度依存性



ハドロン共鳴ガス
模型の破綻を説明？



まとめ

- 格子QCDは、QCDを非摂動論に解析する現状唯一かつ強力な手法だが、定式化の都合上現れる制約も多い。
 - 最も基本的な観測量は、虚時間相関関数
 - ハドロンの演算子を我々は知らない。
 - 有限密度の解析は、符号問題により困難。
- 格子QCDは便利な数値解析装置ではなく、意味のある物理量を引き出すためには知恵を絞る必要がある。
- 有効模型等を併用して議論を進めるのも重要。

質問コーナーより

格子QCDでこの量を計算してほしい、という物理量を挙げてください

- 高密度中での**バリオン質量**、そこから**chiral partner**の示唆
- TMDやGPDといった3次元的な**クォーク分布関数**についての物理量を第一原理から計算してほしいです。できればx依存性を含めて。今後のハドロン構造論において実験的にも理論的にも非常に重要で、有効理論や実験との比較や予言をすると面白いと思います。
- 中間子(擬スカラー、ベクター、重クォーク入りのもの等)とバリオン(オクテット+デカプレット等)の**相互作用**(散乱長など)。特に $\eta(958)$ と量子異常の効果なども見られるとうれしいです。
- 核子中の**パートンの分布**(PDF)、特にクォーク質量を考慮した計算
- **phi meson**の**ポール質量**と**スクリーニング質量**を物理的なパイ中間子質量で計算してください。あとは**パイ中間子の分散関係**をいろいろな温度で計算してください。
- あるエネルギースケールでの**粒子の質量**
- 核子やハドロンの質量は計算できると聞きますが、**スピン**は計算できるのでしょうか？
パリティは？
- クォーク、クォーコニウムの**エントロピー**とか**自由エネルギー**とか
- **陽子の荷電半径**
- **散乱振幅**、**崩壊幅**、**陽子の大きさ**
- **スペクトル関数**

「どうして格子QCDではこの量が計算できないんだろう？」とか、「あの議論はどうなったんだろうか？」など、格子QCDに関して日頃から疑問に思っていることを挙げてください。

- 有限密度系などで、2つ以上の化学ポテンシャルを導入して格子QCDの計算を行うことができないと聞きました。なぜでしょうか。
- 格子QCDではクォーク分布関数の x 依存性は計算できないとしていて、低次のモーメント計算が一般的ですが、その理由としては格子QCDにはLorentz対称性が存在しないからということを知りましたが、本当でしょうか？このことについてなにか改善する余地はありますか？また、他にも格子QCDでの計算は原理的に不可能だとする物理量はありますか？
- いろいろ「計算できていない」量はあると思うのですが、それらを分類して、横軸を、日付(もしくは計算機の速度などのパラメータ)として、いつごろどの段階で、どのような量が計算可能になるか(もしくは原理的にずっと計算できないか)？がわかるような、分類表のようなものが見てみたいと思います。(できれば、のお願いです。すみません。)
- 符号問題の最近の議論・進展
- いろいろなコラボレーション(WHOTとか)がありますが、どこの名前が一番センスあるとおもいますか？ペンネーム:雲米志亜我例(元名古屋在住)

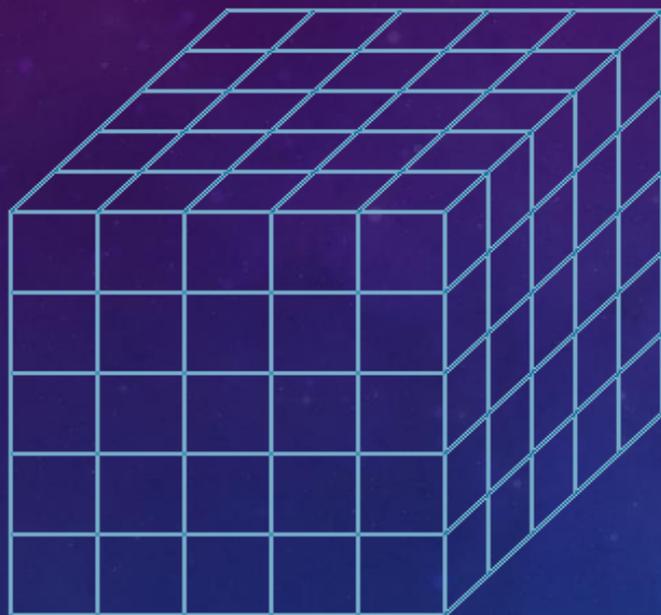
「どうして格子QCDではこの量が計算できないんだろう？」とか、「あの議論はどうなったんだろうか？」など、格子QCDに関して日頃から疑問に思っていることを挙げてください。

- 格子上でのFermionを考える際、なぜ問題が生ずるのか
- ゲージ場のChern-Simons数
- 格子QCDに向く物理量は何ですか。どうして向く、向かないがありますか。第一原理という点以外の観点から、どうして格子QCDの手法が注目されているのですか。
- なぜ格子に分割する必要がてできたのか。格子QCDによってどんなメリットがあるのか。
- 格子にする利点とは何ですか？
- 格子によって最小に区切られている”量？もの？”は、結局何だと言えるのでしょうか。
- 遅い回答となり申し訳ありません。格子QCD初心者でほとんど知識がないのですが、格子QCDを用いることで計算できるようになった物理量はどんなものがあるのでしょうか。またそれからどのような物理が得られたのでしょうか。漠然とした質問で申し訳ありませんがざっくりで良いので教えていただきたいと思っております。よろしくお願い致します。

データ容量と物理

ゲージ配位

128^4

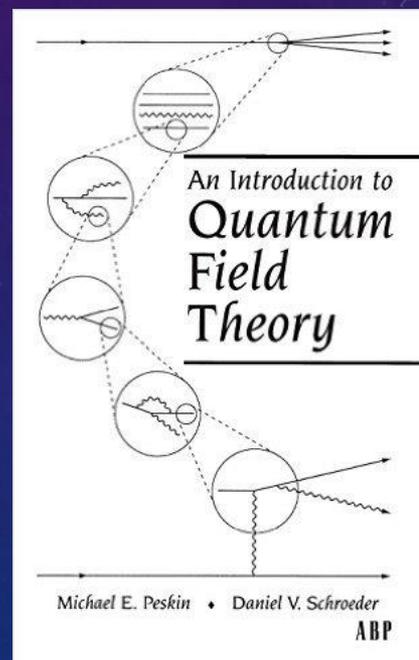


$128^4 \times 4 \times 9 \times 2 \times 8$ Bytes

= 144 GB

場の理論の教科書

Peskin-Schroeder



約10MB